广西成人高等教育系列教材
公 共 基 础 课

高等数学

GAODENG SHUXUE

主 编 唐春明

广西人民出版社

广西成人高等教育系列教材·公共基础课

高等数学

主编　唐春明

广西人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 唐春明主编. —南宁：广西人民出版社，2014. 7

广西成人高等教育系列教材·公共基础课

ISBN 978-7-219-09005-3

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①唐… Ⅲ. ①高等数学—成人高等教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第152445号

责任编辑 严　颖　罗　雯
特约编辑 潘珊珊
责任校对 刘美杏　尹江华　杨振平　陈　倩　卢春婷

出版发行 广西人民出版社
社　　址 广西南宁市桂春路6号
邮　　编 530028
印　　刷 南宁市桂川印务有限责任公司
开　　本 787mm×1092mm　1/16
印　　张 11
字　　数 227千字
版　　次 2014年7月　第1版
印　　次 2014年7月　第1次印刷

书　　号 ISBN 978-7-219-09005-3/O·16
定　　价 36.00元

前　言

高等数学是高等教育中的一门重要基础课程，不仅能培养学生的计算能力、逻辑推理能力、抽象思维能力和应用知识能力，而且为后继课程的学习奠定了必要的数学基础.

本书在吸取国内同类教材优点的基础上，根据成人高等教育、高职高专教育的培养目标编写，适当减少了理论知识，注重数学思想与方法的培养，强调数学知识的应用．书中基本概念和原理的讲解通俗易懂，突出直观描述和几何解释，淡化理论证明和推导，降低了学生掌握同等程度知识的难度，同时也兼顾了数学的科学性和严谨性，以及保证了数学基本技能和技巧叙述的准确性和清晰性．本书顺应了成人高等教育、高职高专教育的改革和发展，适合作为成人高等教育院校、高职高专院校及同等层次的其他院校教材.

全书共分八章，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学和二重积分．书中每节后配有练习题，围绕本节知识内容进行学习和训练，每章后配有综合练习，供学有余力的学生进一步提高数学水平选用，书末附有习题答案与提示供读者参考.

本教材在编写过程中得到了作者团队硕士研究生的鼎力相助. 其中，潘珊珊、张玉凤、谢琴、黄仁帅等协助完成本教材的编写、排版，以及校对工作；刘美杏对全书作了认真的校对；尹江华、杨振平、陈倩、卢春婷等分别对本教材的部分章节作了认真的校对. 在此对他们的工作表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中难免有疏漏之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2014 年 7 月

目　　录

第 1 章　函数

函数是高等数学的主要研究对象,它反映了各种变量之间的相互依存关系. 本章将介绍函数的概念及基本性质、反函数、复合函数和初等函数,为下面章节的学习奠定基础.

1.1　函数的概念

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是数学中最为基本的概念之一,众多对象的研究都不可避免地用到集合. 一般地,具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**. 集合通常用大写字母表示,如 A,B,M,N 等. 例如,全体自然数构成一个集合,某校数学系 2013 级的全体同学构成一个集合等.

组成一个集合的事物称为该集合的**元素**. 元素通常用小写字母表示,如 a,b,m,n 等. 如果事物 a 是集合 M 的元素,记作 $a\in M$(读作 a 属于 M);否则记作 $a\notin M$(读作 a 不属于 M).

一个集合,若其元素的个数是有限的,则称为**有限集**;否则称为**无限集**.

集合的表示方法通常有列举法和描述法两种.

(1) **列举法**. 把集合的全体元素一一列举出来.

例如,自然数集 $N=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$;

正整数集 $N^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$;

整数集 $Z=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

(2) **描述法**. 若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,则可表示为

$$M=\{x\mid x\text{具有性质 }P\}.$$

例如,有理数集 $Q=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in Z,q\in N^+,\text{且 }p,q\text{ 互质}\right\}$;

实数集 $R=\{x\mid x\text{为有理数或者无理数}\}$.

设 A、B 是两个集合,如果 A 的元素都是 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或者 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

如果 A 与 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B **相等**,记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的**真子集**.

不含任何元素的集合称为**空集**,记作$\varnothing$.

例如,$\{x \mid x \in R$ 且 $x^2+1=0\}$ 是空集.

规定空集是任何集合的子集.

2. 集合的运算

类似于数的运算,集合之间也有其特定的运算,下面介绍几种集合的基本运算:并、交、差和补集.

设 A、B 是两个集合,由集合 A 与 B 中所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**并集**(简称**并**),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\};$$

由集合 A 与 B 的公共元素构成的集合称为 A 与 B 的**交集**(简称**交**),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\};$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的**差集**(简称**差**),记作 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}.$$

当研究某个问题限定在一个大的集合 U 中进行时,所研究的其他集合 A 都是 U 的子集,此时称 U 为**全集**,称 $U\backslash A$ 为 A 的**余集**或**补集**,记作 A^C.

显然 $A\cup A^C=U$,$A\cap A^C=\varnothing$,$A^C\subset U$.

集合的并、交、差和补集可分别直观地用图 1-1-1(a)、(b)、(c)和(d)的阴影部分表示.

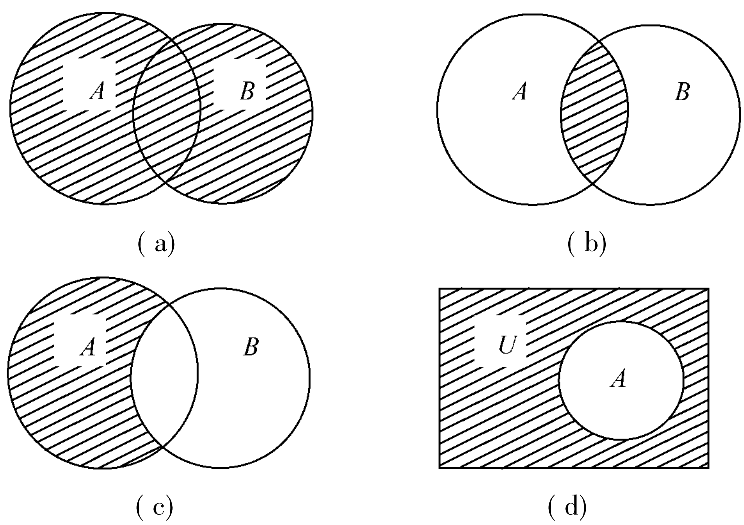

图 1-1-1

例 1.1.1 设$A=\{x \mid -1<x<2\}$,$B=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,则

$$A\cup B=\{x \mid -1<x\leqslant 3\},\ A\cap B=\{x \mid 1\leqslant x<2\}.$$

例 1.1.2 若 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{3,4,5,6\}$,则

$$A\backslash B=\{1,2\},\ B\backslash A=\{5,6\}.$$

集合的运算满足以下几个运算律.

设 A、B、C 为任意三个集合,则有以下运算律成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 区间与邻域

区间是一类常用的数集,用来表示一个变量的变化范围. 设 a 和 b 均为实数,且 $a<b$,数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 称为**开区间**,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的**端点**.

数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记为 $[a,b]$,即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似地,可定义**半开区间**,即

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间称为有限区间,区间长度均为 $b-a$,在数轴上这些区间都是长度有限的线段,如图 1-1-2 所示.

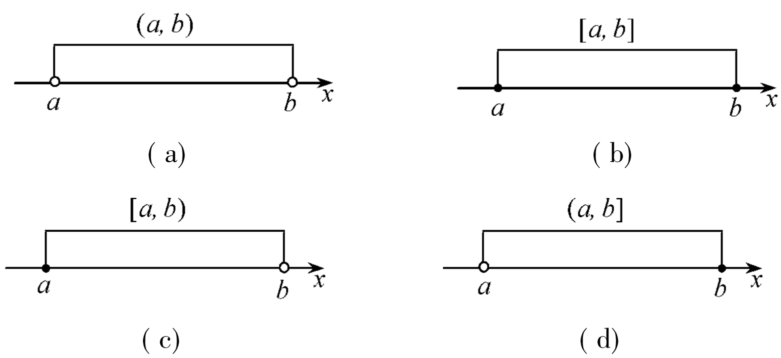

图 1-1-2

通过引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),可类似表示无限区间:

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\},(-\infty,b)=\{x \mid x<b\};$$

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\};$$

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$,即全体实数的集合 R.

注意,记号 $-\infty$, $+\infty$ 只是表示无限性的一种记号,而不是某个确定的数,因此不满足数的运算规则. 以后在不需要辨明所讨论的区间是否包含端点以及是否是有限区间时,可简单地称之为**区间**,常用 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念.

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,数集 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ 称为点 a 的 δ **邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中点 a 称为该邻域的**中心**,δ 称为该邻域的**半径**.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$,因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

在数轴上,$|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离,所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体,如图 1-1-3(a) 所示.

若把邻域 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉(图 1-1-3(b)),所得到的邻域称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

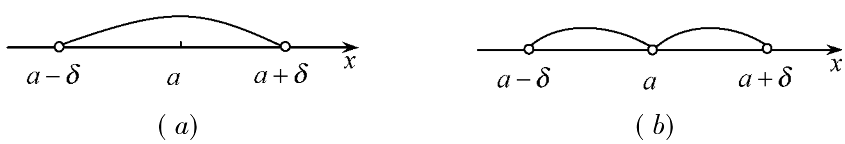

图 1-1-3

更一般地,以 a 为中心的任何开区间均是点 a 的邻域,在不需要特别辨明邻域半径时,可简记为 $U(a)$.

此外,把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的**左 δ 邻域**(简称**左邻域**),把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的**右 δ 邻域**(简称**右邻域**).

1.1.2 函数

在某些自然现象或社会现象中,往往同时存在多个不断变化的量,即变量,这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是描述这种联系的一个法则. 例如,矩形的面积 S 是随着长 a 和宽 b 的变化而变化的,其变化规律是 $S=ab$.

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y=f(x),\ x\in D,$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为这个函数的**定义域**.

对 $x_0 \in D$,按照对应法则 f,总有确定的值 y_0(记为 $f(x_0)$)与之对应,称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的**函数值**. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**,记为 R_f,即

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

函数的记号除了常用的 f,也可用其他的字母表示,例如 g、F、φ、Φ 等. 如果在同一问题中讨论到几个不同函数,则要用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

从函数的定义可以看到,函数的定义域与对应法则为函数的两个要素. 两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 若讨论的是纯数学问题,函数的定义域就是使得函数表达式有意义的一切实数所构成的集合,即函数的自然定义域.

例如,函数 $y = \sqrt{1-x^2}$ 的(自然)定义域为闭区间 $[-1,1]$.

$y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的(自然)定义域为开区间 $(-1,1)$.

对函数 $y = f(x), x \in D$,若取自变量 x 为横坐标,因变量 y 为纵坐标,则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点 (x,y). 当 x 取遍定义域 D 的所有数值时,点集

$$G = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**图形**.

函数常用的表示方法有表格法,图像法,公式法(解析法)三种,而根据函数的解析表达式的形式不同,又可分为显函数,隐函数和分段函数三种. 对于显函数,函数 y 是由 x 的解析式直接表达,例如 $y = x^2+1$; 对于隐函数,函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y) = 0$ 来确定,例如 $\ln y = \sin(x+y)$; 对于分段函数,函数在其定义域的不同范围内,具有不同解析表达式.

例 1.1.3　绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_y = [0, +\infty)$,其图形如图 1-1-4 所示.

例 1.1.4　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,其图形如图 1-1-5 所示.

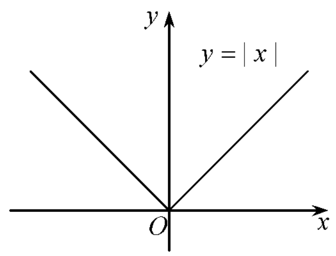

图 1-1-4

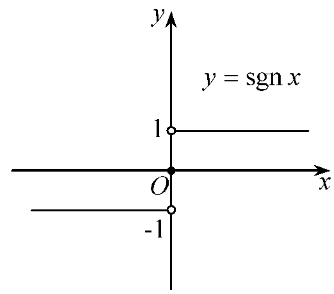

图 1-1-5

例 1. 1. 5　取整函数 $y = [x]$,其中 $[x]$表示不超过 x 的最大整数.

例如, $[\pi] = 3$, $[-2.3] = -3$, $[\sqrt{3}] = 1$. 易见,取整函数的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$,值域 $R_y = Z$,图形如图 1-1-6 所示.

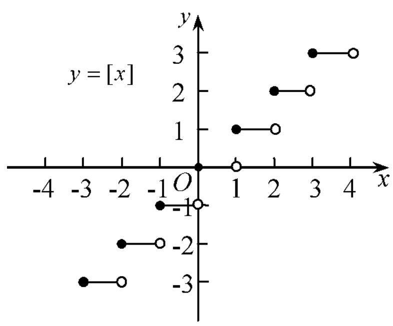

图 1-1-6

习题　1. 1

1. 用列举法表示集合 $\{x \mid |x| \leqslant 5, x$ 为整数$\}$.

2. 用集合的描述法表示下列集合.

(1) 大于 5 的实数集;

(2) 方程 $x^2 - 7x + 12 = 0$ 的根的集合.

3. 设 $A = \{x \mid 3 < x < 5\}$, $B = \{x \mid 4 > x\}$,求

(1) $A \cup B$;　　(2) $A \cap B$;　　(3) $A \setminus B$.

4. 设全集 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$,求

(1) $(A \cup B)^C$;　　(2) $A^C \cap B^C$;　　(3) $A^C \cup B^C$;　　(4) $(A \cap B)^C$.

5. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1) $|x| \leqslant 3$;　　(2) $|x - 2| \leqslant 1$;

(3) $|x - a| < \varepsilon$(a 为常数, $\varepsilon > 0$);　　(4) $|x + 1| > 2$.

6. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　　　　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

7. 下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同,为什么?

(1) $f(x)=x-1$ 与 $g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$;

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

1.2　函数的性质

1.2.1　函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$,若存在一个正数 M,使得对一切 $x\in X$,恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**.

若这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**,或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界,因为对任意的 x,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 这里 $M=1$(当然可以取大于 1 的任何数作为 M,且有 $|\sin x|\leqslant M$ 成立). 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内无界,因为不存在这样的正数 M 使 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立;但在 $[1,+\infty)$ 上有界,取 $M=1$,对于 $[1,+\infty)$ 内的一切 x 恒有 $\left|\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 成立.

例 1.2.1　证明函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

证明　因为 $(|x|-1)^2\geqslant 0$,即 $|x|^2+1\geqslant 2|x|$,所以 $|x^2+1|\geqslant 2|x|$,故对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有

$$|f(x)|=\left|\frac{x}{x^2+1}\right|=\frac{|x|}{|x^2+1|}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2},$$

从而函数 $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的.

函数有界的定义也可表述为:若存在常数 M_1 和 M_2,使得对一切 $x\in X$,恒有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**,并分别称 M_1 和 M_2 为 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**和**上界**.

1.2.2　函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$

时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加函数**;如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

例如,$y = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的,在 $(-\infty, +\infty)$ 内是不单调的(见图 1-2-1).

$y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的(见图 1-2-2).

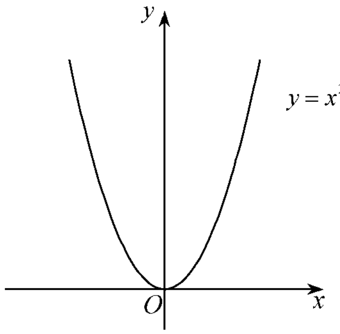

图 1-2-1

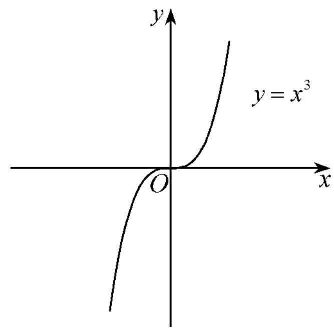

图 1-2-2

例 1.2.2 证明函数 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 内是单调增加的函数.

证明 在 $(-1, +\infty)$ 内任取两点 x_1, x_2,且 $x_1 < x_2$,则

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1} - \frac{x_2}{1+x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1, x_2 是 $(-1, +\infty)$ 内任意两点,所以

$$1 + x_1 > 0, 1 + x_2 > 0.$$

又因为 $x_1 - x_2 < 0$,故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$,即

$$f(x_1) < f(x_2),$$

所以 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1, +\infty)$ 内是单调增加的函数.

1.2.3 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对任意的 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**;若对任意的 $x \in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

奇函数的图形是关于原点对称的(见图 1-2-3);而偶函数的图形是关于 y 轴对称的(见图 1-2-4).

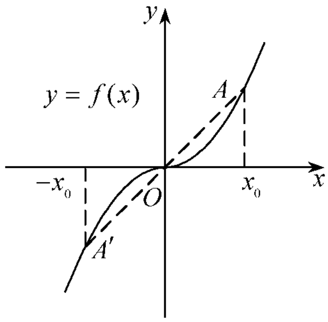

图 1-2-3

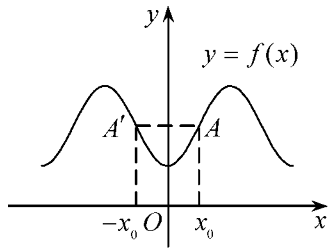

图 1-2-4

例如,函数 $y=\sin x$ 是奇函数,$y=\cos x$ 是偶函数,而 $y=\sin x+\cos x$ 既非奇函数又非偶函数.

例 1.2.3　判断 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性.

解　因为

$$f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x),$$

所以 $y=x^4-2x^2$ 为偶函数,其图形如图 1-2-5 所示.

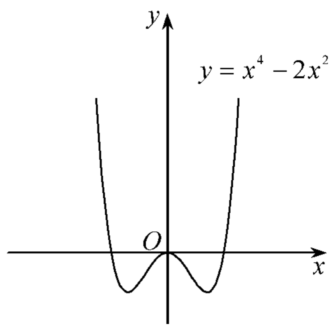

图 1-2-5

1.2.4　函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T>0$,使得对任意 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 通常,周期函数的周期是指其最小正周期.

例如,函数 $\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数; $\tan x$,$\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

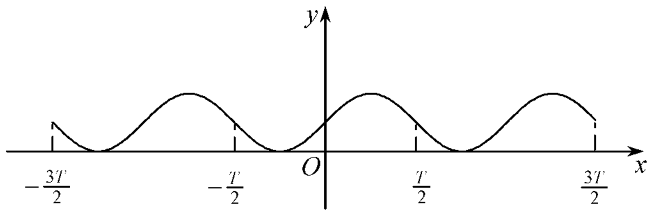

图 1-2-6

根据周期函数图形的特点，只要做出函数在长度为周期 T 的一个区间上的图形，就可以通过图形的平移得到整个函数的图形（见图 1-2-6）.

例 1.2.4 设函数 $f(x)$ 是以 $T(T>0)$ 为周期的周期函数，证明 $f(ax)\ (a>0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

证明 因为 $f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax+T)$，又因 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，所以有

$$f(ax+T)=f(ax),$$

因此

$$f\left[a\left(x+\frac{T}{a}\right)\right]=f(ax),$$

故 $f(ax)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的周期函数.

由例 1.2.4 可知，函数 $\sin kx$，$\cos kx$ 是以 $\frac{2\pi}{k}$ 为周期的周期函数，$\tan kx$，$\cot kx$ 是以 $\frac{\pi}{k}$ 为周期的周期函数.

习题 1.2

1. 证明函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 是有界函数.

2. 试求下列函数在指定区间内的单调性.

(1) $y=\frac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；　　(2) $y=2x+\ln x$，$(0,+\infty)$.

3. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　(2) $y=x(x-2)(x+2)$.

4. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数，指出其周期.

(1) $y=\cos(x-1)$；　(2) $y=x\tan x$；　(3) $y=\sin 3x$.

1.3　反函数与复合函数

1.3.1　反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的，有时不仅需要研究变量 y 随 x 的变化而变化的情况，也需研究变量 x 随 y 的变化而变化的情况. 例如，以速度 v 匀速行驶的汽车，其行驶时间为 t，则行驶距离 $s=vt$，此时 t 为自变量，s 为因变量；反过来，当行驶距离为 s 时，则行驶时间为 $t=\frac{s}{v}$，此时 s 为自变量，t 为因变量. 因此，有必要引入反函数的概念.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，如果对于任一 $y\in R$，总有确定的 $x\in D$ 使得 $f(x)=y$，则称 x 是 y 的函数，记为 f^{-1}，即 $x=f^{-1}(y)$，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 反函数的定义域为 R，值域为 D.

习惯上常用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此常把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$. 此时称 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ **互为反函数**. 在同一坐标平面内，互为反函数的两个函数关于直线 $y=x$ 对称（见图 1-3-1）.

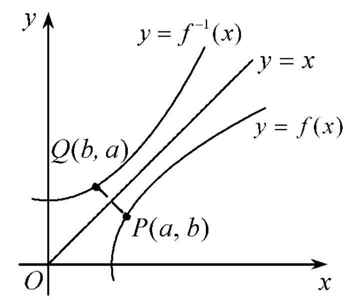

图 1-3-1

例 1.3.1　求函数 $y=1+\sqrt{e^x-1}$的反函数.

解　$y=1+\sqrt{e^x-1}$的定义域为 $x\geqslant 0$，值域为 $y\geqslant 1$. 由 $y=1+\sqrt{e^x-1}$，得

$$x=\ln(y^2-2y+2),y\geqslant 1.$$

将 x,y 互换，所求反函数为

$$y=\ln(x^2-2x+2),x\geqslant 1.$$

1.3.2　复合函数

定义 1.3.1　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的**复合函数**，其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，u 称为**中间变量**.