高等职业教育“十二五”规划教材

经济数学

JINGJI SHUXUE

下册

周光亚/主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

经 济 数 学

下册

主　编　周光亚

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书分上、下两册. 下册包括线性方程组及其应用、矩阵、概率与随机事件、数理统计初步.

本书针对经济类专业要求,将数学软件全面融入数学教学体系,强化数学认识和数学应用,笔算与机算相结合. 书中配有思考题,每节后有练习题和习题,每章后有自测题,便于教学. 本书图文并茂,通俗易懂,便于自学,可作为高职高专经济类专业的数学课程教学用书,也可作为相关人员学习数学的参考书.

图书在版编目(CIP) 数据

经济数学. 下册/周光亚主编. —天津: 天津大学出版社,2012. 9

高等职业教育“十二五”规划教材

ISBN 978 -7 -5618 -4396 -3

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 227964 号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编: 300072)
电　　话 发行部: 022 -27403647
网　　址 publish. tju. edu. cn
印　　刷 天津泰宇印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm ×260mm
印　　张 9. 25
字　　数 231 千
版　　次 2012 年 10 月第 1 版
印　　次 2012 年 10 月第 1 次
印　　数 1 -3 000
定　　价 25. 00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题,烦请向我社发行部门联系调换

版权所有　侵权必究

前　言

本书是根据教育部制订的高职高专教育高等数学课程教学基本要求，结合编者多年高职高专数学课程教学实践和改革的经验，同时借鉴国内外相关先进经验和优秀成果编写的高职高专经济类专业适用的数学教材.

一、本书的主要特点

1. 新颖的数学知识体系. 本书按照“以应用为目的”，“以必须够用为度”，“两个强化，一个结合”（强化数学认识，强化数学应用，笔算与机算相结合）的原则精心设计数学知识体系，主要创新点如下.

（*1*）由于高中数学已经讲过一元函数微分法，因此本书重新整合了一元和多元函数及其微分法知识体系，让大一新生不但有机会力所能及地学习应用中需要的多元函数微分法知识，而且有利于提高学习兴趣和效率.

（*2*）本书在曲线斜率、切线、导数和微分的意义，结合函数单调性和曲线凹凸性讨论函数变化规律、最优化问题等方面都有独特的观点或视角.

（*3*）对于应用中重要的规划问题，不讲冗繁的求解理论（如单纯形法），而是着重讨论建模过程，然后用数学软件方法求解，增强了应用性，同时降低了学习难度.

（*4*）线性代数采用全新的知识体系：首先结合机算完成线性方程组的相容性及求解方法的讨论，再以此为基础讨论其他线性代数问题，如线性相关性、向量方程与矩阵方程、线性变换、投入产出模型等；要求灵活运用线性方程组、向量方程、矩阵方程 *3* 种形式建立数学模型，并能互相转化求解；行列式被作为基于矩阵的一种运算规则，淡化它的计算技巧和传统应用，增加它的几何应用.

（*5*）结合经济应用，力求使概率论知识与中学数学有机衔接，并用机算方法突破传统的查表计算方法.

（*6*）在区间估计、假设检验、回归分析等数理统计方法中更多地引入机算，并将计算程序化，使其更加贴近现代社会的实际应用.

2. 独特的计算机辅助教学. 本书将数学软件作为教学辅助工具全面融入数学教学体系，并由此带来教学观念、教学内容和要求、教学方法的转变. 书中利用数学软件描绘函数图形帮助进行数学认识和分析问题，并形成一种有效的数学分析方法；计算被理解为笔算与机算相结合，从应用出发，侧重掌握基本计算规则和方法，减少传统计算内容，如洛必达法则、分部积分法等，降低笔算要求，增加机算要求；讨论更多实际和有用（可能笔算难以讨论）的问题；开展数学

实验,教、学、做相结合,尝试探究性学习方式,培养学生的创造能力. 本书采用数学软件 *Mathcad*,它更加易学易用,便于交流.

3. 通俗性、专业针对性与科学性的有机结合. 本书深入浅出,通俗易懂,符合高职高专学生认知水平和能力;具有较强的经济类专业针对性,将数学知识和方法与经济应用案例有机结合,并有相对深入的经济数学问题的专题讨论,旨在培养学生应用数学的意识和初步能力;同时尊重数学的科学性和系统性,注重数学课程在提高学生的科学文化素养、培养学生严谨的治学态度和认真踏实的工作作风方面的作用.

4. 教材立体化的新尝试. 我们正在开发与本书配套的课程教学资源(包括《课程教学质量标准》、《课程教学大纲》、《课程授课计划》、《课程教学方案》、《课程学习指南》、《课程学习记录》、*ppt* 电子教案、自主阅读材料、数学实验方案、习题集、自测系统和考试系统等),将在以后陆续出版或提供交流.

二、给学生的建议

1. 乐于学习数学. 相信数学学习对于你是极其重要、终身受用的,即使你可能感到所学的数学知识在你的专业课程或工作岗位中出现不多. 数学学习将很好地培养你的科学思维能力和习惯、提高你的科学文化素养,这些对于你的可持续发展是必不可少的,并且数学的应用本来是极其广泛的,只是你需要学会怎样去应用.

2. 课堂上保持与教师同步. 无论你的实际程度是超前还是暂时落后,都应优先做好本堂课应做的一切,充分利用课堂这一最为宝贵的资源.

3. 充分认识自学的重要性. 自学习惯和能力是在大学学习期间需要重点培养的. 自学是大学学习的重要环节. 在听课和完成作业之外,还应有大量时间读书和查阅资料. 我们在书中所编写的内容可能超过你的老师对你的要求. 你应当保证这些要求但也不要拘泥于这些要求;另一方面,多与老师和同学交流、讨论问题.

4. 多动手. 你最好在听课或读书的同时,亲自在练习本或草稿纸上动手演算,这可能会收到事半功倍的效果. 手脑并用是数学学习特别需要的学习方法. 有条件时,最好多做一些上机实验题(通常在这些题的序号后标有“*M*)”字样).

5. 认真对待作业. 尽量充分地做好准备以后再做习题,力求在做每一道题后都有新的收获. 习题解答应做到过程完整、理由充分、表述清楚、书写工整,养成严谨负责的工作作风和习惯. 每学完一个单元,最好做一个简短的小结.

三、写给教师的话

1. 关于数学软件 *Mathcad* 的使用. 本书采用的数学软件为 *Mathcad 2001*

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

和 *Mathcad 14*，两种版本各有优缺点．与本书配套的 *ppt* 电子教案中包括 *Mathcad* 例题和数学实验的链接，前者为教师进行 *Mathcad* 课堂演示提供参考，后者用于学生集中上机练习．

2. 关于练习题、习题和复习题．本书尽可能使编排的章节与教学单元相对应，以便编制授课计划．本书每一节后编排一组练习题和习题．其中练习题主要用于课堂练习，并作为习题的热身．习题主要用作课外作业．每一章后编排一组自测题，主要用于对本章的复习、小结和检验，也可用于期末复习．

3. 关于学时安排的建议．本书建议分两个学期使用，第一学期使用上册，*64* 学时，第二学期使用下册，*64* 学时或 *48* 学时；也可根据本校实际在两册书中选择部分章节在一学期内使用．加* 号的章节或段落为选学内容，可根据计划教学时数适当取舍．

四、关于作者

参与编写本书的有周光亚、何祖国、卢传明和欧阳菊，其中周光亚为主编，卢传明和欧阳菊为副主编．教育部高等学校教学指导委员会委员李以渝教授和四川工程职业技术学院徐诗勤副院长担任本书的主审．学院各级领导，特别是基础部邹毓文主任、经管系曾国勋主任对本书的编写以及相关的教学改革给予了支持、指导和帮助．天津大学出版社的领导和编辑们以其专业、严谨的工作，使本书增色不少！在此一并表示感谢！

因作者水平有限，加之时间仓促，书中难免存在疏漏或错误，敬请读者指正．

编　者

2012 年夏

目　　录

第 6 章　线性方程组及其应用 …… 1
6.1　线性方程组 …… 1
习题 6.1 …… 8
6.2　向量与向量方程 …… 10
习题 6.2 …… 18
6.3　线性方程组的应用 …… 19
习题 6.3 …… 22
第 6 章自测题 …… 23
第 7 章　矩阵 …… 25
7.1　矩阵运算 …… 25
习题 7.1 …… 30
7.2　转置矩阵与矩阵方程 …… 31
习题 7.2 …… 34
* 7.3　矩阵变换与线性变换 …… 34
* 习题 7.3 …… 39
7.4　矩阵的逆与矩阵的秩 …… 40
习题 7.4 …… 46
7.5　方阵的行列式 …… 48
习题 7.5 …… 53
* 7.6　投入产出模型 …… 55
* 习题 7.6 …… 57
第 7 章自测题 …… 58
第 8 章　概率与随机变量 …… 62
8.1　随机事件及其概率 …… 62
习题 8.1 …… 68
8.2　离散型随机变量 …… 69
习题 8.2 …… 73
8.3　连续型随机变量 …… 74
习题 8.3 …… 79
8.4　随机变量的数字特征 …… 80
习题 8.4 …… 86
8.5　n 维随机向量 …… 87
第 8 章自测题 …… 87
第 9 章　数理统计初步 …… 90
9.1　抽样分布 …… 90
习题 9.1 …… 93

9.2　参数估计 …… 94
习题 9.2 …… 97
* 9.3　假设检验 …… 98
* 习题 9.3 …… 101
9.4　回归分析 …… 102
习题 9.4 …… 107
第 9 章自测题 …… 108
附录　Mathcad 入门 …… 109
附表 1　Mathcad 常用运算符 …… 125
附表 2　标准正态分布表 …… 127
附表 3　*t* 分布表 …… 129
习题参考答案 …… 131
参考文献 …… 139

第 6 章　线性方程组及其应用

在中学已经讨论过二元和三元线性方程组．在工程技术或经济管理中，可能需要讨论包含数目巨大的未知量和方程的线性方程组．例如一个管理决策的线性规划模型常常包含成百上千个未知量的线性方程或不等式．工程师们在设计飞机外表时，要研究飞机表面的气流的过程，这需要反复求解大型的线性方程组，这些方程组涉及的方程和未知量的个数可能达到数百万个．本章将用矩阵的方法讨论线性方程组以及它们在经济管理中的一些应用．

6.1　线性方程组

6.1.1　线性方程组及其相容性

一般线性方程组为形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

的方程组，称为 **n 元线性方程组**．它由包含 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 个方程组成．m, n 可以是任意正整数；在本书的例题或习题中，n 一般在 2 ~ 5 之间．在实际问题中，n 可能是数十、数千或更大．

系数矩阵和增广矩阵　显然，线性方程组(1)是否有解，解是什么，完全取决于未知量的系数 a_{ij} 和常数项 b_i($i = 1, 2, \cdots, m, j = 1, 2, \cdots, n$)，与未知量用什么字母表示无关．$a_{ij}$ 按原来的顺序排成的一个称为**矩阵**的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为方程组(1)的**系数矩阵**．将各方程右边的常数 b_i($i = 1, 2, \cdots, m$) 排成一个竖排添加在系数矩阵右边形成一个矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组(1)的**增广矩阵**．增广矩阵包含了线性方程组的全部必要信息．

例如，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases} \tag{2}$$

的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \text{ 和 } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}.$$

矩阵的横排称为**行**,竖排称为**列**. 构成矩阵的每一个数称为矩阵的**元素**. 方程组(2)的增广矩阵的元素排成了3行4列,这一矩阵称为3×4(读作3行4列)矩阵. 一般地,由 m 行 n 列数构成一个 $m \times n$ 矩阵(m 和 n 是正整数). 矩阵还常用黑体大写字母,如 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 等来表示. 还可用下标给出矩阵的行数和列数以突出它们,如一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可写成 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$. 一个 $n \times n$ 矩阵称为 n 阶**方阵**,可记作 $\boldsymbol{A}_n$. 例如,方程组(2)的系数矩阵是一个3阶方阵. 利用矩阵可以为解线性方程组带来方便.

线性方程组的相容性 线性方程组**相容**(不相容)是指方程组有解(无解). 由两条直线的3种可能的位置关系(平行、相交、重合),可知二元线性方程组的相容性包括无解、有唯一解和有无穷多解3种可能情形. 这一结论对于一般线性方程组也是适用的.

6.1.2 矩阵的初等行变换

中学数学讲过用加减消元法解二元或三元线性方程组,方法是把原方程组化为与之同解(也称**等价**)的一个更容易求解的线性方程组. 消元时总是对线性方程组进行下面3种基本(同解)变换之一:把某一个方程换成它与另一个方程的倍数的和;交换两个方程的位置;把某一个方程的所有项乘以一个非零常数. 下面以此为基础讨论线性方程组的一般解法.

例1 用加减消元法解线性方程组(2),并将求解过程同时用方程组和相应的增广矩阵表示.

解 方程组(2)及其增广矩阵如下:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix}$$

将第三个方程换成它与第一个方程的4倍的和,消去 x_1:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -3x_2 + 13x_3 = -9. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

将第二个方程各项乘以 $\frac{1}{2}$,将 x_2 的系数变为1:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - 4x_3 = 4, \\ -3x_2 + 13x_3 = -9. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

将第一(三)个方程换成它与第二个方程的 2(3)倍的和,消去 x_2:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_3 = 8, \\ x_2 - 4x_3 = 4, \\ x_3 = 3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

将第一(二)个方程换成它与第三个方程的 7(4)倍的和,消去 x_3:

$$\begin{cases} x_1 = 29, \\ x_2 = 16, \\ x_3 = 3. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

最后一个方程组有唯一解 $x_1 = 29, x_2 = 16, x_3 = 3$(可简写为(29,16,3)). 由于上述变换是同解变换,因此原方程组的解是(29,16,3) .

矩阵的初等行变换　从例 1 容易看出,对线性方程组进行的 3 种基本变换对应于增广矩阵的下列 3 种变换:

(1) 把某一行换成它本身与另一行的倍数的和. 这称为**倍加变换**;

(2) 把两行对换. 这称为**对换变换**;

(3) 把某一行的所有元素乘以同一个非零数. 这称为**倍乘变换**.

这 3 种变换统称为矩阵的**初等行变换**.

在本书中将用下列记号表示矩阵的初等行变换.

(1) $r_i + kr_j$: 把第 i 行换成它本身与第 j 行的 k 倍的和.

(2) $r_i \leftrightarrow r_j$: 对换第 i 行与第 j 行.

(3) $k \cdot r_i$: 把第 i 行 k 倍.

例 2　写出例 1 中对线性方程组进行的各基本变换所对应的矩阵的初等行变换.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/2)\, r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + 3r_2]{r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 + 4r_3]{r_1 + 7r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

矩阵的初等行变换都是可逆的. 事实上,$r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆变换就是它自己; $k \cdot r_i$ 的逆变换是 $(1/k) \cdot r_i$; $r_i + kr_j$ 的逆变换是 $r_i + (-k)\, r_j$.

矩阵(行) 等价　容易知道,如果两个线性方程组的增广矩阵中的一个是另一个通过初等行变换得到的,则两个线性方程组是等价的.

如果矩阵 A, B 中一个是另一个通过初等行变换得到的,则称矩阵 A 与 B 是**(行) 等价的**.

6.1.3　阶梯形矩阵

例 2 实际上给出了例 1 的一种解法: 将增广矩阵进行一系列初等行变换,化成矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

从而得到原方程组的解. 那么最后这个矩阵是一个怎样的矩阵?

阶梯形矩阵 满足下列条件的矩阵称为**(行)阶梯形矩阵**:

(1) 非零行(即元素不全为0的行)总是在零行(即元素全为0的行)的上方;

(2) 每一非零行的首个非零元素(称为**先导元素**)位于上一非零行的先导元素的右侧.

简化阶梯形矩阵 如果一个(行)阶梯形矩阵还满足下列性质:

(3) 每个先导元素都是1;

(4) 每个先导元素1是该元素所在列的唯一非零元素.

则称它为**简化(行)阶梯形矩阵**.

如例2中的矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -7 & 8\\ 0 & 1 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 29\\ 0 & 1 & 0 & 16\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

都是阶梯形矩阵,其中后一个矩阵是简化阶梯形矩阵.

矩阵 A 的(简化)阶梯形 可以证明,一个矩阵总有与之等价的阶梯形矩阵,并且可有多个不同的等价的阶梯形矩阵. 但一个矩阵只有唯一的与之等价的简化阶梯形矩阵. 与矩阵 A(行)等价的阶梯形矩阵 B 称为 A **的(行)阶梯形**;如果 B 还是简化阶梯形矩阵,就说 B 是 A **的简化(行)阶梯形**,记作 $B=\mathrm{rref}(A)$.

思考 在例2的各个矩阵中,哪些矩阵是哪些矩阵的(简化)阶梯形?

6.1.4 高斯消元法

由上面的讨论可知,可以通过将增广矩阵化为它的(简化)阶梯形解线性方程组,这种方法称为**高斯消元法**.

例3(有唯一解) 用高斯消元法解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+9x_3=7,\\ x_1-3x_3=8,\\ x_2+5x_3=-2.\end{cases}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 9 & 7\\ 1 & 0 & -3 & 8\\ 0 & 1 & 5 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 8\\ 2 & 2 & 9 & 7\\ 0 & 1 & 5 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 8\\ 0 & 2 & 15 & -9\\ 0 & 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 8\\ 0 & 1 & 5 & -2\\ 0 & 2 & 15 & -9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+(-2)r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 8\\ 0 & 1 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 5 & -5\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(1/5)r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & -3 & 8\\ 0 & 1 & 5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+(-5)r_3]{r_1+3r_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\mathrm{rref}(A),$$

显然 $\mathrm{rref}(A)$(的最后一列)已给出原方程组的解,即原方程组有唯一解$(5,3,-1)$.

线性方程组的通解 高斯消元法同样可用于线性方程组有无穷多解的情形.

例如,设已经把某一线性方程组的增广矩阵 A 化为它的简化阶梯形

$$\mathrm{rref}(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&0&-7&8\\0&1&-4&3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

写出 rref($\boldsymbol{A}$) 对应的线性方程组

$$\begin{cases}x_1-7x_3=8,\\x_2-4x_3=3.\end{cases}$$

将含有 x_3 的项移到等式右边,得

$$\begin{cases}x_1=7x_3+8,\\x_2=4x_3+3.\end{cases}\tag{3}$$

显然当 x_3 任取一个值时,都可由(3) 式得到原方程组的一个解,因此原方程组有无穷多解. (3) 式称为原方程组的**通解**. 为了便于将通解表示为别的形式,常把这个通解写成

$$\begin{cases}x_1=7x_3+8,\\x_2=4x_3+3,\\x_3=x_3.\end{cases}$$

像 x_3 这样可任意取值的未知量称为**自由未知量**,而像 x_1,x_2 这样其值确定或需由自由未知量的值确定的未知量称为**基本未知量**. 容易看出,相容的线性方程组有无穷多解的充要条件是它含有自由未知量.

那么怎样寻找自由未知量呢? 一般是先确定基本未知量,再确定自由未知量. 具体做法是: 将增广矩阵化为它的阶梯形,找到先导元素,先导元素所对应的未知量就是基本未知量. 如果全部未知量中除了基本未知量还有别的未知量,则它们就是自由未知量,否则就没有自由未知量.

思考　怎样根据增广矩阵的阶梯形中先导元素个数和矩阵列数判断是否存在自由未知量?

例 4(有无穷多解)　解线性方程组,该方程组的增广矩阵已经化为

$$\begin{pmatrix}1&6&2&-5&-2&-4\\0&0&2&-8&-1&3\\0&0&0&0&1&7\end{pmatrix}.$$

解　该矩阵已经是阶梯形矩阵,下面进一步将它化为简化阶梯形矩阵.

$$\begin{pmatrix}1&6&2&-5&-2&-4\\0&0&2&-8&-1&3\\0&0&0&0&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&6&0&3&-1&-7\\0&0&2&-8&-1&3\\0&0&0&0&1&7\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&6&0&3&0&0\\0&0&2&-8&0&10\\0&0&0&0&1&7\end{pmatrix}\xrightarrow{(1/2)r_2}\begin{pmatrix}1&6&0&3&0&0\\0&0&1&-4&0&5\\0&0&0&0&1&7\end{pmatrix}.$$

简化阶梯形矩阵对应的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1+6x_2+3x_4=0,\\x_3-4x_4=5,\\x_5=7.\end{cases}$$

基本未知量为 x_1,x_3,x_5,于是 x_2 和 x_4 为自由未知量. 因此线性方程组可能有无穷多解.

将含有自由未知量的项移到等式右边,解出基本未知量,即得通解为

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4, \\ x_2 = x_2, \\ x_3 = 4x_4 + 5, \\ x_4 = x_4, \\ x_5 = 7. \end{cases}$$

例 5(无解) 解线性方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 = 8. \end{cases}$$

解 先将方程组的增广矩 A 阵化为它的阶梯形

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + (-1) r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 3 & -1 & 2 & 10 \\ 11 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 + (-11) r_1]{r_2 + (-3) r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & -30 & 33 & 96 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + (-3) r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & -8 \\ 0 & -10 & 11 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

A 的阶梯形的最后一行$(0 \quad 0 \quad 0 \quad -6)$所对应的方程为

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -6.$$

显然这个方程无解,因此原方程组无解.

一般地,如果一个线性方程组的增广矩阵或与之等价的矩阵含有形如$(0 \quad \cdots \quad 0 \quad b)(b \neq 0)$的行,则方程组无解. 反过来,如果一个线性方程组无解,虽然它的增广矩阵 A 不一定含有形如$(0 \quad \cdots \quad 0 \quad b)(b \neq 0)$的行,但 A 的阶梯形一定含有这样的行.

从上面的讨论,可以归纳出关于线性方程组的相容性的结论,如下面的定理所述:

定理(解的存在性与唯一性定理) 线性方程组相容的充要条件是它的增广矩阵的阶梯形没有形如

$$(0 \quad \cdots \quad 0 \quad b)(b \neq 0)$$

的行. 当线性方程组相容时,如果没有自由未知量,则有唯一解;如果至少有一个自由未知量,则有无穷多解.

思考

(1) 增广矩阵含有形如$(0 \quad \cdots \quad 0 \quad b)(b \neq 0)$的行是线性方程组无解的什么条件?

(2) 线性方程组含有自由未知量是有无穷多解的什么条件?

由例 3 至例 5,可归纳出用高斯消元法解线性方程组的一般步骤如下.

(1) 写出线性方程组的增广矩阵 A.

(2) 将 A 为它的阶梯形. 如果该矩阵含有形如$(0 \quad \cdots \quad 0 \quad b)(b \neq 0)$的行,则原方程组无解,工作结束;否则原方程组有解,进行下面的步骤求解.

(3) 继续把 A 化为它的简化阶梯形 rref(A). 如果无自由未知量,则由 rref(A)(的最后

一列) 得到原方程组的唯一解; 否则进行下一步.

(4) 写出 rref(A) 对应的线性方程组.

(5) 将含有自由未知量的项移到等式右边,写出原方程组的通解.

2. 齐次线性方程组

在线性方程组中,如果常数项全为 0,即方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{4}$$

则称方程组(4) 是**齐次线性方程组**. 显然方程组(4) 至少有一个解(0,0,…,0). 这个解称为方程组(4) 的**零解**(或称**平凡解**). 通常关注的是方程组(4) 是否有**非零解**(或称**非平凡解**).

显然,齐次线性方程组有非零解的充要条件是它至少有一个自由未知量.

例 6　判断下面的齐次线性方程组是否有非零解,如果有,给出它的通解.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 0, \\ -3x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

解　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 + 4r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

可见 A 的阶梯形中有两个先导元素,对应的 x_1,x_2 是基本未知量,而 x_3 是自由未知量,因此方程组有无穷多解,即有非零解. 为了求出通解,继续将矩阵化为 A 的简化阶梯形:

$$\xrightarrow{(1/3)\,r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 + (-3)\,r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rref}(A),$$

rref(A) 对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

原方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = 5x_3, \\ x_2 = -2x_3, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

6.1.5　用 Mathcad 计算矩阵的简化阶梯形

在实际应用中,解线性方程组的计算通常需用计算机进行. 根据高斯消元法,解线性方程组的关键是求出增广矩阵的简化阶梯形. 可用 Mathcad 按下列步骤计算矩阵 A 的简化阶梯形 rref(A) : ① 定义矩阵 A; ② 输入 rref(A) =.

下面是用 Mathcad 计算本节例 3、例 4、例 5 中的增广矩阵的简化阶梯形的情形:

例 3

$$A:=\begin{pmatrix}2&2&9&7\\1&0&-3&8\\0&1&5&-2\end{pmatrix}\qquad \mathrm{rref}(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&3\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

例 4

$$A:=\begin{pmatrix}1&6&2&-5&-2&-4\\0&0&2&-8&-1&3\\0&0&0&0&1&7\end{pmatrix}\qquad \mathrm{rref}(A)=\begin{pmatrix}1&6&0&3&0&0\\0&0&1&-4&0&5\\0&0&0&0&1&7\end{pmatrix}$$

例 5

$$A:=\begin{pmatrix}4&2&-1&2\\3&-1&2&10\\11&3&0&8\end{pmatrix}\qquad \mathrm{rref}(A)=\begin{pmatrix}1&0&0.3&0\\0&1&-1.1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

练 习 题

1. 写出线性方程组 $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3-x_4=7,\\-x_1+x_3-2x_4=-3,\\3x_2-4x_3+5x_4=2\end{cases}$ 的系数矩阵和增广矩阵.

2. 指出下列矩阵中,哪些是阶梯形矩阵,其中哪些是简化阶梯形矩阵:

(1) $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&2&0\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$;

(4) $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$; (5) $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{pmatrix}$; (6) $\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

3. 求出以矩阵 $\begin{pmatrix}1&-3&-2&0\\0&1&1&2\end{pmatrix}$ 为增广矩阵的线性方程组的解.

4. 判断以下列矩阵为增广矩阵的线性方程组是否相容; 如果相容,求出它的解.

(1) $\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&3\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&2&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix}$; (3) $\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&2&1&0\\0&6&3&0\end{pmatrix}$.

习 题 6.1

1. 将下列矩阵化为它的简化阶梯形,在最终的矩阵中圈出先导元素:

(1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&5&6&7\\6&7&8&9\end{pmatrix}$; (2) $\begin{pmatrix}1&-1&2&5\\3&2&-4&0\\-2&0&1&-3\end{pmatrix}$.

2. 判断以下列矩阵为增广矩阵(其中 × 是非零实数,* 是任意实数) 的线性方程组是否相容. 如果相容,判断解是否唯一.

(1) $\begin{pmatrix} \times & * & * \\ 0 & \times & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} \times & * & * & * \\ 0 & \times & * & * \\ 0 & 0 & \times & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & \times & * & * & * \\ 0 & 0 & \times & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} \times & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \times & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \times & * \end{pmatrix}$.

3. 解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ -2x_1 + x_2 = 3; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 1, \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 3. \end{cases}$

4. 以下每个矩阵等价于一个线性方程组的增广矩阵,判断线性方程组的相容性,如果相容,求出方程组的解集:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

5. 求以下列矩阵为增广矩阵的线性方程组的通解:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 0 & 10 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$;　　(4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}$;

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 1 & -29 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;　　(6) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 \\ -1 & 7 & -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

6. 3 条直线 $3x - y - 5 = 0$, $x + 2y + 3 = 0$ 和 $4x + 3y + 2 = 0$ 是否相交于一点?

7. 方程个数少于未知量个数的线性方程组称为**欠定方程组**. 设一个欠定方程组是相容的,说明它为什么会有无穷多解.

8. 给出一个含有 3 个未知量和 2 个方程的不相容的欠定方程组的例子.

9. 方程个数多于未知量个数的线性方程组称为**超定方程组**. 超定方程组是否可能相容? 用一个含 2 个未知量,3 个方程的方程组说明你的结论.

10. (M) 构造一个 5 × 6 矩阵 A,其元素为 0 ~ 9 的随机整数,并求 rref(A) (提示: 矩阵 A 可如下定义: $i := 0..4$　$j := 0..5$　$A_{i,j} := \text{round}(\text{rnd}(9))$) .

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com