



新华传媒
XINHUA MEDIA

根据上海高中数学学业水平考试要求编写



读交大之星 圆名校之梦

上海新学业水平考模拟预测试卷

数学

紧跟考试动向 囊括最新题型

贴近自主招生 全力冲刺十A

丛书主编 蒋 华 本册主编 温秦富

Y12



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



模拟预测试卷一

(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

1. 已知集合 $A = \{x \mid x > 1\}$, 集合 $B = \{x \mid x < 2\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 已知 $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ x & -1 \end{vmatrix} = 0$, 则 $x =$ _____.
3. 函数 $y = \log_3(x+1)$ 的定义域为_____.
4. 一条弦的长等于半径, 则这条弦所对圆心角的弧度为_____.
5. 在 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{CA} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AB} =$ _____.
6. 如果 $a < b < 0$, 那么 $\frac{1}{a}$ _____ $\frac{1}{b}$. (填 “>”、“<” 或 “=”)
7. 在 $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)^{10}$ 的展开式中常数项是_____.
8. 行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ 中元素 7 的代数余子式是_____.
9. 若椭圆长轴长与短轴长之比为 2, 它的一个焦点坐标是 (3, 0), 则椭圆的标准方程是_____.
10. 在棱长为 a 的正方体 AC_1 中, 与 BC 成异面直线且距离等于 a 的棱有_____条.
11. 函数 $y = 2^{x^2-2x-3}$ 的单调递增区间为_____.
12. (上海会考真题) 36 的所有正约数之和可按如下方法得到: 因为 $36 = 2^2 \times 3^2$, 所有 36 的所有正约数之和为
 $(1+3+3^2) + (2+2 \times 3+2 \times 3^2) + (2^2+2^2 \times 3+2^2 \times 3^2) = (1+2+2^2)(1+3+3^2) = 91$.
 参照上述方法, 可求得 2 000 的所有正约数之和为_____.

二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

13. (上海会考真题) 两条异面直线所成的角的范围是()
 A. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ C. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ D. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
14. 函数 $y = 3\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是()

- A. 2π B. $\frac{2\pi}{3}$ C. 6π D. $\frac{3\pi}{2}$

15. 函数 $f(x) = (x-1)^2 (x \geq 1)$ 的反函数是()
 A. $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} (x \geq 1)$ B. $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} (x \geq 1)$
 C. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1 (x \geq 0)$ D. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1 (x \geq 0)$
16. 从甲、乙、丙三人中任选两名代表, 甲被选中的概率是()
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
17. 设集合 $M = \{x \mid |x-1| < 2\}$, $N = \{x \mid 0 < x < 3\}$, 那么 “ $a \in M$ ” 是 “ $a \in N$ ” 的()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
18. 把 4 名男生和 4 名女生排成一排, 女生要排在一起, 不同排法的种数是()
 A. P_8^8 B. $P_5^5 P_4^4$ C. $P_8^4 P_8^4$ D. P_8^5
19. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_5 = 11$, $a_8 = 5$, 则 $a_{10} =$ ()
 A. 15 B. 2 C. 1 D. 7
20. 已知正三棱锥的底面边长为 4, 高为 2, 则三棱锥的表面积是()
 A. $8\sqrt{3}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $12\sqrt{3}$ D. $15\sqrt{3}$
21. 已知点 P 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的一个动点, 则点 P 到点 (0, 2) 的距离与到该抛物线准线的距离之和的最小值是()
 A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{9}{2}$
22. (上海会考真题) 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 q 为公比的等比数列. 若 $b_n = -2a_n$, 则数列 $\{b_n\}$ 是()
 A. 以 q 为公比的等比数列 B. 以 $-q$ 为公比的等比数列
 C. 以 $2q$ 为公比的等比数列 D. 以 $-2q$ 为公比的等比数列
23. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x \geq 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$, 如果 $f(x_0) = \frac{1}{2}$, 那么 x_0 等于()
 A. 1 或 -2 B. -1 或 2 C. 1 或 2 D. -1 或 -2
24. (上海会考真题) 实数 a, b 满足 $ab > 0$ 且 $a \neq b$, 由 $a, b, \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}$ 按一定顺序构成的数列()
 A. 可能是等差数列, 也可能是等比数列
 B. 可能是等差数列, 但不可能是等比数列
 C. 不可能是等差数列, 但可能是等比数列

D. 不可能是等差数列,也不可能是等比数列

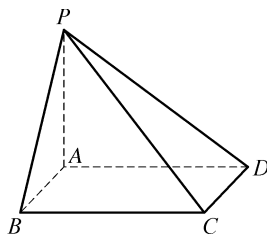
三、解答题(本大题共 5 题,满分 48 分)

25. (本题满分 7 分)已知 $\sin(\pi - \alpha) - \cos(\pi + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), 求 $\sin \alpha - \cos \alpha$ 的值.

26. (本题满分 7 分)已知等差数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的前 n 项和为 $S_n = an^2 + bn + c$, 且 $S_1 = 3$, $a_3 = 7$. 求 a 、 b 、 c 的值及 $\{a_n\}$ 的通项公式.

27. (本题满分 7 分)如图,四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形 $ABCD$,侧棱 PA 垂直于底面,且 $PA = 3$.

- (1) 求异面直线 PB 与 CD 所成的角的大小(结果用反三角函数表示);
- (2) 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



28. (本题满分 13 分)已知圆 $C: x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ 和定点 $P(-2, 0)$.

- (1) 过点 P 作圆 C 的切线 l , 求直线 l 的方程;
- (2) 过点 P 作直线 l 与圆相交于 A 、 B 两点, 且 $AB = 2\sqrt{2}$ 时, 求直线 l 的方程.

29. (本题满分 14 分)已知 $f(x) = \frac{a}{a^2 - 1}(a^x - a^{-x})$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

- (1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性;
- (2) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (3) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $f(x) \geq b$ 恒成立, 求 b 的取值范围.

四、加试题(本题满分 20 分)

若数列 $\{b_n\}$ 满足: 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $b_{n+2} - b_n = d$ (常数), 则称数列 $\{b_n\}$ 是公差为 d 的准等差

数列. 如: 若 $c_n = \begin{cases} 4n-1, & \text{当 } n \text{ 为奇数时;} \\ 4n+9, & \text{当 } n \text{ 为偶数时.} \end{cases}$ 则 $\{c_n\}$ 是公差为 8 的准等差数列.

- (1) 求上述准等差数列 $\{c_n\}$ 的第 8 项 c_8 、第 9 项 c_9 以及前 9 项的和 T_9 ;
- (2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a$, 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n + a_{n+1} = 2n$. 求证: $\{a_n\}$ 为准等差数列, 并求其通项公式;
- (3) 设(2)中的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_{63} > 2012$, 求 a 的取值范围.

模拟预测试卷二

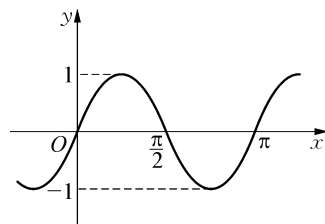
(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- 不等式 $|3 - 2x| \leq 1$ 的解集为_____.
- (上海会考真题)函数 $y = \log_2(x + 2)$ 的定义域是_____.
- 若函数 $f(x) = x + 2$ 的反函数为 $f^{-1}(x)$, 则 $f^{-1}(-1) =$ _____.
- 函数 $y = (x - 2)^{-2}$ 的定义域为_____.
- 已知 $\tan \alpha = -2$, 则 $\frac{4\sin \alpha - 2\cos \alpha}{5\cos \alpha + 3\sin \alpha} =$ _____.
- 已知 $a = (-2, 3)$, $b = (3, -5)$, 则 $2a - b =$ _____.
- 球的表面积为 $16\pi \text{ cm}^2$, 则球的体积为_____ cm^3 .
- (上海会考真题)若无穷等比数列 $\{a_n\}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 的首项为 1、公比为 $\frac{1}{3}$, 则该数列各项的和为_____.
- $\left(x^2 + \frac{1}{ax}\right)^6$ 的二项展开式中 x^3 的系数为 $\frac{5}{2}$, 则 $a =$ _____.
- (上海会考真题)在 10 件产品中有 3 件次品, 从中随机取出 5 件, 则恰含 1 件次品的概率是_____. (结果用数值表示)
- 已知 $x > 0$, $y > 0$, $\lg 2^x + \lg 8^y = \lg 2$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{3y}$ 的最小值是_____.
- 《九章算术》“竹九节”问题: 现有一根 9 节的竹子, 自上而下各节的容积成等差数列, 上面 4 节的容积共为 3 升, 下面 3 节的容积共 4 升, 则第 5 节的容积为_____升.

二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- i 为虚数单位, 则 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2011} =$ ()
A. $-i$ B. -1
C. i D. 1
- (上海会考真题)右图是下列函数中某个函数的部分图像, 则该函数是 ()
A. $y = \sin x$ B. $y = \sin 2x$
C. $y = \cos x$ D. $y = \cos 2x$



- 为了得到函数 $y = \cos\left(x - \frac{1}{3}\right)$ 的图像, 只需把函数 $y = \cos x$ 图像上所有的点 ()

A. 向左平行移动 $\frac{1}{3}\pi$ 个单位
B. 向左平行移动 $\frac{1}{3}$ 个单位
C. 向右平行移动 $\frac{1}{3}\pi$ 个单位
D. 向右平行移动 $\frac{1}{3}$ 个单位

- 从已有 3 个红球、2 个白球的袋中任取 3 个球, 则所取的 3 个球中至少有 1 个白球的概率是 ()

A. $\frac{1}{10}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{9}{10}$

- 已知命题 A: $|x - 1| < 3$, 命题 B: $(x + 2)(x + a) < 0$, 若 A 是 B 的充分而不必要条件, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -4)$ B. $[4, +\infty)$
C. $(4, +\infty)$ D. $(-\infty, -4]$

- 偶函数 $f(x)$ 在区间 $[m, n]$ (其中 $0 < m < n$) 上是单调递减函数, 则 $f(x)$ 在区间 $[-n, -m]$ 上是 ()

A. 单调递减函数, 且有最小值 $-f(m)$ B. 单调递减函数, 且有最大值 $-f(m)$
C. 单调递增函数, 且有最小值 $f(m)$ D. 单调递增函数, 且有最大值 $f(m)$

- 已知直线 $l: ax + by = 1$, 点 $P(a, b)$ 在圆 $C: x^2 + y^2 = 1$ 外, 则直线 l 与圆 C 的位置关系是 ()

A. 相交 B. 相切 C. 相离 D. 不能确定

- 中心在原点, 焦点在 x 轴上的双曲线的实轴与虚轴相等, 一个焦点到一条渐近线的距离为 $\sqrt{2}$, 则双曲线方程为 ()

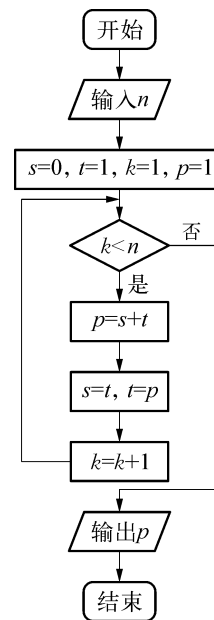
A. $x^2 - y^2 = 2$ B. $x^2 - y^2 = \sqrt{2}$
C. $x^2 - y^2 = 1$ D. $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$

- 执行右面的程序框图, 如果输入的 n 是 4, 则输出的 p 是 ()

A. 8 B. 5
C. 3 D. 2

- (上海会考真题)设 l_1, l_2 是空间两条直线, “ l_1, l_2 没有公共点”是 “ l_1, l_2 为异面直线”的 ()

A. 充分但非必要条件
B. 必要但非充分条件
C. 充分必要条件
D. 既非充分又非必要条件



23. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 对于所有 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n = n^2$, 则 $a_3 + a_5 = (\quad)$

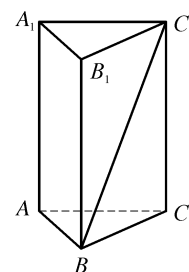
- A. $\frac{61}{16}$ B. $\frac{25}{9}$ C. $\frac{25}{16}$ D. $\frac{31}{15}$

24. 已知函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2kx + k)$ 的值域为 $\mathbf{R}$, 则实数 k 的取值范围是 $(\quad)$

- A. $(0, 1)$ B. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
C. $[0, 1)$ D. $k = 0$ 或 $k \geq 1$

三、解答题(本大题共 5 题, 满分 48 分)

25. (上海会考真题)(本题满分 7 分)如图所示, 在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AA_1 = 6$, 异面直线 BC_1 与 AA_1 所成角的大小为 $\frac{\pi}{6}$, 求该三棱柱的体积.



26. (本题满分 7 分)在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对边分别为 a, b, c , 已知 $a = 2\sqrt{3}, c = 2$,

$$\begin{vmatrix} \sin C & \sin B & 0 \\ 0 & b & -2c \\ \cos A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ 求 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S.$$

27. (本题满分 7 分)在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_3 = 11, d = -2$, 求此数列的前 n 项和 S_n 的最大值.

28. (本题满分 13 分)已知二次函数 $y = x^2 - mx + 4$ 的图像与 x 轴交于两点 A, B , 且 $|AB| = 2$, 求:

- (1) 求二次函数的解析式;
(2) 求二次函数的最小值.

29. (本题满分 14 分)已知抛物线 $x^2 + 2py = 0 (p > 0)$ 上的点到它的准线的距离的最小值为 $\frac{1}{2}$.

- (1) 求抛物线的焦点 F 的坐标;
(2) 若经过点 $M(0, -1)$ 的直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, O 是坐标原点, OA, OB 的斜率之和为 1, 求直线 l 的方程.

四、加试题(本题满分 20 分)

设函数 $f(x) = x + \frac{a}{x}$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f(2) = \frac{5}{2}$. 设点 P 是函数图像上的任意一点, 过点 P 分别作直线 $y = x$ 和 y 轴的垂线, 垂足分别为 M, N .

- (1) 写出 $f(x)$ 的单调递减区间(不必证明);
(2) 问: $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由;
(3) 设 O 为坐标原点, 求四边形 $OMPN$ 面积的最小值.

模拟预测试卷三

(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

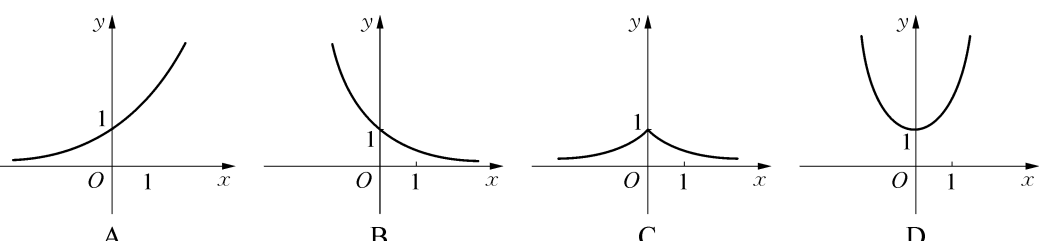
一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- 若集合 $A = \{x \mid 1 < |x| < 3, x \in \mathbf{Z}\}$, 用列举法表示集合 $A =$ _____.
- 已知复数 $(m-1) + (m+2)i$ 是实数, 则实数 $m =$ _____.
- (上海会考真题) 抛物线 $y^2 = 8x$ 的准线方程是 _____.
- 已知全集 $I = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, 集合 $M = \{1, 3, 7\}$, $N = \{3, 7, 8\}$, 则集合 $C_I(M \cap N) =$ _____.
- 已知 $|a| = 2$, $|b| = 3$, a 与 b 的夹角为 60° , 则 $|a+b| =$ _____.
- 已知无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的第二项 $a_2 = -5$, 各项和 $S = 16$, 则该数列的公比 $q =$ _____.
- (上海会考真题) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 1, 公差为 2, 则该数列的前 n 项和 $S_n =$ _____.
- 已知函数 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3^x \end{vmatrix}$, 则函数 $y = f(x)$ 的反函数是 _____.
- (上海会考真题) 在 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ 的二项展开式中, 常数项的值为 _____.
- 若 $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{8}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 则 $\sin \alpha - \cos \alpha =$ _____.
- 若正三棱柱的侧面展开图是一个边长为 6 的正方形, 则它的体积等于 _____.
- 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 过点 $P(4, 0)$ 的直线与抛物线交于两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$, 则 $y_1^2 + y_2^2$ 的最小值是 _____.

二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- (上海会考真题) 展开式为 $ad - bc$ 的行列式是()
 A. $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix}$ B. $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ C. $\begin{vmatrix} a & d \\ b & c \end{vmatrix}$ D. $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$
- “ $a^2 + b^2 > 0$ ”是“ $ab \neq 0$ ”的()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 如果数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 方差为 s^2 , 则 $3x_1+5, 3x_2+5, \dots, 3x_n+5$ 的平均数和方差分别为()

- $\bar{x}$ 和 s^2
- $3\bar{x}+5$ 和 s^2
- $3\bar{x}+5$ 和 $9s^2$
- $3\bar{x}+5$ 和 $9s^2+30s+25$

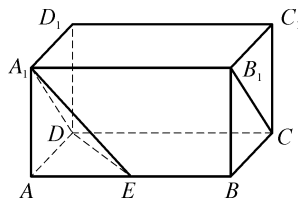
- 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ 的定义域为 M , $g(x) = e^x - 2$ 的值域为 N , 则 $M \cap N =$ ()
 A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $(-2, 2)$ D. $\emptyset$
- (上海会考真题) 下列函数中, 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数的是()
 A. $y = x^2$ B. $y = |x|$ C. $y = \sin x$ D. $y = x^3$
- 已知向量 $a = (1, 2)$, $b = (2x, -3)$, 若 $a \parallel b$, 则 x 等于()
 A. 3 B. $\frac{3}{4}$ C. -3 D. $-\frac{3}{4}$
- 为得到函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图像, 只需将函数 $y = \sin 2x$ 的图像()
 A. 向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位 B. 向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位
 C. 向左平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位 D. 向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位
- (上海会考真题) 函数 $y = \frac{1}{2^{|x|}}$ 的大致图像是()

- 同时掷两个骰子, 各掷一次, 向上的点数之和是 6 的概率是()
 A. $\frac{1}{12}$ B. $\frac{5}{36}$ C. $\frac{1}{9}$ D. $\frac{1}{6}$
- 经过直线 $x - y = 0$ 与直线 $x + y - 6 = 0$ 的交点, 且与直线 $2x + 3y - 1 = 0$ 垂直的直线的点法式方程为()
 A. $3(x-3) - 2(y-3) = 0$ B. $3(x-3) + 2(y-3) = 0$
 C. $2(x-3) - 3(y-3) = 0$ D. $2(x-3) + 3(y-3) = 0$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg x|, & 0 < x \leq 10 \\ -\frac{1}{2}x + 6, & x > 10 \end{cases}$, 若 a, b, c 互不相等, 且 $f(a) = f(b) = f(c)$, 则 abc 的取值范围是()
 A. $(1, 10)$ B. $(5, 6)$ C. $(10, 12)$ D. $(20, 24)$

24. 在 $\triangle ABC$ 中,角 A 、 B 的对边长依次是 a 、 b ,满足条件 $a\cos A = b\cos B$,则 $\triangle ABC$ 的形状是()
- A. 等腰三角形
B. 直角三角形
C. 等腰直角三角形
D. 等腰三角形或直角三角形

三、解答题(本大题共5题,满分48分)

25. (上海会考真题)(本题满分7分)已知 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$,化简并求值: $(1 + \tan^2 2\alpha) \left[\cos \left(2\alpha + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \right]$.

26. (本题满分7分)如图,在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$,点 E 是棱 AB 的中点,求异面直线 B_1C 与 A_1E 所成角的大小.



27. (本题满分7分)已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3$, $a_n = \frac{3a_{n-1} - 2}{a_{n-1}} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$.

- (1) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_n - 2}{1 - a_n}$,证明: $\{b_n\}$ 是等比数列;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

28. (本题满分13分)在直角坐标系 xOy 中,以 O 为圆心的圆与直线 $x - \sqrt{3}y = 4$ 相切.
- (1) 求圆 O 的方程;
(2) 圆 O 与 x 轴相交于 A 、 B 两点,圆内的动点 P 使 $|PA|$ 、 $|PO|$ 、 $|PB|$ 成等比数列,求 $\frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|}$ 的取值范围.

29. (本题满分14分)已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + 2x + a}{x}, x \in [1, +\infty)$.

- (1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时,求函数 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若对任意 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) > 0$ 恒成立,试求实数 a 的取值范围.

四、加试题(本题满分20分)

对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,若数列 $\{a_n\}$ 同时满足下列两个条件,则称数列 $\{a_n\}$ 具有“性质 m ”:

- ① $\frac{a_n + a_{n+2}}{2} < a_{n+1}$; ② 存在实数 M ,使得 $a_n \leq M$ 成立.

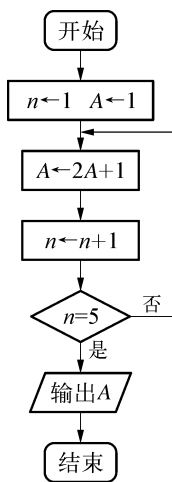
- (1) 数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 中, $a_n = n$, $b_n = 2\sin \frac{n\pi}{6} (n = 1, 2, 3, 4, 5)$,判断 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 是否具有“性质 m ”;
(2) 若各项为正数的等比数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $c_3 = \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{7}{4}$,证明:数列 $\{S_n\}$ 具有“性质 m ”,并指出 M 的取值范围;
(3) 若数列 $\{d_n\}$ 的通项公式 $d_n = \frac{t(3 \times 2^n - n) + 1}{2^n} (n \in \mathbf{N}^*)$.对于任意的 $n \geq 3 (n \in \mathbf{N}^*)$,数列 $\{d_n\}$ 具有“性质 m ”,且对满足条件的 M 的最小值 $M_0 = 9$,求整数 t 的值.

模拟预测试卷四

(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

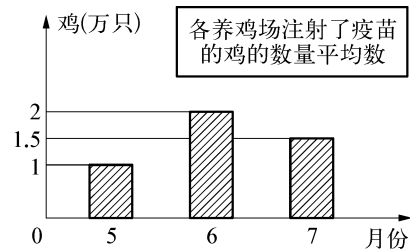
- 函数 $f(x) = 2\sin(3x - 4)$ 的最小正周期是_____.
- 若全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x \geq 2\}$, 则 $C_U A =$ _____.
- 若函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的反函数的图像过点 $(2, -1)$, 则 $a =$ _____.
- 直线 $l_1: x + my + 1 = 0$ 与 $l_2: x - y + 2 = 0$ 垂直, 则 $m =$ _____.
- (上海会考真题) 已知向量 $\mathbf{a} = (1, k)$, $\mathbf{b} = (9, k - 6)$. 若 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, 则实数 $k =$ _____.
- 计算: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n - \frac{4n^2 + 2n - 1}{2n + 2} \right) =$ _____.
- (上海会考真题) 已知 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____.
- 数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 4$ 的等比数列, 且 S_3, S_2, S_4 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的通项公式是_____.
- 在相距 2 千米的 A、B 两点处测量目标 C, 若 $\angle CAB = 75^\circ$, $\angle CBA = 60^\circ$, 则 A、C 两点之间的距离为_____千米.
- 设 $\left[5x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]^n$ 的展开式的各项系数之和为 M, 二项式系数之和为 N, 若 $M - N = 56$, 则展开式中常数项为_____.
- 执行右图所示算法, 输出的结果是_____.
- 以抛物线 $C: y^2 = 8x$ 上的一点 A 为圆心作圆, 若该圆经过抛物线 C 的顶点和焦点, 那么该圆的方程为_____.



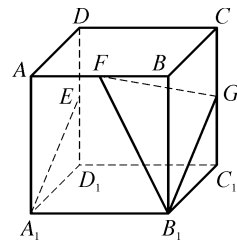
二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- “ $|x| = 2$ ”的充要条件是()
 - $x = 2$
 - $x = -2$
 - $x = 2$ 或 $x = -2$
 - 以上都不对
- (上海会考真题) 设 $f^{-1}(x)$ 为函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 的反函数, 下列结论正确的是()
 - $f^{-1}(2) = 2$
 - $f^{-1}(2) = 4$
 - $f^{-1}(4) = 2$
 - $f^{-1}(4) = 4$
- 函数 $y = 2\cos x (x \in \mathbf{R})$ 是()
 - 周期为 2π 的奇函数
 - 周期为 2π 的偶函数
 - 周期为 π 的奇函数
 - 周期为 π 的偶函数

- 已知直线 l 过点 $(0, -1)$, 且与直线 $y = -x + 2$ 垂直, 则直线 l 的方程为()
 - $y = x - 1$
 - $y = x + 1$
 - $y = -x - 1$
 - $y = -x + 1$
- 为了了解“预防禽流感疫苗”的使用情况, 某市卫生部门对本地区 5 月份至 7 月份使用疫苗的所有养鸡场进行了调查, 根据下列图表提供的信息, 可以得出这三个月本地区平均每月注射了疫苗的鸡的数量为()
 - 1 万只
 - 1.5 万只
 - 2 万只
 - 4.5 万只



- (上海会考真题) $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} =$ ()
 - $\cos 2\theta$
 - $\sin 2\theta$
 - 1
 - 1
- 若平面向量 $\mathbf{a} = (1, x)$ 和 $\mathbf{b} = (2x + 3, -x)$ 互相平行, 其中 $x \in \mathbf{R}$. 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| =$ ()
 - 2 或 0
 - $2\sqrt{5}$
 - 2 或 $2\sqrt{5}$
 - 2 或 10
- 若函数 $f(x) = 2^{x-1} - a$ 有零点, 则实数 a 的取值范围是()
 - $(-\infty, 0]$
 - $[0, +\infty)$
 - $(-\infty, 0)$
 - $(0, +\infty)$
- 如图, 长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1 = AB = 2$, $AD = 1$, 点 E、F、G 分别是 DD_1 、AB、 CC_1 的中点, 则异面直线 A_1E 与 GF 所成的角是()
 - 30°
 - 45°
 - 60°
 - 90°
- 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 7]$ 上是增函数, 且最小值为 5, 那么 $f(x)$ 在区间 $[-7, -3]$ 上是()
 - 增函数且最小值为 -5
 - 增函数且最大值为 -5
 - 减函数且最小值为 -5
 - 减函数且最大值为 -5



- 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的焦距为 10, 点 $P(2, 1)$ 在 C 的渐近线上, 则 C 的方程为()
 - $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$
 - $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$
 - $\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$
 - $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{80} = 1$

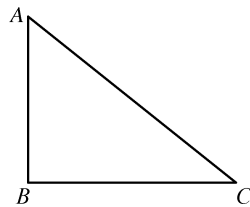
24. 若 $\{a_n\}$ 是无穷等比数列, 则下列数列可能不是等比数列的是 ()
- A. $\{a_{2n}\}$ B. $\{a_{2n-1}\}$ C. $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ D. $\{a_n + a_{n+1}\}$

三、解答题(本大题共 5 题, 满分 48 分)

25. (本题满分 7 分) 已知函数 $f(x) = \frac{x^2 + bx + a}{x}$ ($a \in \mathbf{R}^+$).

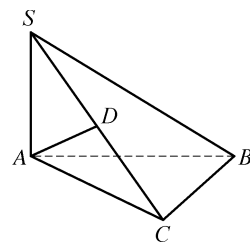
- (1) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 求 b 的值;
 (2) 在(1)的条件下求函数 $f(x)$ 在 $x \in [2, +\infty)$ 上的值域.

26. (上海会考真题)(本题满分 7 分) 如图, 某校有一块形如直角三角形 ABC 的空地, 其中 $\angle B$ 为直角, AB 长 40 米, BC 长 50 米. 现欲在此空地上建造一间健身房, 其占地形状为矩形, 且 B 为矩形的一个顶点, 求该健身房的最大占地面积.



27. (本题满分 7 分) 如图, 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $BC \perp$ 平面 SAC , $AD \perp SC$.

- (1) 求证: $AD \perp$ 平面 SBC ;
 (2) 试在 SB 上找一点 E , 使得 $BC \parallel$ 平面 ADE , 并证明你的结论.



28. (本题满分 13 分) 设椭圆的中心在坐标原点, 长轴在 x 轴上, 且 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 已知双曲线

$$\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$$

的焦点 P 与椭圆的两个焦点 F_1, F_2 组成等腰直角三角形.

- (1) 求椭圆的方程;
 (2) M 为椭圆上的点, 求 $\triangle MF_1F_2$ 面积的最大值.

29. (本题满分 14 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 对一切正整数 n , 点 $P_n(n, S_n)$ 都在函数 $f(x) = x^2 + 2x$ 的图像上.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 若 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 B_n ;
 (3) 设 $c_n = t^{a_n}$ ($t > 0$), 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n+1}}{T_n}$ 的值.

四、加试题(本题满分 20 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 具有性质: ① a_1 为整数; ② 对于任意的正整数 n , 当 a_n 为偶数时, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$; 当

$$a_n \text{ 为奇数时, } a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{2}.$$

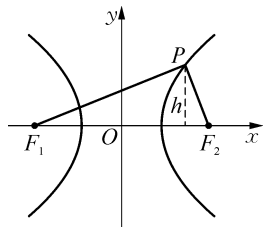
- (1) 若 a_1 为偶数, 且 a_1, a_2, a_3 成等差数列, 求 a_1 的值;
 (2) 设 $a_1 = 2^m + 3$ ($m > 3$ 且 $m \in \mathbf{N}$), 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求证: $S_n \leq 2^{m+1} + 3$;
 (3) 若 a_1 为正整数, 求证: 当 $n > 1 + \log_2 a_1$ ($n \in \mathbf{N}$) 时, 都有 $a_n = 0$.

模拟预测试卷五

(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

1. 已知集合 $A = \{x | |x| < 2\}$, $B = \{x | x^2 - 4x + 3 < 0\}$, 则 $A \cap B$ 等于_____.
2. 不等式 $\frac{1}{x} - 1 < 0$ 的解集为_____.
3. (上海会考真题) 1、1、2、2、5 这五个数的中位数是_____.
4. 已知 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, 则 $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha)$ 的值是_____.
5. 已知 a, b, c, d 是公比为 2 的等比数列, 则 $\frac{2a+b}{2c+d} =$ _____.
6. 行列式 $\begin{vmatrix} 1+\sqrt{3} & -2 \\ 5 & 1-\sqrt{3} \end{vmatrix}$ 的值为_____.
7. (上海会考真题) 复数 $2 + 3i$ (i 是虚数单位) 的模是_____.
8. 将一枚硬币连续掷 3 次, 则恰有连续 2 次出现正面向上的概率为_____.
9. 圆心为 $(1, 2)$ 且与直线 $5x - 12y - 7 = 0$ 相切的圆的方程为_____.
10. 向量 $\mathbf{a} = (3, -4)$, 向量 $|\mathbf{b}| = 2$, 若 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -5$, 那么向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 的夹角是_____.
11. 圆柱体的底面直径为 6, 高为 5, 则它的表面积为_____.
12. 双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的两个焦点为 F_1, F_2 , 点 P 在双曲线上, 若 $PF_1 \perp PF_2$, 则点 P 到 x 轴的距离为_____.



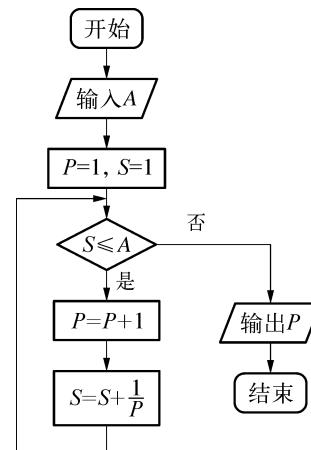
二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

13. 对于集合 A, B , “ $A \cap B = A \cup B$ ”是“ $A = B$ ”的()
A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件
14. 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上为增函数的是()
A. $y = \sin x$ B. $y = \cos x$
C. $y = \tan x$ D. $y = \cot x$

15. (上海会考真题) 直线 $2x - 3y + 1 = 0$ 的一个方向向量是()
A. $(2, -3)$ B. $(2, 3)$ C. $(-3, 2)$ D. $(3, 2)$

16. 一个三角形的三边长依次为 4、6、 $2\sqrt{7}$, 这个三角形的面积是()
A. $3\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$
17. 直线 l 过点 $A(-1, 2)$ 且与直线 $2x - 3y + 4 = 0$ 垂直, 则直线 l 的方程是()
A. $3x + 2y - 1 = 0$ B. $3x + 2y + 7 = 0$
C. $2x - 3y + 5 = 0$ D. $2x - 3y + 8 = 0$

18. 执行如图所示的程序框图, 若输入 A 的值为 2, 则输出的 P 值为()
A. 2 B. 3
C. 4 D. 5



19. (上海会考真题) 已知扇形的圆心角为 $\frac{\pi}{3}$, 半径为 3, 该扇形的面积为()
A. 3π B. $\frac{3\pi}{2}$
C. π D. $\frac{\pi}{2}$

20. 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比是 $-\frac{1}{2}$, 前 n 项和是 S_n , 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a_1}$, 则 $a_1 =$ ()
A. $\pm\sqrt{3}$ B. $\pm\frac{3}{2}$ C. $\pm\sqrt{2}$ D. $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

21. 函数 $y = 2^x + x$ 的零点所在的区间是()
A. $(-1, -\frac{1}{2})$ B. $(-\frac{1}{2}, 0)$
C. $(0, \frac{1}{2})$ D. $(\frac{1}{2}, 1)$

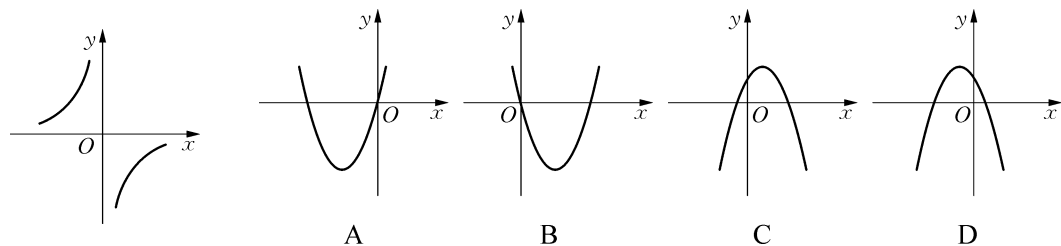
22. 已知 P 是抛物线 $y^2 = 2x$ 上的一个动点, 则点 P 到点 $(0, 2)$ 的距离与到该抛物线准线的距离之和的最小值为()

- A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ B. 3 C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{9}{2}$

23. 设 $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$, 试猜想一下 $S_n =$ ()

- A. $\frac{n(n+1)}{2}$ B. $[\frac{n(n+1)}{2}]^2$
C. $n(n+1)$ D. $[n(n+1)]^2$

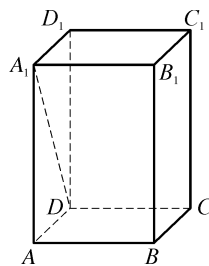
24. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像如图所示, 则函数 $y = 2kx^2 - 4x + k^2$ 的图像大致为()



三、解答题(本大题共 5 题, 满分 48 分)

25. (本题满分 7 分) 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, $\sin \theta$ 和 $\cos \theta$ 是方程 $x^2 - (\sin \theta + \cos \theta)x + \sin \theta \cdot \cos \theta = 0$ 的两根, $\theta \in (0, \pi)$, 求 $\cot \theta$ 的值.

26. (上海会考真题)(本题满分 7 分) 如图所示, 正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长为 2, 表面积为 32, 求异面直线 DA_1 与 B_1C_1 所成角的大小(结果用反三角函数值表示).



27. (本题满分 7 分) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = \frac{1}{3}$, 前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1} - S_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 以及前 n 项和 S_n .

28. (上海会考真题)(本题满分 13 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 B .

- (1) 若直线 FB 的一个方向向量为 $\left[1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 求实数 a 的值;
(2) 若 $a = \sqrt{2}$, 直线 $l: y = kx - 2$ 与椭圆 C 相交于 M, N 两点, 且 $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 3$, 求实数 k 的值.

29. (本题满分 14 分) 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + b}{2^{x+1} + a}$ 是奇函数.

- (1) 求 a, b 的值;
(2) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数;
(3) 若对任意的 $t \in \mathbf{R}$, 不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立, 求 k 的取值范围.

四、加试题(本题满分 20 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的两个焦点为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$, c^2 是 a^2 与 b^2 的等差中项, 其中

a, b, c 都是正数, 过点 $A(0, -b)$ 和 $B(a, 0)$ 的直线与原点的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

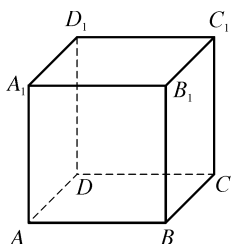
- (1) 求椭圆的方程;
(2) 点 P 是椭圆上一动点, 定点 $A_1(0, 2)$, 求 $\triangle F_1PA_1$ 面积的最大值;
(3) 已知定点 $E(-1, 0)$, 直线 $y = kx + t$ 与椭圆交于 C, D 相异两点. 证明: 对任意的 $t > 0$, 都存在实数 k , 使得以线段 CD 为直径的圆过 E 点.

模拟预测试卷六

(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- 已知集合 $A = \{x | |x| > 2\}$, $B = \{x | -3 < x < 1\}$, 则 $A \cup B =$ _____.
- 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 2$, 则 S_7 等于_____.
- (上海会考真题) 计算: $i(1+i) =$ _____ (i 为虚数单位).
- 已知 $\tan(\pi - \theta) = \frac{3}{4}$, $\theta \in (0, \pi)$, 则 $\cos \theta =$ _____.
- 不等式 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} > 0$ 的解为_____.
- 二项式 $(1-2x)^7$ 的展开式中, 含 x^3 项的系数为_____.
- 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_6 = S_3 = 12$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^2} =$ _____.
- 已知 $\triangle ABC$ 中, 若 $b=2$, $c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$, $B=60^\circ$, 则 $C =$ _____.
- (上海会考真题) 在如图所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 异面直线 A_1B 与 B_1C 所成角的大小为_____.
- 直线 $ax-2y+2=0$ 与直线 $x+(a-3)y+1=0$ 平行, 则实数 a 的值为_____.
- 已知 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上是增函数, 如果 $f(ax+1) \leq f(x-2)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
- (上海会考真题) 已知圆 $O_n: x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 与圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$. 设圆 O_n 与 y 轴正半轴的交点为 R_n , 圆 O_n 与圆 C 在 x 轴上方的交点为 Q_n , 直线 R_nQ_n 交 x 轴于点 P_n . 当 n 趋向于无穷大时, 点 P_n 无限趋近于定点 P , 定点 P 的横坐标为_____.



二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 16$, $a_4 = 8$, 则 $a_1 =$ ()
A. 64 B. 32 C. 4 D. 2
- 若直线 $l_1: x+ay=2a+2$ 与直线 $l_2: ax+y=a+1$ 不重合, 则 $l_1 \parallel l_2$ 的充要条件

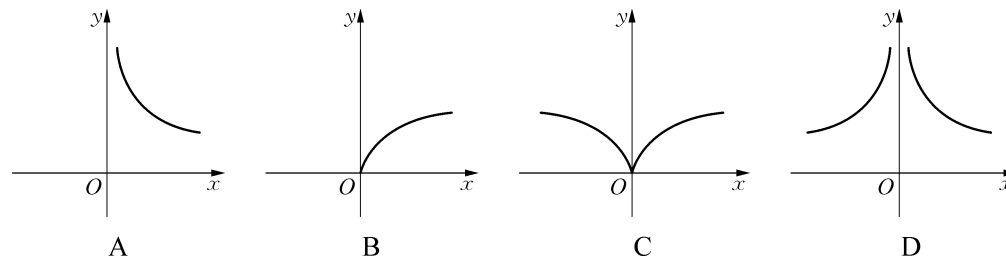
是()

- A. $a=-1$ B. $a=-\frac{1}{2}$ C. $a=1$ D. $a=1$ 或 $a=-1$

- 已知 $\sin(\frac{\pi}{4}-x) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin 2x$ 的值为()

- A. $\frac{19}{25}$ B. $\frac{16}{25}$ C. $\frac{14}{25}$ D. $\frac{7}{25}$

- (上海会考真题) 函数 $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 的大致图像是()



- 一条直线垂直于一个平面是这条直线垂直于这个平面上的两条直线()
A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件
C. 充要条件 D. 既非充分又非必要条件

- 某程序框图如图所示, 该程序运行后输出的 k 的值是()

- A. 4 B. 5
C. 6 D. 7

- 设 a 是实数, 且 $\frac{a}{1+i} + \frac{1+i}{2}$ 是实数, 则 $a =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1
C. $\frac{3}{2}$ D. 2

- 已知点 A 的坐标为 $(3, 2)$, F 为抛物线 $y^2 = 2x$ 的焦点. 若点 P 在抛物线上移动, 当 $|PA| + |PF|$ 取得最小值时, 则点 P 的坐标是()

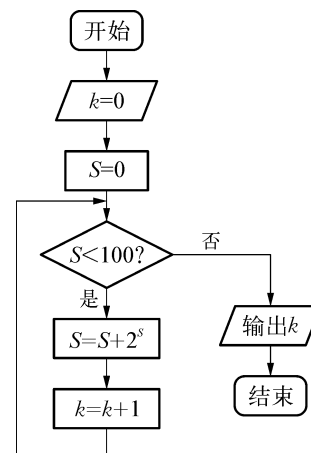
- A. $(1, \sqrt{2})$ B. $(2, 2)$ C. $(2, -2)$ D. $(3, \sqrt{6})$

- 已知向量 $a = (2, 3)$, $b = (-1, 2)$, 若 $ma + b$ 与 $a - 2b$ 平行, 则实数 $m =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

- 在 $\triangle ABC$ 中, 根据下列条件解三角形, 则其中有两个解的是()

- A. $b=10, A=45^\circ, B=70^\circ$ B. $a=60, c=48, B=100^\circ$



C. $a=7, b=5, A=80^\circ$

D. $a=14, b=16, A=45^\circ$

23. 若函数 $f(x)=x-\frac{p}{x}+\frac{p}{2}$ 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数, 则实数 p 的取值范围是()

- A. $[-1, +\infty)$ B. $[1, +\infty)$ C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, 1]$

24. 已知 $f(x)=\begin{cases} (3a-1)x+4a, & x<1 \\ \log_a x, & x\geq 1 \end{cases}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的减函数, 那么实数 a 的取值范围是()

- A. $(0, 1)$ B. $(0, \frac{1}{3})$ C. $[\frac{1}{7}, \frac{1}{3})$ D. $[\frac{1}{7}, 1)$

三、解答题(本大题共 5 题, 满分 48 分)

25. (本题满分 7 分) 若 $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$, 求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

26. (本题满分 7 分) 设复数 z_1 满足 $(1-i)z_1=1+3i$, $z_2=a-i(a \in \mathbf{R})$ (其中 i 为虚数单位). 若 $|z_1 - z_2| > \sqrt{2}|z_1|$, 求实数 a 的取值范围.

27. (上海会考真题)(本题满分 8 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = -n^2 + n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^{a_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$.

28. (本题满分 13 分) 设 $a \in \mathbf{R}$, 求函数 $f(x) = (4-3a)x^2 - 2x + a$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上的最大值.

29. (本题满分 13 分) 已知圆 $(x+2)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ 的圆心为 M , 圆 $(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ 的圆心为 N , 一动圆与这两个圆都外切.

(1) 求动圆圆心 P 的轨迹方程;

(2) 若过点 N 的直线 l 与(1)中所求轨迹 P 有两个交点 A, B , 求 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ 的取值范围.

四、加试题(本大题共 2 题, 满分 30 分)

1. (本题满分 14 分) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$, 直线 l 交于此抛物线不同的两个点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(1) 当直线 l 过点 $M(p, 0)$ 时, 证明 $y_1 \cdot y_2$ 为定值;

(2) 当 $y_1 y_2 = -p$ 时, 直线 l 是否过定点? 若过定点, 求出定点坐标; 若不过定点, 请说明理由;

(3) 如果直线 l 过点 $M(p, 0)$, 过点 M 再作一条与直线 l 垂直的直线 l' 交于抛物线 C 两个不同点 D, E . 设线段 AB 的中点为 P , 线段 DE 的中点为 Q , 记线段 PQ 的中点为 N . 问是否存在一条直线和一个定点, 使得点 N 到它们的距离相等? 若存在, 求出这条直线和这个定点; 若不存在, 请说明理由.

2. (本题满分 16 分) 若数列 $\{b_n\}$ 满足: 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $b_{n+2} - b_n = d$ (常数), 则称数列 $\{b_n\}$ 是公差为 d 的准等差数列. 如: 若 $c_n = \begin{cases} 4n-1, & (n=2k-1) \\ 4n+9, & (n=2k) \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$ 则 $\{c_n\}$ 是公差为 8 的准等差数列.

(1) 求上述准等差数列 $\{c_n\}$ 的前 9 项的和 T_9 ;

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a$, 对于 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $a_n + a_{n+1} = 2n$. 求证: $\{a_n\}$ 为准等差数列, 并求其通项公式;

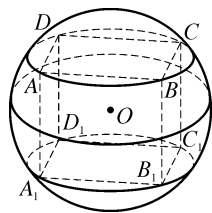
(3) 设(2)中的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 试研究: 是否存在实数 a , 使得数列 $\{S_n\}$ 有连续的两项都等于 50. 若存在, 请求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由.

模拟预测试卷七

(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

1. 已知集合 $A = \{x | |x| < 1\}$, $B = \{x | -2 < x < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.
2. 若 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 则 $x + y =$ _____.
3. 复数 z 满足 $z = \frac{2-i}{1-i}$, 则 z 的虚部等于 _____.
4. (上海会考真题) 若函数 $f(x) = x^3 + a$ 为奇函数, 则实数 $a =$ _____.
5. 已知 $\cos(\pi - \theta) = -\frac{4}{5}$, $\theta \in (0, \pi)$, 则 $\tan \theta =$ _____.
6. 首项为 -24 的等差数列 $\{a_n\}$ 从第 10 项开始为正数, 则公差 d 的取值范围是 _____.
7. 若函数 $f(x) = \frac{1}{2}x + b$ 的反函数为 $f^{-1}(x) = ax - 5$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
8. 如果把两条异面直线看成“一对”, 那么六棱锥的棱所在的 12 条直线中, 异面直线共有 _____ 对.
9. (上海会考真题) 从 4 名男同学和 6 名女同学中随机选取 3 人参加某社团活动, 选出的 3 人中男女同学都有的概率为 _____ (结果用数值表示).
10. 设抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 点 A 坐标为 $(0, 2)$. 若线段 FA 的中点 B 在抛物线上, 则 B 到该抛物线准线的距离为 _____.
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{4^n}} =$ _____.
12. 若多面体的各个顶点都在同一球面上, 则称这个多面体内接于球. 如图, 设长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内接于球 O , 且 $AB = BC = 2$, $AA_1 = 2\sqrt{2}$, 则 A, B 两点之间的球面距离为 _____.



二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

13. 满足 $\begin{vmatrix} \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha \end{vmatrix} = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in [0, \pi]$ 的 α 的值是 ()

A. $\frac{\pi}{12}$ B. $\frac{5\pi}{12}$ C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$

14. 已知 $f(x) = ax^2 + bx$ 是定义在 $[a-1, 2a]$ 上的偶函数, 那么 $a+b$ 的值为 ()

A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

15. “ $m < \frac{1}{4}$ ”是“一元二次方程 $x^2 + x + m = 0$ 有实数解”的 ()

A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件

16. (上海会考真题) 某校高一、高二、高三分别有学生 400 名、300 名、300 名. 为了解他们课外活动情况, 用分层抽样的方法从中抽取 50 名学生进行调查, 应抽取高二学生人数为 ()

A. 50 B. 30 C. 20 D. 15

17. (上海会考真题) 如果 $a < b < 0$, 那么下列不等式成立的是 ()

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $ab < b^2$
C. $-ab < -a^2$ D. $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$

18. 分别在两个平面内的两条直线间的位置关系是 ()

A. 异面 B. 相交
C. 平行 D. 以上都有可能

19. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = 15$, $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 78$, $S_n = 155$, 则 $n =$ ()

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

20. 若直线 $x - y = 2$ 被圆 $(x-a)^2 + y^2 = 4$ 所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则实数 a 的值为 ()

A. -1 或 $\sqrt{3}$ B. 1 或 3 C. -2 或 6 D. 0 或 4

21. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & x > 0 \\ 2^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{9}\right)\right) =$ ()

A. 4 B. $\frac{1}{4}$ C. -4 D. $-\frac{1}{4}$

22. 设 $f(x) = \lg\left(\frac{2}{1-x} + a\right)$ 是奇函数, 则使 $f(x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()

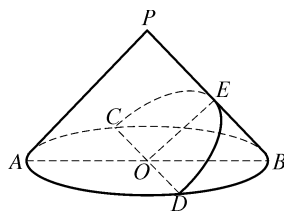
A. $(-1, 0)$ B. $(0, 1)$
C. $(-\infty, 0)$ D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

23. 若二项式 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和为 64, 则展开式的常数项为 ()

A. 10 B. 20 C. 30 D. 35

24. 如图,在底面半径和高均为1的圆锥中, AB 、 CD 是底面圆 O 的两条相互垂直的直径, E 是母线 PB 的中点.已知过 CD 与 E 的平面与圆锥侧面的交线是以 E 为顶点的抛物线的一部分,则该抛物线的焦点到圆锥顶点 P 的距离为()

- A. 1
B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$



三、解答题(本大题共5题,满分48分)

25. (本题满分7分)求函数 $y = \sin^4 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^4 x$ 的最小正周期和最小值,并写出该函数在 $[0, \pi]$ 上的单调递增区间.

26. (上海会考真题)(本题满分7分)已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + a$, $x \in [-3, 3]$.若 $f(1) = 2$,求 $y = f(x)$ 的最大值和最小值.

27. (本题满分7分)等比数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1 = 2$, $a_4 = 16$.

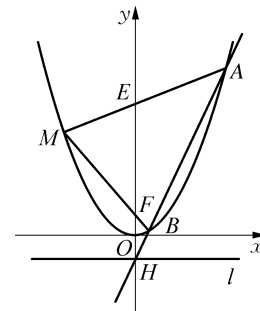
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(2) 若 a_3 , a_5 分别为等差数列 $\{b_n\}$ 的第3项和第5项,试求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式及前 n 项和是 S_n .

28. (本题满分13分)设 $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$, $g(x) = ax + 5 - 2a$ ($a > 0$).

- (1) 求 $f(x)$ 在 $x \in [0, 1]$ 上的值域;
(2) 若对于任意 $x_1 \in [0, 1]$,总存在 $x_0 \in [0, 1]$,使 $g(x_0) = f(x_1)$ 成立,求 a 的取值范围.

29. (本题满分14分)设抛物线 $C: y = x^2$, F 为焦点, l 为准线,准线 l 与 y 轴的交点为 H .

- (1) 求 $|FH|$;
(2) 设 M 是抛物线 C 上一点, $E(0, 4)$, 延长 ME , MF 分别交抛物线 C 于点 A , B .若 A , B , H 三共线,求点 M 的坐标.



四、加试题(本大题共2题,满分30分)

1. (本题满分14分)已知函数 $f(x) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ ($x > 0$) 的值域为集合 A ,

- (1) 若全集 $U = \mathbb{R}$,求 $C_U A$;
(2) 对任意 $x \in (0, \frac{1}{2}]$,不等式 $f(x) + a \geq 0$ 恒成立,求实数 a 的范围;
(3) 设 P 是函数 $f(x)$ 的图像上任意一点,过点 P 分别向直线 $y = x$ 和 y 轴作垂线,垂足分别为 A , B ,求 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的值.

2. (本题满分16分)设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,已知 $S_{n+1} = pS_n + q$ ($n \in \mathbb{N}^*$, p, q 为常数), $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_3 = q - 3p$.

- (1) 求 p, q 的值;
(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
(3) 是否存在正整数 m, n ,使得 $\frac{S_n - m}{S_{n+1} - m} < \frac{2^m}{2^m + 1}$ 成立?若存在,请求出所有符合条件的有序整数对 (m, n) ;若不存在,请说明理由.

模拟预测试卷八

(满分: 120 分 时间: 90 分钟)

一、填空题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- (上海会考真题) 已知集合 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, a\}$. 若 $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, 则 $a =$ _____.
- (上海会考真题) 方程 $2^x = 8$ 的解是_____.
- 函数 $y = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期是_____.
- 已知 $x > 0$, 函数 $y = 2 - x - \frac{4}{x}$ 的最大值是_____.
- 已知函数 $f(x) = \frac{x}{3-x}$, 则 $f^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) =$ _____.
- 把函数 $y = \sin 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 得到的函数解析式为 $y =$ _____.
- 等比数列 $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ 的通项公式为 $a_n =$ _____.
- 若定义在 $(-5, \log_2 a^2)$ 上的函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 则实数 $a =$ _____.
- (上海会考真题) 已知 $a, b \in \mathbf{R}^+$. 若 $a + b = 1$, 则 ab 的最大值是_____.
- 圆锥的底面积为 $16\pi \text{ cm}^2$, 高为 3 cm , 则圆锥的侧面积为_____ cm^2 .
- 椭圆两焦点为 $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, P 在椭圆上, 若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积的最大值为 12 , 则该椭圆的标准方程为_____.
- 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 - ax - 2 = 0$ 的两个实根, 若不等式 $|m - 3| > |x_1 - x_2|$ 对任意实数 $a \in [-1, 1]$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围为_____.

二、选择题(本大题共 12 题, 每题 3 分, 满分 36 分)

- 空间四个点中, 有三个点共线是这四个点共面的()
A. 充分但非必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分又非必要条件
- (上海会考真题) 函数 $f(x) = 2^x + 1$ 的反函数是()
A. $f^{-1}(x) = \log_2 x + 1$ B. $f^{-1}(x) = \log_2 x + 1$
C. $f^{-1}(x) = \log_2(x - 1)$ D. $f^{-1}(x) = \log_2 x - 1$

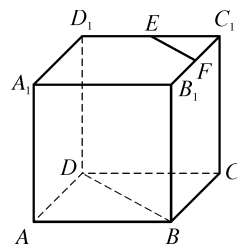
- 函数 $y = \sin^2 x - \cos^2 x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值为()
A. 1 B. 2 C. $-\sqrt{2}$ D. $\sqrt{2}$
- 若 $1 + \sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2 + bx + c = 0$ 的一个复数根, 则()
A. $b = 2, c = 3$ B. $b = -2, c = 3$
C. $b = -2, c = -1$ D. $b = 2, c = -1$
- 已知点 $P(3, m)$ 在以点 F 为焦点的抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 则 $|PF|$ 的长为()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
- (上海会考真题) 若复数 z_1, z_2 满足 $z_1 = \overline{z_2}$, 则 z_1, z_2 在复平面上对应的点 Z_1, Z_2 ()
A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称
- 下列函数既是奇函数, 又在区间 $[-1, 1]$ 上单调递减的是()
A. $f(x) = \sin x$ B. $f(x) = -|x + 1|$
C. $f(x) = \lg \frac{2-x}{2+x}$ D. $f(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$
- 已知一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n, c$ 是非零常数, 则对于数据 $x_1 - c, x_2 - c, \dots, x_n - c$, 以下说法正确的是()
A. 平均数与方差都不变 B. 平均数变了, 而方差不变
C. 平均数不变, 而方差变了 D. 平均数与方差都发生了变化
- 已知两定点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, $|F_1F_2|$ 且是 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 的等差中项, 则动点 P 的轨迹方程是()
A. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ B. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ D. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$
- 已知直线 $a \perp b$, 直线 $b \perp$ 平面 α , 则直线 a 与 α 的位置关系是()
A. $a \perp \alpha$ B. $a // \alpha$ C. $a \subset \alpha$ D. $a \subset \alpha$ 或 $a // \alpha$
- 已知函数 $f(x) = \frac{x}{1+|x|} (x \in \mathbf{R})$ 时, 则下列结论不正确的是()
A. 任意 $x \in \mathbf{R}$, 等式 $f(-x) + f(x) = 0$ 恒成立
B. 存在 $m \in (0, 1)$, 使得方程 $|f(x)| = m$ 有两个不等实数根
C. 对任意 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, 若 $x_1 \neq x_2$, 则一定有 $f(x_1) \neq f(x_2)$
D. 存在 $k \in (1, +\infty)$, 使得函数 $g(x) = f(x) - kx$ 在 $\mathbf{R}$ 上有三个零点
- 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{1}{3^n}(9^n - 3^n)$ 为(n 为正整数), 那么这个数列 $\{a_n\}$ ()
A. 既是等差, 又是等比数列 B. 既不是等差, 也不是等比数列
C. 是等差, 但不是等比数列 D. 是等比, 但不是等差数列

三、解答题(本大题共 5 题,满分 48 分)

25. (本题满分 7 分) 求函数 $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin 2x$ 的值域和最小正周期.

26. (本题满分 7 分) 如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F 分别是棱 D_1C_1, B_1C_1 的中点.

求证: $EF \parallel BD$, 且 $EF = \frac{1}{2}BD$.



27. (本题满分 7 分) 已知 $x, y \in \mathbf{R}^+$, 且 $2x+y=1$.

(1) 求 $4^x + 2^y$ 的最小值;

(2) 若 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq k$ 恒成立, 求实数 k 的取值范围.

28. (上海会考真题)(本题满分 13 分) 已知椭圆 C 的两个焦点分别为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$, 短轴的两个端点分别为 B_1, B_2 .

(1) 若 $\triangle F_1B_1B_2$ 为等边三角形, 求椭圆 C 的方程;

(2) 若椭圆 C 的短轴长为 2, 过点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 相交于 P, Q 两点, 且 $\overrightarrow{F_1P} \perp \overrightarrow{F_1Q}$, 求直线 l 的方程.

29. (本题满分 14 分) 已知函数 $f(x)$ 是函数 $y = \frac{2}{10^x + 1} - 1 (x \in \mathbf{R})$ 的反函数, 函数 $g(x)$ 的图

像与函数 $y = \frac{4-3x}{x-1}$ 的图像关于直线 $y=x-1$ 成轴对称图形, 记 $F(x) = f(x) + g(x)$.

(1) 求 $F(x)$ 的解析式及定义域;

(2) 试问在函数 $F(x)$ 的图像上是否存在这样两个不同点 A, B , 使直线 AB 恰好与 y 轴垂直? 若存在, 求出 A, B 两点的坐标; 若不存在, 说明理由.

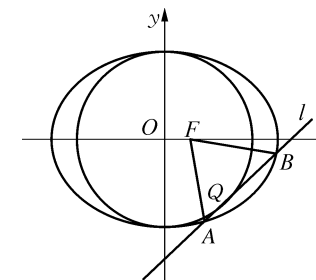
四、加试题(本大题共 2 题,满分 30 分)

1. (本题满分 14 分) 已知椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 右焦点为 F , 直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = 3$

相切于点 Q , 且 Q 在 y 轴的右侧, 设直线 l 交椭圆 E 于不同两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

(1) 若直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 求直线 l 的方程;

(2) 求证: $|AF| + |AQ| = |BF| + |BQ|$.



2. (本题满分 16 分) 已知函数 $f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域和值域;

(2) 设 $F(x) = \frac{a}{2} \cdot [f^2(x) - 2] + f(x)$ (a 为实数), 求 $F(x)$ 在 $a < 0$ 时的最大值 $g(a)$;

(3) 对(2)中 $g(a)$, 若 $-m^2 + 2tm + \sqrt{2} \leq g(a)$ 对 $a < 0$ 所有的实数 a 及 $t \in [-1, 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.