高等数学

前　言

《高等数学》教材既是我院进行示范性院校建设的人文素质项目成果之一，也是高等数学精品课程配套使用的精品教材。

数学是一门文化基础课，从小学至大学一直开设，这不仅仅因为数学是工具，更在于数学在培养思维能力方面独具品质，如果我们留意各行各业的专家或优秀工作者，你会发现他们思维敏锐、逻辑性强、概念精确、说理透彻，这些人才品质，往往可以追踪到数学教育对他们的熏陶。通过数学的学习，可培养严谨、朴实的科学态度，理智、自律的人格特征，诚实、求是的人文精神，勤奋、自强、永无止境追求真理的探索精神。

对于理工类专业的学生来讲，数学的基础性和工具性作用尤为突出，数学可以帮助我们解决生产实践中的许多实际问题，如筑路架桥时弯道的设计、桥梁的抗震问题，车辆通过隧道时行驶速度确定的标准问题，汽车机油滤清器生产时对拉深材料下料的计算问题，汽车刹车性能测试中速度和加速度的确定问题，用砂轮打磨弯曲型工件内表面时砂轮尺寸的确定问题等等。由此可以看出，数学影响的不仅仅是在校期间后续功课的学习，而且将影响走出校门后一生的职业进步和事业成就。

职业教育的发展日新月异，老教材往往赶不上新变化，存在着严重的滞后性和错位性。过去被业界看好的成熟教材很大程度上不适应目前的高职教育。理论成熟、体系完备、内容浩瀚的传统教材高职学生是没有能力"消化"的，教师也没有那么多的课时可以用来"精酿细做"。面对此教学困境，我院全体数学同仁积极教研教改，共商教学出路与对策，我们以国家高职教育方针为指导思想，以我院高职办学为研究基础，针对"2＋1"人才培养方案，再结合高职学生知识现状和未来所需的职业能力开发出这套教材。

围绕教材建设这一主题，我们研究学院的专业特点，充分考虑将课程目标与专业培养目标融合，我们走访用人单位进行基础调研和信息反馈，我们审视多年来课程教学的成败得失，我们考虑高职生的知识接受现状和未来职业能力需求，我们借鉴同类教材的编写经验，我们汇集自己多年的专业研究和教学思考成果，我们务实创新、博采众长、集众人智慧于一体，编写出这本教材，供学生学习使用。

该教材的编写理念是：

1.注重概念的建立，淡化严格理论证明，注重对一般方法的介绍，以培养学生对基本运算的掌握，不过分追求演算的技巧性。

2.注重数形结合，加强几何直观性，力求简单、明了，不过分追求完整的

系统性。力求做到教师好教、好用,学生好学、乐学。

3.突出应用性,加强针对性,在内容的处理上,尽可能反映数学在现代经济社会中的应用,多角度、多层次渗透运用数学方法分析和解决实际问题,致力于知识和能力的同步加强。

4.降低起点,减小坡度,分散难点,提升兴趣。增强示范性和可模仿性,使高职学生克服对数学学习的恐惧心理,树立起学习数学的自信心,以利取得良好的学习成效。

5.数学不仅是关于数的世界、形的世界的科学,还是一门充满人文精神的科学,编写中我们有意识地融入了一些数学文化、数学素养、数学思维的元素。以求达到"立体塑人"的目的。

本书由谢克斌根据精品课程建设要求提出编写思路、拟定编写体例和大纲,然后全体编者共同讨论和修改,在达成共识之后分工进行编写。全体主编、副主编参与了书稿的校对,最后由主编完成全书统稿工作。本书具体编写分工如下:

编　者	编写内容	
杨小平	第一章	函数、极限与连续
谢克斌	第二章	导数与微分
王子燕	第三章	导数的应用
张喜荣	第四章	不定积分
马晓翊	第五章	定积分及其应用
王子燕	第六章	向量代数与空间解析几何
张海妮	第七章	多元函数微分学及其应用
谢克斌	第八章	重积分及其应用
张　博	第九章	微分方程
刘妍妮	习题和附录的校对	
刘　颖	习题和附录的校对	

本书在编写过程中,得到陕西交通职业技术学院的大力支持,得到基础学科部陈军川、师炜两位主任的良好建议、积极指导和热切期待,得到西北大学出版社和责任编辑张运琪老师的很大帮助,在此表达编者诚挚的谢意。

教材的出版并不代表教材建设工作的终结,我们全体编者以诚恳虚心的学人姿态接受广大师生对教材的反馈意见与评价,以不断完善教材建设。

编　者

2011年7月于西安

目 录

第一章　函数、极限与连续

名人名言

学习任何知识必须先学数学，数学在科学的等级中是最高级的，不论对普通教育还是专门教育，数学教育乃是作任何教育的起点.　——孔德

一尺之棰，日截其半，万世不竭.　——庄子

内容提要

初等函数的研究对象基本上是不变的量，而高等数学则以变量为研究对象. 函数是同一自然现象或技术过程中变量依从关系的反映. 极限方法则是研究变量的一种基本方法，是微积分学的重要工具. 本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

学习目标

理解函数、基本初等函数、复合函数、初等函数、分段函数、反函数的概念；理解函数极限的描述性定义和函数连续性的概念. 掌握复合函数的复合过程；掌握无穷小的概念、性质、无穷小与无穷大的关系及所学的求极限的方法. 了解函数的特性及在闭区间上连续函数的性质.

§1.1　函数

一、函数的概念

1. 函数的定义

在同一个自然现象或技术过程中，往往同时有几个变量在变化着，这几个变量并不是孤立地在变，而是相互联系并遵循着一定的变化规律.

例如，在自由落体运动中，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么下落时间 t 与下落的距离 s 之间的相依关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 给定，其中 g 是重力加速度，假定物体着地的时刻为 T，那么变量 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定下落距离 s 这个变量的相应数值.

上例中变量 s 与 t 之间的这种依从关系就是我们将要讨论的函数.

定义 1 设有**两个变量** x 和 y,若当变量 x 在实数的某一范围 D 内,任意取定一个数值时,变量 y 按照某一**对应法则** f,都有**惟一确定**的值与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**函数**(或**因变量**).自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**.当 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**,记作 $f(x_0)$,当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的集合叫做函数的**值域**.

函数可以用解析式(公式),图形或表格表示.今后,如无特别说明我们讨论的函数皆指用解析式表示的函数.

在考虑实际问题时,应根据问题的实际意义来确定函数的定义域.如上例中函数的定义域就是 $D=[0,T]$.当只给函数的解析式而没有实际背景时,其定义域就是指解析式有意义的自变量能取的一切实数值.

例 1 求函数 $y=\dfrac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,必须

$$4-x^2\neq 0 \text{ 且 } x+2\geqslant 0$$

即 $x\neq\pm 2$ 且 $x\geqslant -2$.因此,该函数的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

两个函数当且仅当他们的定义域和对应法则都相同时,这两个函数才被认为是相同的.例如,函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$,它们的定义域不同,所以它们是不同的函数.**定义域和对应法则是确定函数的两个要素.**

需要强调的是求函数值的关键在于弄清对应法则.对于一个已知函数必须会找到它的对应法则.如函数 $y=f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ 的对应法则为

$$f=\frac{e^{(\ )}+e^{-(\ )}}{e^{(\ )}-e^{-(\ )}}.$$

2. 分段函数

分段函数是指在自变量的不同取值范围内,用不同的表达式表示的函数.

应特别注意,用几个表达式表示的分段函数是一个函数,而不是几个函数.求分段函数的函数值时,应把自变量的值带入相应的表达式中去计算.

例如,绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

及取整函数 $y=[x]$,其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,都是分段函数.

例 2 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},x\geqslant 0\\ -x,x<0\end{cases}$,求 $f(4)$ 和 $f(-3)$.

解　当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$，所以 $f(4)=\sqrt{4}=2$.

当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$，所以 $f(-3)=-(-3)=3$.

二、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I \subset D$，如果存在一个正数 M，对于 I 内的任一 x 总有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在数集 I 上**有界**.

如 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，而 $g(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，但在 $\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 内有界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$，若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调增加**，区间 I 称为**单调增区间**；若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上**单调减少**，区间 I 称为**单调减区间**.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任意 $x \in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**，若都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

4. 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在不为 0 的数 T，使得对于任一 $x \in D$，有 $(x+T) \in D$ 且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为 $f(x)$ 的**周期**. 通常说的函数的周期是指它的最小正周期.

注意　常值函数无最小正周期.

三、反函数

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W，如果对于 W 中的任一 y，由 $y=f(x)$ 能解出惟一的 $x\,(x=\varphi(y))$，这时 y 成了自变量，而 x 成了因变量，我们称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的**反函数**，$f(x)$ 称为**直接函数**. 它们两者的图像显然是重合的.

习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示. 因此常常把 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$，称 $y=\varphi(x)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数. 这时它们的图像关于直线 $y=x$ 对称.

四、初等函数

1. 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数皆称为**基本初等函数**. 它们的定义域、值域、图像和特性如下页基本初等函数表（表中没有列出正割和余割函数，它们的图像参见附录二）所示.

2. 复合函数

定义 3　设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，而且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或该定义域的一部分取值时，所对应的 u 的值使 $y=f(u)$ 有定义，则称 $y=f[\varphi(x)]$

是 x 的**复合函数**,称 u 为**中间变量**.

注意 不是任何两个函数都可以构成一个复合函数,例如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不可能复合成一个复合函数.因为对于 $u=2+x^2$ 的定义域内的任何 x 值所对应的 u 值都使 $y=\arcsin u$ 没有意义.

对于一个给定的复合函数,必须会分析清楚它的复合过程(即会将复合函数进行分解).掌握这种分析复合过程的方法,对将来求函数的导数和积分会带来很多方便.

例 3 指出下列复合函数的复合过程:

(1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$ (2) $y=\cos^2 x$ (3) $y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

解 (1) $y=\sqrt[4]{1+x^2}$ 是由 $y=\sqrt[4]{u}$ 与 $u=1+x^2$ 复合而成.

(2) $y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2$ 与 $u=\cos x$ 复合而成.

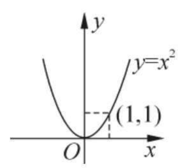
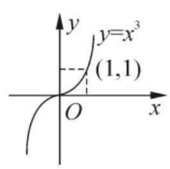
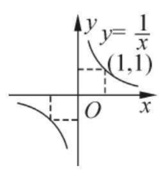
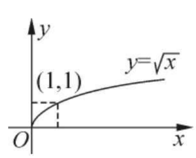
(3) $y=\mathrm{e}^{\arctan\frac{1}{\sqrt{x}}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$,$u=\arctan v$ 和 $v=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 复合而成.

3.**初等函数**

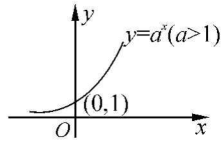
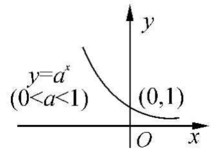
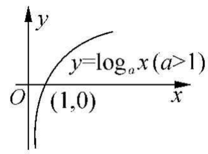
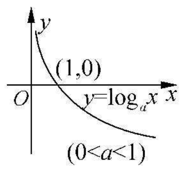
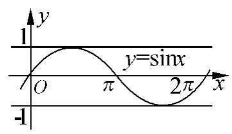
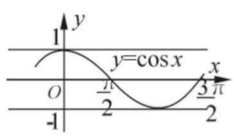
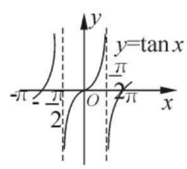
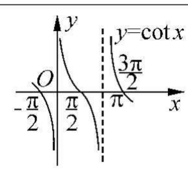
由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤构成的并能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

例如,$y=\cos(x^2+2x+3)$ 和 $t=\sqrt{\lg(x^2+1)}+\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ 都是初等函数.

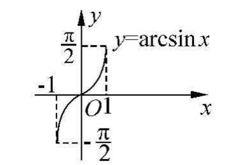
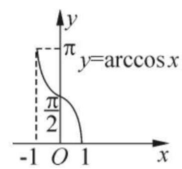
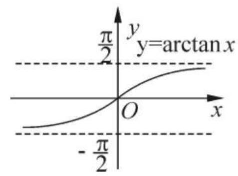
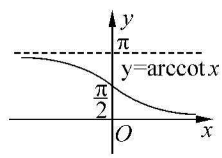
基本初等函数表

<table>
<tr><th colspan="2">函数</th><th>定义域</th><th>值域</th><th>简单性质</th><th>图像</th></tr>
<tr><td rowspan="4">幂函数
$y=x^a$</td><td>$y=x^2$</td><td>R</td><td>$y\geqslant 0$</td><td>偶函数
$x>0$,递增
$x<0$,递减</td><td></td></tr>
<tr><td>$y=x^3$</td><td>R</td><td>R</td><td>奇函数
单调递增</td><td></td></tr>
<tr><td>$y=\dfrac{1}{x}$</td><td>$x\neq 0$</td><td>$y\neq 0$</td><td>奇函数
在区间
$(-\infty,0)$
和$(0,+\infty)$
分别单调递减</td><td></td></tr>
<tr><td>$y=\sqrt{x}$</td><td>$x\geqslant 0$</td><td>$y\geqslant 0$</td><td>非奇非偶
单调递增</td><td></td></tr>
</table>

续表

函数		定义域	值域	简单性质	图像
指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$	$a>1$	R	R^+	单调递增 过(0,1)	
	$0<a<1$	R	R^+	单调递减 过(0,1)	
对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$	$a>1$	R^+	R	单调递增 过(1,0)	
	$0<a<1$	R^+	R	单调递减 过(1,0)	
三角函数	$y=\sin x$	R	$[-1,1]$	奇函数 有界 周期 2π	
	$y=\cos x$	R	$[-1,1]$	偶函数 有界 周期 2π	
	$y=\tan x$	$x\in R$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$	R	奇函数 周期 π	
	$y=\cot x$	$x\in R$ 且 $x\neq k\pi$ $(k\in Z)$	R	奇函数 周期 π	

续表

函数		定义域	值域	简单性质	图像
反三角函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	奇函数 单调递增 有界	
	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	单调递减 有界	
	$y=\arctan x$	R	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	奇函数 单调递增 有界	
	$y=\operatorname{arccot} x$	R	$(0,\pi)$	单调递减 有界	

五、函数关系举例

例 4 有一个长方形铁皮，它两边的长为 a 和 b，从它的四个角截去相同的小方块，折成一个无盖的盒子(如图 1.1)，求它的容积 v 与高 x 之间的函数关系.

解 设截去的小方块的边长为 x，则折成的盒子的高为 x，底面长为 $a-2x$，宽为 $b-2x$，这时它的容积为

$$v=(a-2x)(b-2x)x=4x^3-2(a+b)x^2+abx.$$

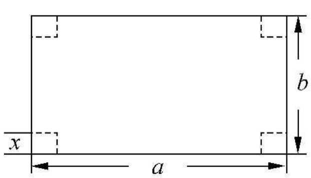


图 1.1

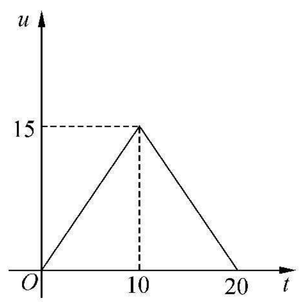


图 1.2

例 5 电脉冲发生器发出一个三角形的脉冲波(如图 1.2)求电压 u 伏和时间 t 微秒之间的函数关系.

解 在 0 到 10 微秒这段时间内，电压 u 由 0 直线上升到 15 伏，由图像知这条线段方程

是

$$u=\frac{15}{10}t=1.5t,\qquad t\in[0,10].$$

在 10 到 20 微秒这段时间内，电压 u 由 15 伏直线下降到 0，这条线段方程是

$$u=-\frac{15}{10}t+30=-1.5t+30,\qquad t\in[10,20].$$

归纳上面讨论的结果，函数 $u=u(t)$ 可表示成下面的分段函数形式：

$$u=\begin{cases}1.5t, & 0\leqslant t<10\\ -1.5t+30, & 10\leqslant t\leqslant 20\end{cases}.$$

最后介绍后面几章要用到的 δ－邻域的概念．

以 x_0 为中心，长度为 $2\delta(\delta>0)$ 的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的 **δ 邻域**，可用不等式 $|x-x_0|<\delta$ 来表示．x_0 叫做**邻域的中心**，δ 叫做**邻域的半径**．当 x_0 的 δ 邻域去掉中心 x_0 后，称为 x_0 的 δ **空心邻域**，可用不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 表示．

【习题 1.1】

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\lg(\lg x)$　　(2) $y=\dfrac{1}{1-x}+\arcsin\dfrac{x}{2}$

(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$

2. 指出下列函数的最小正周期.

(1) $y=\sin x\cos x$　　(2) $y=1+\cot x$

(3) $y=\sin^2 x$　　(4) $y=\sin x+\cos x$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\leqslant -1\\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$，求 $f(-2),f(0),f(2)$.

4. 设 $f(x)=(x-1)^2,g(x)=\dfrac{1}{x+1}$，求下列函数.

(1) $f[g(x)]$　　(2) $g[f(x)]$

(3) $f(x^2)$　　(4) $g(x-1)$

5. 设 $F(x)=\mathrm{e}^x$，证明：

(1) $F(x)\cdot F(y)=F(x+y)$　　(2) $\dfrac{F(x)}{F(y)}=F(x-y)$

6. 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\tan\sqrt{1+x}$　　(2) $y=\sin^2(1+2x)$

(3) $y=[\arcsin(1-x^2)]^3$

7. 在半径为 R 的球内作内接圆柱体，试将圆柱体体积表示为高的函数，并求此函数的定义域．

8. 已知鸡蛋收购价为每公斤 3 元时，每月能收购 5000 公斤．若将收购价每公斤提高 0.1 元，则每月收购量可以增加 500 公斤，试求鸡蛋的线性供给函数．

§1.2 极限的概念

一、数列的极限

例 1 考察下列几个数列：

(1) $\{x_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$，即数列 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n} \cdots$

(2) $\{x_n\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，即数列 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \cdots, \frac{n}{n+1} \cdots$

(3) $\{x_n\} = \{(-1)^{n-1}\}$，即数列 $1, -1, \cdots, (-1)^{n-1} \cdots$

(4) $\{x_n\} = \{n^2+3\}$，即数列 $4, 7, \cdots, n^2+3 \cdots$

可以发现，随着 n 的无限增大，各数列的通项 x_n 的变化趋势可以分成两种情形. 第一种情形是：当 n 无限增大时，通项 $\{x_n\}$ 无限地接近于某一常数. 例如，在(1)中，随着 n 的无限增大，通项 $x_n = \frac{1}{n}$ 无限地趋近于零；在(2)中，随着 n 的无限增大，通项 $x_n = \frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1. 另一种情形是：当 n 无限增大时，通项 x_n 不趋近于任何常数. 例如在(3)中，数列通项 $x_n = (-1)^{n-1}$ 是在 1 和 -1 之间摆动；在(4)中，随着 n 的增大，其通项 $x_n = n^2+3$ 无限增大，它们都不趋近于任何常数.

为了从数学上描述上面(1)和(2)两个数列所具有的共同性质，我们给出了数列极限的概念：

定义 1 给定数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，其通项 x_n 无限的趋近于某一个常数 A，则称**数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限**，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，或者 $x_n \to A (n \to \infty)$.

当数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限时，称数列 $\{x_n\}$ **收敛于 A**，此时称 $\{x_n\}$ 为**收敛数列**. 如果数列 $\{x_n\}$ 不趋近于任何常数，即 $\{x_n\}$ 没有极限，则称**数列 $\{x_n\}$ 发散**.

由此可见，并不是所有数列都有极限. 求数列极限时，对于一些简单的情形，可以通过观察得到数列的极限，如例 1 中的(1)、(2)；有些稍微复杂的情形，可以先对数列的通项进行恒等变形加以简化，然后再观察它的极限.

例 2 设有数列 $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$（其中 q 是常数，满足 $|q| < 1$），求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 我们知道 $x_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$，由于 $|q| < 1$，根据指数函数的性质可知，当 n 无限增大时，q^{n+1} 无限趋近于零，所以 $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ 无限趋近于 $\frac{1}{1-q}$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-q}$.

二、函数的极限

对于函数的极限，根据自变量变化的过程，分两种情形讨论.

1. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

对于函数来说，$x \to \infty$ 可包含以下两种情况：

(1) x 取正值，无限增大，记作 $x\to+\infty$.

(2) x 取负值，它的绝对值无限增大，记作 $x\to-\infty$.

反过来，如果 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况都存在，则可以合并写成 $x\to\infty$.

讨论函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 的变化趋势(如图1.3). 由图可知，当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ (即 x 的绝对值无限增大)时，$y=\dfrac{1}{x}$ 的图像越来越和 x 轴接近，即 $\dfrac{1}{x}$ 的值越来越趋近于零.

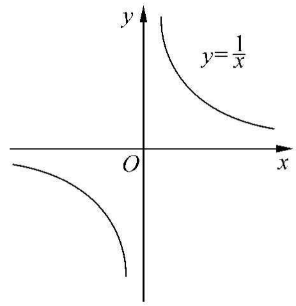


图 1.3

和数列极限类似，下面我们给出函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限定义.

定义 2　如果当 $|x|$ 无限增大($x\to\infty$)时，函数 $y=f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么常数 A 就叫做当 $x\to\infty$ 时**函数 $f(x)$ 的极限**. 记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，或者 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

按照此极限定义，上例即可表示为：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

类似的，如果当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时，函数 $f(x)$ 无限的趋近于一个常数 A，那么数 A 就叫做当 $x\to+\infty$(或 $x\to-\infty$)时函数 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$).

定理 1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 3　作出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图像，并判断下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$

解　分别作出函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 和 $y=2^x$ 的图像(如图1.4).

由图像可以看出：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$　　　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$

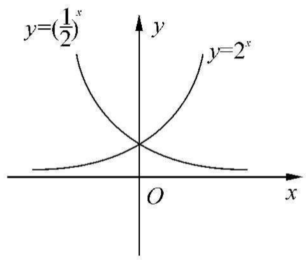


图 1.4

例 4　作出函数 $y=\arctan x$ 的图像，并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，且判断极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解　函数 $y=\arctan x$ 的图像如图1.5所示.

由图像可以看出：$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=2x+1$ 和函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$(如图1.6)当 $x\to1$ 时的函数值变化情况.

由图可以看出，当 x 从1的左右两侧同时趋近于1时，函数 $f(x)=2x+1$ 的值越来越

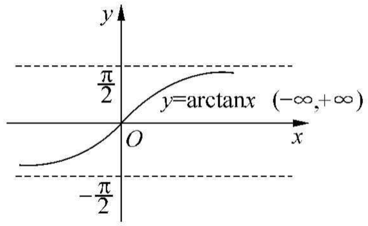


图 1.5

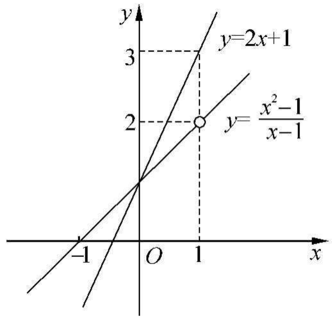


图 1.6

接近于3;对函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 来说,尽管它在 $x=1$ 处没有定义,但当 x 从 1 的左右两侧同时趋近于 1 时,它的值越来越接近于 2;对于函数的这种变化趋势,有下面定义:

定义 3 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某一邻域内有定义(x_0 可除外),如果当 x 无限趋近于 x_0(但 $x\neq x_0$)时,函数 $f(x)$ 的值无限接近于一个确定的常数 A,则称 A 为 **$f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**.记作:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,\text{或 } f(x)\to A(\text{当 } x\to x_0 \text{ 时}).$$

上面的极限分别记为 $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1)=3$ 和 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

由上面极限的定义及函数的图像,可得出下面结论:

$$\lim_{x\to x_0}c=c,\qquad \lim_{x\to x_0}x=x_0.$$

有时,当 x 从 x_0 的左右两侧趋近于 x_0 时,函数 $f(x)$ 的变化趋势完全不同或 $f(x)$ 仅在点 x_0 的某一侧(左侧或右侧)有定义.这时,我们就需要考察 x 从左右两侧趋近于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势,这就产生了左极限和右极限的概念.

定义 4 如果当 $x\to x_0^-$ 即从 x_0 的**左侧**趋近于 x_0(或 $x\to x_0^+$ 即从 x_0 **右侧**趋近于 x_0)时,**函数** $f(x)$ 无限接近于一个确定的**常数** A,则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**(或**右极限**),记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A).$$

左极限和右极限统称为**单侧极限**.$f(x)$ 在 x_0 点的左极限也可记为 $f(x_0-0)$,右极限也可记为 $f(x_0+0)$.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

例 5 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -\infty<x<0\\ x^2, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x<+\infty\end{cases}$$

试分别讨论当 $x\to 0$ 和 $x\to 1$ 时 $f(x)$ 的极限.

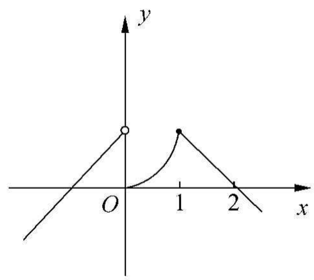


图 1.7

解 函数 $f(x)$ 的图像如图 1.7 所示.从图容易看出 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$,$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2=0$,因为

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，由定理 2 可知，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在；$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(2-x)=1$，由定理 2 可知，$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

三、极限的性质

性质 1(有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么存在着 x_0 的某一空心邻域，在这一空心邻域内，函数 $f(x)$ 有界.

性质 2(保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 且 $A>0$(或 $A<0$)，那么存在着 x_0 的某个空心邻域，当 x 在该邻域内时，就有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

【习题 1.2】

1.(口答) 当数列项数无限增加时，观察下列各数列的变化趋势.

(1) $1,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt4},\frac{1}{\sqrt5}\cdots$

(2) $-\frac12,\ \frac14,\ -\frac18,\ \frac1{16},\ -\frac1{32}\cdots$

(3) $\cos\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{2\pi}{2},\ \cos\frac{3\pi}{2},\ \cos\frac{4\pi}{2},\ \cos\frac{5\pi}{2}\cdots$

(4) $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[3]{5},\ \sqrt[3]{6}\cdots$

(5) $5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5\cdots$

2. 作出图像来判断下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac13\right)^x$　(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x$　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$　(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\cos x$　(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

3.(1) 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，作出函数的图像，求当 $x\to1$ 时的左右极限，并判断此函数当 $x\to1$ 时有无极限?

(2) 设 $f(x)=\frac{|x|}{x}$，作出函数的图像，求当 $x\to0$ 时的左右极限，并判断此函数当 $x\to0$ 时有无极限?

§1.3　无穷小与无穷大

一、无穷小

1. 无穷小的定义

定义 1　当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时，**函数** $f(x)$ 无限地**趋近于零**，则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$) 时为**无穷小量**，简称**无穷小**.

即极限为零的量为无穷小，例如函数 $f(x)=x-1$ 当 $x\to1$ 时为无穷小，$f(x)=\frac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时为无穷小.