高职数学整编教程

GAOZHI SHUXUE ZHENGBIAN JIAOCHENG

嵇金山 陈业勤 主编

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高职数学整编教程

主　编　嵇金山　陈业勤

副主编　荣建英　谭　静　刘　嘉

编　委　于正权　冯　梅　宋然兵

刘　嘉　陈业勤　张学兵

荣建英　谭　静　管颂东

俞　宁　嵇金山　赵　丽

东南大学出版社

·南京·

内 容 简 介

本书整合了高职类工科数学和经济数学的主要内容编写而成，全书为一册。内容包括：函数及其图像、一元函数微积分、二元函数微积分概要、级数、微分方程简介、线性代数初步、概率与统计初步。其中，本书在一元函数微积分和二元函数微积分的内容安排上进行了串联式整合，并且降低了二元函数微积分的要求，使之更为简洁易懂。

本书知识面广泛，便于学生拓展性自学，也便于教师教学中根据需要选取适当内容。本书每节附有习题及部分答案。本书可作为高职类各专业数学教学或自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

高职数学整编教程 /嵇金山，陈业勤主编. —南京：东南大学出版社，2013.8

ISBN 978－7－5641－4432－6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①嵇…②陈… Ⅲ.①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 178021 号

高职数学整编教程

主　　编	嵇金山　陈业勤	**责任编辑**	陈　跃
电　　话	(025)83795627/83362442(传真)	**电子邮箱**	chenyue58@sohu.com
出版发行	东南大学出版社	**出 版 人**	江建中
地　　址	南京市四牌楼 2 号	**邮　　编**	210096
销售电话	(025)83794121/83795801		
网　　址	http://www.seupress.com	**电子邮箱**	press@seupress.com
经　　销	全国各地新华书店	**印　　刷**	南京雄洲印刷有限公司
开　　本	700mm×1000mm　1/16	**印　　张**	14.5
字　　数	292 千字		
版 印 次	2013 年 8 月第 1 版　2013 年 8 月第 1 次印刷		
书　　号	ISBN　978－7－5641－4432－6		
定　　价	29.00 元		

*本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025－83791830

前　　言

为了适应高职教育阶段性的发展现状,特别是教学需求多样化的扩张,我们结合多年的教学经验和教学改革实践,编写了本书.

本书的编写宗旨是力求教学内容的广度,适当处理教学内容的深度;其次是整合了一元函数微积分和多元函数微积分的内容,并纳入了经济数学的教学内容,以便教学的取舍或自学;第三是每章的篇目突出了本章的核心概念、方法或思想,以强化学生的思维脉络;第四是注重数形结合,实例引入,以提高学生的形象思维和应用意识.

本书适合高职高专类师生教学使用.

本书在编写和出版过程中得到了学校和部门领导以及同仁的大力帮助和支持,在此一并表示诚挚的感谢.

由于编者水平所限,加上时间紧迫,教材中难免有不妥之处,恳请读者和使用本书的教师指正,以便再版时修正.

编者

2013 年 7 月

目　录

1　函数与图像

1.1　一元函数及其图像

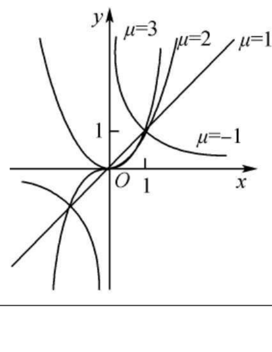
1.1.1　基本初等函数及其图像

我们知道，函数是描述客观世界中变量之间对应关系的一种模型，而其中的变量个数可以是两个、三个或者更多. 其中最熟悉的一种函数模型是 $y = f(x)$，其中的变量个数为两个，x 为自变量，y 为因变量. 通常把自变量为一个的函数称为一元函数.

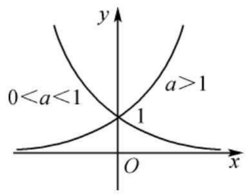
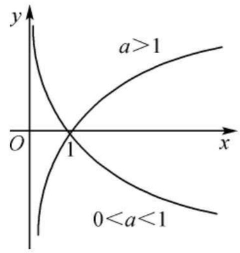
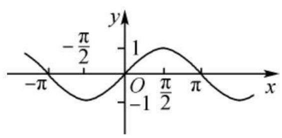
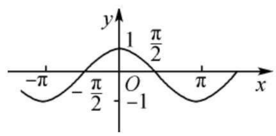
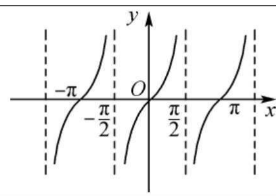
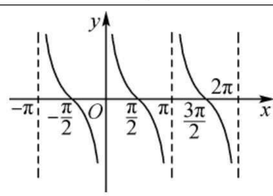
在一元函数中，通常把幂函数 $y = x^{\alpha}(\alpha \in \mathbf{R})$、指数函数 $y = a^{x}(a > 0$ 且 $a \neq 1)$、对数函数 $y = log_{a}x(a > 0$ 且 $a \neq 1)$、三角函数 $y = sin\,x$，$y = cos\,x$，$y = tan\,x$，$y = cot\,x$，$y = sec\,x$，$y = csc\,x$ 和反三角函数 $y = arcsin\,x$，$y = arccos\,x$，$y = arctan\,x$，$y = arccot\,x$ 统称为基本初等函数. 很多时候也把多项式函数 $y = a_{n}x^{n} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{1}x + a_{0}$ 看作基本初等函数.

对于函数，我们既要了解变量的变化范围，即定义域和值域，又要了解函数的几个基本性质，即单调性、奇偶性、有界性、周期性等，以进一步弄清楚因变量随着自变量变化而变化的情况. 而函数的图形对于研究函数的其他重要特性会有很大的帮助.

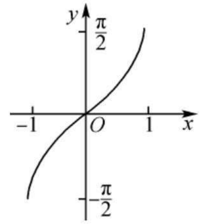
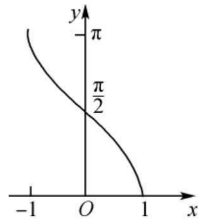
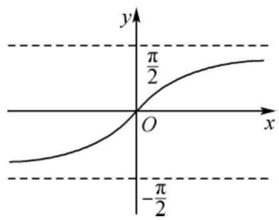
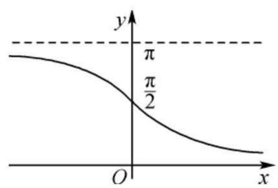
现将基本初等函数的图形及相关性质列表如下：

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
幂函数	$y = x^{\mu}$	定义域与值域随 μ 的不同而不同，但不论 μ 取什么值，函数在 $(0, +\infty)$ 内总有定义		若 $\mu > 0$，x^{μ} 在 $[0, +\infty)$ 内单调增加；若 $\mu < 0$，x^{μ} 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少

续表

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
指数函数	$y=a^x$, $a>0, a\neq 1$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(0,+\infty)$		若 $a>1$,a^x 单调增加;若 $0<a<1$,a^x 单调减少
对数函数	$y=log_a x$, $a>0, a\neq 1$	$x\in(0,+\infty)$, $y\in(-\infty,+\infty)$		若 $a>1$,$log_a x$ 单调增加;若 $0<a<1$,$log_a x$ 单调减少
正弦函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$		奇函数,周期为 2π,有界,在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加,在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
余弦函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$		偶函数,周期为 2π,有界,在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少,在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$, $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π,在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$, $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数,周期为 π,在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$

续表

函数	表达式	定义域与值域	图像	特性
反正弦函数	$y = \arcsin x$	$x \in [-1,1]$, $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数,单调增加,有界
反余弦函数	$y = \arccos x$	$x \in [-1,1]$, $y \in [0,\pi]$		单调减少,有界
反正切函数	$y = \arctan x$	$x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数,单调增加,有界
反余切函数	$y = \operatorname{arccot} x$	$x \in (-\infty,+\infty)$, $y \in (0,\pi)$		单调减少,有界

1.1.2 复合函数与初等函数

在确定了基本初等函数之后,现在我们来讨论函数之间的运算.

众所周知,基本初等函数之间可以通过四则运算,得到很多新的较为复杂的函数.但是,有些复杂的函数并不是通过四则运算得到的.

请看图 1.1.

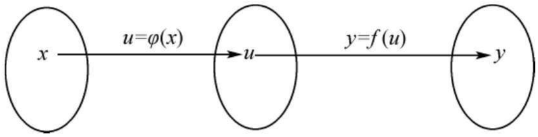


图 1.1

图 1.1 描述了变量 x,u,y 之间的传递关系,即 y 是 u 的函数 $y=f(u)$,而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$,那么,y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数.通常人们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作 $y=f[\varphi(x)]$.

跟四则运算一样,复合也是一种运算,是函数之间通过变量的替换而进行的运算.

例 1 已知 $y=\ln u, u=x^2$,试把 y 表示为 x 的函数.

解 $y=\ln u=\ln x^2, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

例 2 设 $y=u^2, u=\sin x$,试把 y 表示为 x 的函数.

解 $y=u^2=\sin^2 x$.

可以看出,复合运算的过程实际上就是把中间变量对应的函数代入的过程.显然,复合函数是一类比较复杂的函数,有时,为了研究的方便,我们又需要把复合函数分解为几个较简单的函数.这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数.

例 3 函数 $y=e^{\sin x}$ 是由哪些简单函数复合而成的?

解 令 $u=\sin x$,则 $y=e^u$,故 $y=e^{\sin x}$ 是由 $y=e^u, u=\sin x$ 复合而成的.

例 4 函数 $y=\tan^3 x$ 是由哪些初等函数复合而成的?

解 令 $u=\tan x$,则 $y=u^3$,

故 $y=\tan^3 x$ 是由 $y=u^3, u=\tan x$ 复合而成的.

这样,通过复合运算,又可得到更多更为复杂的函数.因此我们把由常数和基本初等函数,经过有限次四则运算和有限次复合而成的,并且能用一个式子表示的函数,称为初等函数.例如:

$$y=\frac{\sin x}{x^2+1}, y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2}), y=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$$

等都是初等函数.

例 5 分解初等函数 $y=\dfrac{\sin x}{x^2+x}$.

解 函数 $y=\dfrac{\sin x}{x^2+x}$ 由基本初等函数 $y=\sin x$ 和函数 $y=x^2+x$ 相除而成;而函数 $y=x^2+x$ 由基本初等函数 $y=x^2$ 和基本初等函数 $y=x$ 相加而成.

例 6 分解初等函数 $y=x^2+e^{\sqrt{x}}$.

解 函数 $y=x^2+e^{\sqrt{x}}$ 由基本初等函数 $y=x^2$ 和复合函数 $y=e^{\sqrt{x}}$ 相加而成;而

复合函数 $y=e^{\sqrt{x}}$ 由基本初等函数 $y=e^{u}$ 和基本初等函数 $u=\sqrt{x}$ 复合而成.

例 7　分解初等函数 $y=log_a(x+\sqrt{1+x^2})$.

解　函数 $y=log_a(x+\sqrt{1+x^2})$ 由基本初等函数 $y=log_a u$ 和函数 $u=x+\sqrt{1+x^2}$ 复合而成;函数 $u=x+\sqrt{1+x^2}$ 由基本初等函数 $y=x$ 和复合函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 相加而成;而复合函数 $y=\sqrt{1+x^2}$ 由基本初等函数 $y=\sqrt{v}$ 和简单函数 $v=1+x^2$ 复合而成.

例 8　求初等函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{ln(2-x)}$ 的定义域.

解　从函数的解析式中可看出需考虑:根式内非负、分母不为零、对数真数大于零三种情况,取它们的公共部分,即求方程组 $\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\ 2-x>0,\\ ln(2-x)\neq 0\end{cases}$ 的解,得定义域 $D=[-1,1)\cup(1,2)$.

例 9　判定初等函数 $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与 $g(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解　因为 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是偶函数;又因为 $g(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-g(x)$,所以 $g(x)$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内是奇函数.

1.1.3　分段函数及常用经济函数

通常我们知道,常用的函数表示法有解析法(公式法)、表格法和图像法.即用数学式子表示自变量与对应函数值的关系的方法叫做解析法,也叫公式法;将自变量值与对应函数值的关系列成表格的方法叫做表格法;用图像来表示自变量与对应函数值的关系的方法叫做图像法.

但是,在实际应用当中,有一种特殊形式的函数,自变量在定义域内不同的范围中取值时,与因变量的对应关系不同,即函数的表达式不同.那么就称这种函数为分段函数.

例如,函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.当 $x<0$ 时,$f(x)=x^2-1$;当 $x>0$ 时,$f(x)=x+1$;当 $x=0$ 时,$f(x)=0$.表达式有三种.

计算函数值时,要根据自变量所在的范围,选择相应的表达式来计算.

所以 $f(-2)=(-2)^2-1=3, f(1)=1+1=2, f(0)=0$.

例 10 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & 1<x\leqslant 3, \\ 1, & x=1, \\ -1, & -3\leqslant x<1, \end{cases}$ 请作出该函数的图像.

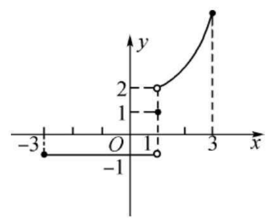


图 1.2

解 这是分段函数,定义域为 $[-3,3]$.

作图时要分区间、分段作图,即在区间 $(1,3]$ 上图像是抛物线的一部分或一小段,在区间 $[-3,1)$ 上图像是一条线段,在 $x=1$ 时是一个点.

完整的图像如图 1.2.

例 11 旅客乘坐火车可免费携带不超过 20 *kg* 的物品,超过 20 *kg* 而不超过 50 *kg* 的部分,每千克交 0.8 元,超过 50 *kg* 的部分每千克交 1 元,求运费与携带物品重量的函数关系,并求携带 30 *kg*、60 *kg* 物品的费用.

解 设 x *kg* 的物品应交运费 y 元,根据题意,则有

当 $0<x\leqslant 20$ 时, $y=0$;

当 $20<x\leqslant 50$ 时, $y=(x-20)\times 0.8$;

当 $x>50$ 时, $y=30\times 0.8+(x-50)\times 1$.

所以 $y=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x\leqslant 20, \\ 0.8x-16, & 20<x\leqslant 50, \\ x-26, & x>50, \end{cases}$ 此为分段函数.

当 $x=30$ 时, $y=8$;

当 $x=60$ 时, $y=34$.

需要说明的是,一般情况下分段函数不是初等函数,因为它不是一个函数解析式.

下面介绍几种常用的经济函数.

1. 需求函数与供给函数

(1) 需求函数

商品的市场需求量 Q 与价格 p 之间的关系函数为需求函数,记作 $Q=Q(p)$.

一般地,需求函数 Q 有以下几种类型:

① $Q=a-bp(a>0, b>0)$,此为线性需求函数;

② $Q=a-bp-cp^2(a>0, b>0, c>0)$,此为二次需求函数;

③ $Q=ae^{-bp}(a>0, b>0)$,此为指数需求函数.

(2) 供给函数

同理,商品的市场供给量 S 与价格 p 之间的关系函数为供给函数,记作 $S=S(p)$.

一般地，供给函数 S 有线性函数、幂函数、指数函数等类型，其中，线性供给函数为一般表示为

$$S = -c + dp(c > 0, d > 0).$$

显然，价格的高低影响供求关系. 价格偏高时供大于求，反之，供不应求. 通常，我们把供求平衡时，即商品的市场需求量与供给量相等时的价格称为均衡价格，记为 p_0.

例 12　当河虾销售价为 36 元 / 千克时，某市的需求量为 1 000 千克. 若收购价降低 5 元 / 千克，则需求量可增加 300 千克，求河虾的线性需求函数.

解　设线性需求函数为 $Q = a - bp$，则有

$$\begin{cases} 1\,000 = a - 36b, \\ 1\,300 = a - 31b, \end{cases}$$

解得 $a = 3\,160$，$b = 60$，
所以，所求的线性需求函数为

$$Q = 3\,160 - 60p.$$

例 13　已知某商品的需求函数与供给函数分别为 $Q = 5\,000 - 120p$，$S = -4\,000 + 80p$. 试求该商品的均衡价格 p_0.

解　设 $Q = S$，即 $5\,000 - 120p = 4\,000 + 80p$，
解得 $p_0 = 5$ 即为均衡价格.

2. 总成本函数、总收入函数与总利润函数

产品的产量或销售量 q 影响着总成本 C、总收入 R、总利润 L. 我们把总成本 C、总收入 R、总利润 L 与 q 之间建立的函数分别叫做总成本函数 $C(q)$、总收入函数 $R(q)$、总利润函数 $L(q)$. 有时也称做成本函数 $C(q)$、收入函数 $R(q)$、利润函数 $L(q)$.

例 14　已知某产品的总成本函数为 $C = 3\,600 + \frac{q^2}{12}$，求当生产 300 个该产品时的总成本和平均成本.

解　由题意，$q = 300$，此时，总成本 $C(300) = 3\,600 + \frac{300^2}{12} = 11\,100$，

平均成本为 $\overline{C}(300) = \frac{11\,100}{300} = 37$.

1.1.4　隐函数

我们知道，函数是变量之间的对应关系，而对应关系的表达方式可以是多种多样的，若把 y 直接表示成 x 的解析式 $y = f(x)$，则 $y = f(x)$ 称为显函数，若变量 x，y 之间的对应关系是由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的，那么，我们把此函数称为隐函数.

有些隐函数能化为显函数，有些隐函数不能化为显函数，或转化非常困难. 例如，