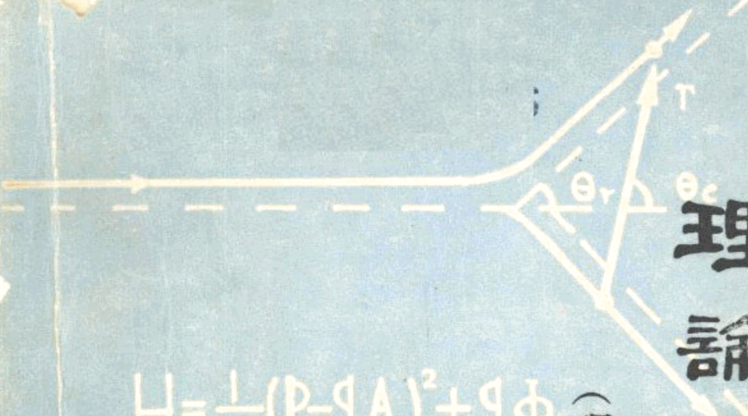


理論力学題解集

（理科教学参考书）

$$H=\frac{1}{2m}(P-qA)^2+q\Phi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+[\psi,H]=0$$

$$\begin{pmatrix}J_x\\J_y\\J_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{xx}&0&0\\0&I_{yy}&0\\0&0&I_{zz}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{pmatrix}$$

湖南大学
中南矿冶学院 物理教研室

前　言

根据教学需要，我们为两校物理专业师资班编写了《理论力学题解集》一书。本书包括现行部定教材南京大学周衍柏写的《理论力学教程》和吉林师大肖士珣写的《理论力学简明教程》（均79年版）全部习题。限于篇幅，解题过程中非关键的初等数学和微积分运算适当予以简略；答案处用#号标出；个别过渡性容易题只予提示、列出答案；原习题中个别地方作了适当的改动。周书题解由靳九成同志编写，肖书解题由吴为平同志编写，并经石任球教授审阅。另蔡从政、俞继远、何维杰、黄宁庆等同志也看过部分内容，提出了不少有益的意见。限于水平，时间也仓促，有错误之处望批评指正。

湖南大学
中南矿冶学院
物理教研室

一九八〇年二月

目 录

周衍柏《理论力学教程》（79年版）

肖士珣《理论力学简明教程》（79年版）

周衍柏《理论力学教程》

(1979年版)

第一章　质点力学

1·1　沿水平方向前进的枪弹，通过某一距离S的时间为t_1，而通过下一等距离S的时间为t_2。试证明枪弹的减速度（假定是常数）为

$$\frac{2S(t_2-t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$$

【解】 略

1·2　某船向东航行，速率为每小时15千米，在正午经过某一灯塔。另一船以同样速度向北航行，，在下午1时30分经过此灯塔。问在什么时候，两船的距离最近？最近的距离是多少？

【解】 略　　答：午后零点45分，　15.9千米

1·3　曲柄$\overline{OA}=r$，以匀角速ω绕定点O转动。此曲柄借连杆AB使滑块B沿直线ox运动。求连杆上C点的轨道方程及速度。设$\overline{AC}=\overline{CB}=a$，$\angle AOB=\varphi$，$\angle ABO=\psi$。

【解】　(1)　$r\sin\varphi=2a\sin\psi$

$$x=r\cos\varphi+\frac{a}{2}\cos\psi$$

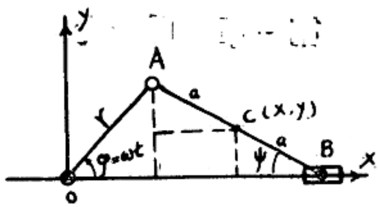
$$y=\frac{a}{2}\sin\varphi$$

由上三式消去两个参数φ、ψ得轨道方程：

$$4x^2(a^2-y^2)=(x^2+3y^2+a^2-r^2)^2 \ \#$$

(2) $\dot{\varphi}=\omega$，$\dot{\psi}=\dfrac{r\omega\cos\varphi}{2a\cos\psi}$

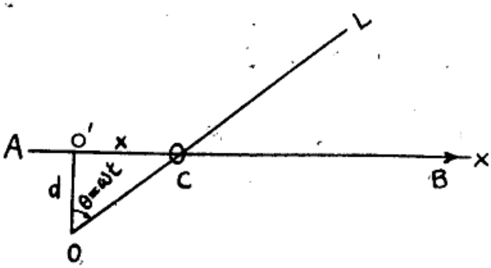
$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\frac{r\omega}{2\cos\psi}\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin\varphi\cos\psi\sin(\varphi+\psi)} \ \#$$



1.3 图

1·4 细杆 OL 绕 O 点以匀角速 ω 转动，并推动小环 C 在固定的钢丝 AB 上滑动。图中的 d 为一已知常数，试求小环的速度及加速度。

【解】 $x=d\,\mathrm{tg}\theta$，$\dot{\theta}=\omega$



1·4 图

$$v=\dot{x}=d\omega\sec^2\theta=\frac{\omega(d^2+x^2)}{d}\ \#$$

$$a=\ddot{x}=2\omega^2x\frac{d^2+x^2}{d^2}\ \#$$

1·5 矿山升降机作加速度运动时，其变加速度可用下式表示：

$$a=c\left(1-\sin\frac{\pi t}{2T}\right)$$

式中 c 及 T 为常数，试求运动开始 t 秒后升降机的速度及其所走过的路程。已知升降机的初速度为零。

【解】 属积分问题，并用初始条件定常数得

$$v=\int_0^t a\,dt=c\left[t+\frac{2T}{\pi}\left(\cos\frac{\pi t}{2T}-1\right)\right]\ \#$$

$$S=\int_0^t v\,dt=c\left[\frac{t^2}{2}+\frac{2T}{\pi}\left(\frac{2T}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2T}-t\right)\right]\ \#$$

1·6 一质点沿矢径及垂直于矢径的速度分别为 λr 及 $\mu\theta$，式中 λ 及 μ 是常数。试证其沿矢径及垂直于矢径的加速度为

$$\lambda^2r-\frac{\mu^2\theta^2}{r},\qquad \mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)$$

【证】 由 $\dot{r}=\lambda r,\ r\dot{\theta}=\mu\theta\longrightarrow$

$$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=\lambda^2r-\frac{\mu^2\theta^2}{r}\ \#$$

$$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=\mu\theta\left(\lambda+\frac{\mu}{r}\right)\ \#$$

1·7　试自

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$$

出发，计算$\ddot{x}$及$\ddot{y}$。并由此推出径向加速度a_r及横向加速度a_θ。

【解】　$\dot{x}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta,$

$\dot{y}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta,$

$\ddot{x}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\cos\theta-(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\sin\theta$

$\ddot{y}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\sin\theta+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\cos\theta$

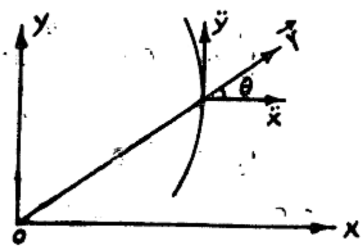
$a_r=\ddot{x}\cos\theta+\ddot{y}\sin\theta=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$　#

$a_\theta=\ddot{y}\cos\theta-\ddot{x}\sin\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$　#

1·8　直线FM在一给定的椭圆平面内以匀角速ω绕其焦点F转动。求此直线与椭圆的交点M的速度。已知以焦点为坐标原点的椭圆的极坐标方程为

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

式中a为椭圆的半长轴，e为偏心率，都是常数。



1·7 图

【解】　$v=\sqrt{\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2}$，　　$\dot{\theta}=\omega,$

$$\dot{r}=r\frac{e\omega\sin\theta}{1+e\cos\theta}\qquad\therefore\quad v=\frac{r\omega}{b}\sqrt{r(2a-r)}\ \#$$

其中　　$b=\sqrt{a^2(1-e^2)}$为短半轴。

1·9　质点作平面运动，其速率保持为常数。试证其速度矢量$\mathbf{v}$与加速度矢量$\mathbf{a}$正交。

【证】采用自然坐标，$a_t=\dfrac{dv}{dt}=0$。

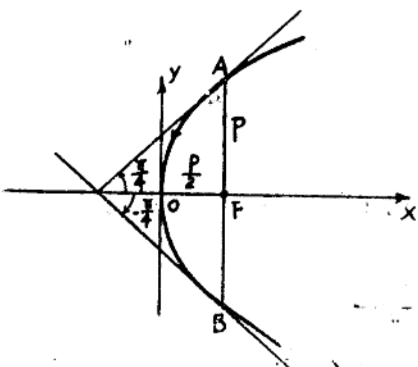
$\therefore\quad \mathbf{a}=a_n\mathbf{n}$，加速度沿主法线方向，与 $\mathbf{v}$ 正交。

1·10 一质点沿着抛物线 $y^2=2px$ 运动。其切向加速度为法向加速度的 $-2k$ 倍。如此质点从正焦弦 $\left(\dfrac{p}{2},\ p\right)$ 的一端以速度 u 出发，试求其达到正焦弦另一端时的速率。

【解】 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_A=\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}$，　$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_B=\mathrm{tg}\dfrac{-\pi}{4}$

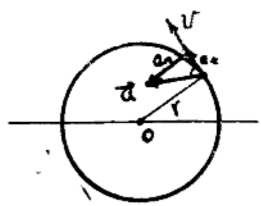
又 $$a_t=v\frac{dv}{ds}=-2k\frac{v^2}{\rho}=-2k\frac{v^2}{-ds/d\theta}$$

$$\int_u^v\frac{dv}{v}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}2kd\theta\longrightarrow v=ue^{-k\pi}\ \#$$



1·10 图

1·11 质点沿着半径为 r 的圆周运动，其加速度矢量与速度矢量间的夹角 α 保持不变。求质点的



1·11 图

速度随时间而变化的规律。已知初速度为 v_0。 【二】

【解】 $$a_t=\frac{dv}{dt}=a_n\text{ctg}\alpha=\frac{v^2}{r}\text{ctg}\alpha$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2}=\frac{\text{ctg}\alpha}{r}\int_0^t dt \longrightarrow \frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}-\frac{t}{r}\text{ctg}\alpha \ \#$$

1·12 在上题中，试证其速度可表为

$$v=v_0e^{(\theta-\theta_0)\text{ctg}\alpha}$$

式中 θ 为速度矢量与 x 轴间的夹角，且当 $t=0$时，$\theta=\theta_0$。

【证】 $$a_t=v\frac{dv}{ds}=\frac{v^2\text{ctg}\alpha}{ds/d\theta}$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}=\text{ctg}\,\alpha\int_{\theta_0}^{\theta}d\theta \longrightarrow v=v_0e^{(\theta-\theta_0)\text{ctg}\alpha}\ \#$$

1·13 假定一飞机从 A 处向东飞到 B 处，而后又向西飞回原处。飞机相对于空气的速度为v'，而空气相对于地面的速度则为v_0。A 与 B 之间的距离为 l . 飞机相对于空气的速率v'保持不变。

(a) 假定 $v_0=0$，即空气相对于地面是静止的，试证来回飞行的总时间为

$$t_0=\frac{2l}{v'}$$

(b) 假定空气速度为向东（或向西），试证来回飞行的总时间为

$$t_B=\frac{t_0}{1-v_0^2/v'^2}$$

(c) 假定空气的速度为向北（或向南），试证来回飞行的总时间为

【证】略　　$t_N=\dfrac{t_0}{\sqrt{1-v_0^2/v'^2}}$

1·14　一飞机在静止气流中每小时的速率为100千米。如果飞机沿每边为6千米的正方形飞行，且风速为每小时28千米，方向与正方形的某两边平行，则飞机绕此正方形飞行一周，需时多少？

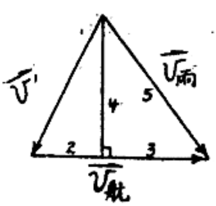
【解】略　　　　$15\dfrac{5}{16}$分　#

1·15　当一轮船在雨中航行时，它的雨篷遮着篷的垂直投影后2米的甲板，篷高4米。但当轮船停航时，甲板上干湿两部分的分界线却在篷前3米。如果雨点的速率为8米/秒，求轮船的速率。

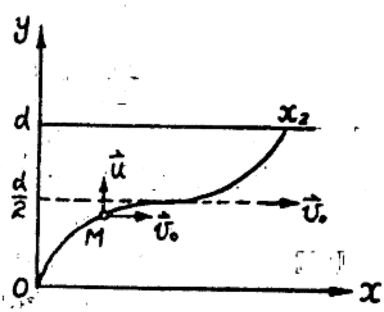
【解】　　$\mathbf{v}_{雨}=\mathbf{v}_{航}+\mathbf{v}'$，

从图中比例关系知

$$v_{航}=v_{雨}=8米/秒 \quad \#$$



1·15 图



1·16 图

1·16　宽度为d的河流，其流速与到河岸的距离成正比。

在河岸处，水流速度为零，在河流中心处，其值为v_0。一小船以相对速度u沿垂直于水流的方向行驶，求船的轨迹以及船在对岸靠拢的地点。

【解】 x 分为两个区域

(1) $$y \leqslant \frac{d}{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = u,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2v_0}{d} y$$

$$\int_0^x dx = \int_0^y \frac{2v_0}{du} y\,dy \longrightarrow x = \frac{v_0}{ud} y^2 \quad \text{（轨迹）}$$

(2) $$d \geqslant y \geqslant \frac{d}{2}, \qquad \frac{dy}{dt} = u\,; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2v_0}{d}(d-y)$$

$$\int_{\frac{v_0 d}{4u}}^x dx = \frac{2v_0}{ud} \int_{\frac{d}{2}}^y (d-y)dy,$$

$$x = \frac{2v_0}{u} y - \frac{v_0}{ud} y^2 - \frac{v_0 d}{2u} \quad \#$$

$$x|_{y=d} = \frac{v_0 d}{2u} \quad \text{（靠岸地点）} \#$$

1·17 小船M被水冲走后，由一荡浆人以不变的相对速度c_2朝岸上A点划回。假定河流速度c_1沿河宽不变，且小船可以看成一个质点，求船的轨迹。

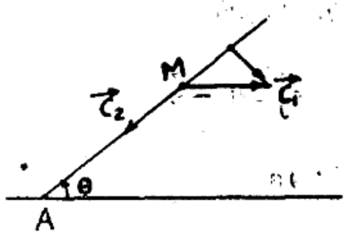
【解】
$$\dot{r} = -c_2 + c_1\cos\theta$$
$$r\dot{\theta} = -c_1\sin\theta$$

消去t得轨迹微分方程

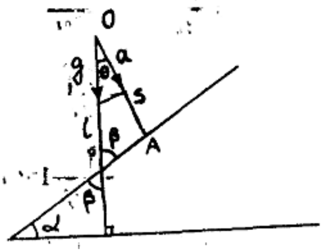
$$\frac{dr}{r} = \frac{c_2}{c_1}\frac{d\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

令$\frac{c_2}{c_1}=k$，并积分整理得$\left(\text{让}\frac{\theta}{2}=\alpha\right)$轨迹方程

$$r=r_0\frac{\cos^{k+1}\alpha_0\sin^{k-1}\alpha}{\sin^{k-1}\alpha_0\cos^{k+1}\alpha}\ \#$$



1·17 图



1·18 图

1·18 一质点自倾角为α的斜面的上方O点，沿一光滑斜槽OA下降。如欲使此质点到达斜面上所需的时间为最短，问斜槽OA与竖直线所成之角θ应为何值？

【解】 加速度 $a=g\cos\theta$

$$S=\frac{1}{2}at^2,\quad \frac{l}{\sin(\pi-\theta-\beta)}=\frac{S}{\sin\beta}$$

$$t^2=\frac{2S}{a}=\frac{2l\cos\alpha}{g\cos\theta\cos(\alpha-\theta)}$$

让t取极值，整理得 $\theta=\frac{\alpha}{2}$ #

1·19 将质量为m的质点竖直上抛于有阻力的媒质中。设阻力与速度平方成正比，即$R=mk^2gv^2$。如上掷时的速度为v_0，试证此质点又落至投掷点时的速度为

$$v_1=\frac{v_0}{\sqrt{1+k^2v_0^2}}$$

【证】 设 y 轴朝上，原点在地面。上升、下降摩擦力表达式不同，分段处理：

上升： $$m\frac{dv}{dt}=m\frac{dv}{dy}v=-mg-mgk^2v^2$$

$$\frac{1}{g}\int_{v_0}^{0}\frac{vdv}{1+k^2v^2}=\int_0^h dy \longrightarrow$$

$$h=\frac{1}{2k^2g}\ln(1+k^2v_0^2)\ \#$$

下降： $$m\frac{dv}{dt}=mv\frac{dv}{dy}=-mg+mgk^2v^2$$

$$-\frac{1}{g}\int_0^v\frac{vdv}{1-k^2v^2}=\int_h^0 dy \longrightarrow$$

$$h=-\frac{\ln(1-v^2k^2)}{2k^2g}$$

比较 h 的两表达式并整理得

$$v=\frac{v_0}{\sqrt{1+k^2v_0^2}}\ \#$$

1·20　一枪弹以仰角 α、初速 v_0 自倾角为 β 的斜面的下端发射。试证子弹击中斜面的地方和发射点的距离 d（沿斜面量取）及此距离的最大值分别为

$$d=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}$$

$$d_{max}=\frac{v_0^2}{2g}\sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$$

【证】(1) 重力加速度沿 x、y 分解：

$$a_y = -g\cos\beta,\ a_x = -g\sin\beta,$$

$\mathbf{v}_0$ 沿 x、y 向分解：

$$v_{y0} = v_0\sin(\alpha-\beta),\ v_{x0} = v_0\cos(\alpha-\beta)$$

沿 x、y 向均为匀加速直线运动。y 向经历时间为

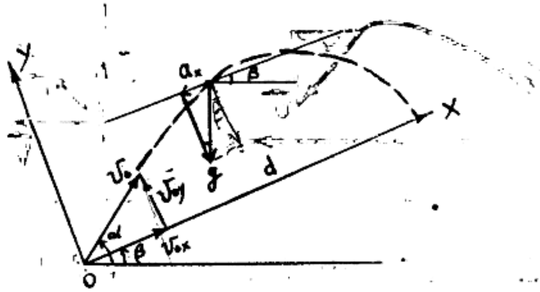
$$t = \frac{2v_{y0}}{g\cos\beta} = 2\frac{v_0\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

$$d = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{2v_0^2}{g}\ \frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}$$

(2) 求d_{max}。取极值条件得

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2},$$

$$d_{max} = \frac{v_0^2}{2g}\sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$$



1·20 图

1·21 将一质点以初速v_0抛出，v_0与水平线所成之角为 α．此质点所受到的空气阻力为其速度的 mk 倍，m 为质点的质量，k 为比例常数。试求当此质点的速度与水平线所成之角

又为 α 时所需的时间。

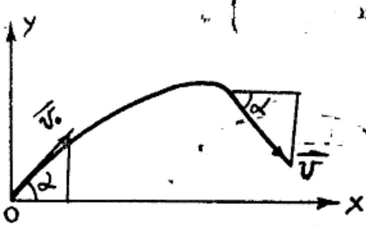
【解】
$$\mathbf{f}_r=-mk\mathbf{v}$$
$$m\ddot{x}=-mk\dot{x}$$
$$m\ddot{y}=-mg-mk\dot{y}$$

进行一次积分得

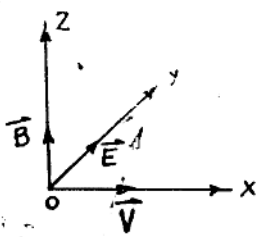
$$\dot{x}=\dot{x}_0e^{-kt}$$
$$\dot{y}=\left(\frac{g}{k}+\dot{y}_0\right)e^{-kt}-\frac{g}{k}$$

利用条件 $\dfrac{-\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0}=\operatorname{tg}\alpha$，得

$$t=\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{2kv_0\sin\alpha}{g}\right) \#$$



1·21 图



1·22 图

1·22 如向互相垂直的匀强电磁场 **E**、**B** 中发射一电子，并设电子的初速度 **v** 与 **E** 及 **B** 垂直。试求电子的运动规律。已知此电子所受的力为 $e(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$，式中 **E** 为电场强度，**B** 为磁感应强度，e 为电子所带的电荷，**v** 为任一瞬时电子运动的速度。

【解】如图，初速 **v** 在 z 向无分量，电子限制在 xy 平面

内运动。

$$m\ddot{x}=Be\dot{y} \tag{1}$$

$$m\ddot{y}=Ee-Be\dot{x} \tag{2}$$

$$m\ddot{z}=0$$

解 (2) $m\int_0^{\dot{y}}d\dot{y}=\int_0^t Eedt-\int_0^x Bedx$

$$\dot{y}=\frac{Ee}{m}t-\frac{Be}{m}x \tag{3}$$

(3) 代入 (1) 整理得

$$\ddot{x}+\left(\frac{Be}{m}\right)^2 x=\frac{BEe^2}{m^2}t$$

考虑其通解及特解

$$x=A\sin\left(\frac{Be}{m}t+\varphi\right)+\frac{E}{B}t \tag{4}$$

利用初始条件定 A、φ

$$A=\left(V-\frac{E}{B}\right)\frac{m}{Be},\quad \varphi=0$$

$$\therefore\ x=\frac{E}{B}t+\frac{m}{eB}\left(V-\frac{E}{B}\right)\sin\frac{eB}{m}t \quad \# \tag{5}$$

(5) 代入 (3)

$$\frac{dy}{dt}=-\left(V-\frac{E}{B}\right)\sin\frac{eB}{m}t$$

积分得

$$y=\frac{m}{Be}\left(V-\frac{E}{B}\right)\cos\frac{eB}{m}t-\frac{mV}{Be}+\frac{mE}{B^2e}\quad \#$$

1·23 在上题中，如

(a) $\mathbf{B}=0$，则电子的轨道为在水平面（xy 平面）的抛物线；

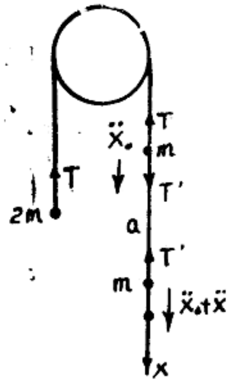
(b) 如 $\mathbf{E}=0$，则电子的轨道为半径等于$\dfrac{mV}{eB}$的圆。试证明之。

【证】(a) $\mathbf{B}=0$，仅在 y 方向有恒力 $F_y=eE$，$F_x=0$，有初速V，显然为抛物线运动。

(b) $\mathbf{E}=0$，仅有洛仑兹力$\mathbf{f}=e\mathbf{V}\times\mathbf{B}$，$\mathbf{f}$垂直于$\mathbf{V}$、$\mathbf{B}$，$\mathbf{V}$之大小不变，显然运动为等速圆周运动。

$$eVB=m\frac{V^2}{r} \longrightarrow r=\frac{mV}{eB} \quad \#$$

1·24 质量为m与$2m$的两质点，为一不可伸长的轻绳所联结，绳挂在一光滑的滑轮上。在m的下端又用固有长度为a、倔强系数k为$\dfrac{mg}{a}$的弹性绳挂上另外一个质量为m的质点。在开始时，全体保持竖直，原来的非弹性绳拉紧，而有弹性的绳则处在固有长度上。由此静止状态释放后，求证这运动是简谐的，并求出其振动周期τ及任何时刻两段绳中的张力T及T'。



1·24 图

【解】$2m$、$m_{\text{上}}$，$m_{\text{下}}$ 的运动方程为

$$3m\ddot{x}_0=+T+mg-2mg,\quad T'=-T'' \tag{1}$$

$$T'=-kx=-\frac{mg}{a}x \tag{2}$$