《宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐目录》
推荐教辅图书
经人民教育出版社授权

配 人教版®

全新改版
更多精彩 为您呈现

宁夏专版

精讲精练
JINGJIANGJINGLIAN

高中数学
学生用书

选修2-2
（人教A）

《精讲精练》编写组 编

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

宁夏回族自治区教育厅中小学教辅材料评议推荐图书

宁夏专版

精讲精练

JINGJIANGJINGLIAN

高中数学

学生用书

选修 2-2

（人教A）

《精讲精练》编写组 编

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

精讲精练：人教A版：宁夏专版．高中数学．2-2：选修 /《精讲精练》编写组编．-- 银川：宁夏人民教育出版社，2014.8

ISBN 978-7-5544-0896-4

Ⅰ．①精… Ⅱ．①精… Ⅲ．①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第197151号

精讲精练 宁夏专版 高中数学 选修2-2(人教A) 《精讲精练》编写组 编

责任编辑 孙 莹 王 宁
封面设计 晨 皓
责任印制 殷 戈

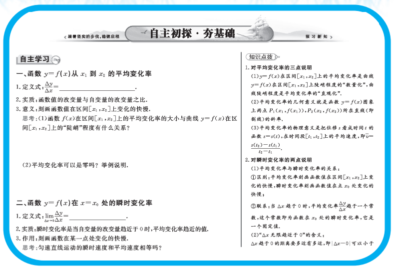
黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地 址 宁夏银川市北京东路139号出版大厦(750001)
网 址 www.yrpubm.com
网上书店 www.hh-book.com
电子信箱 jiaoyushe@yrpubm.com
邮购电话 0951-5014284
经 销 全国新华书店
印刷装订 宁夏雅昌彩色印务有限公司
印刷委托书号 (宁)0016211

开 本 890 mm×1240 mm 1/16
印 张 10.5
字 数 378千字
版 次 2014年8月第1版
印 次 2014年8月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5544-0896-4/G·2704

定 价 14.76元

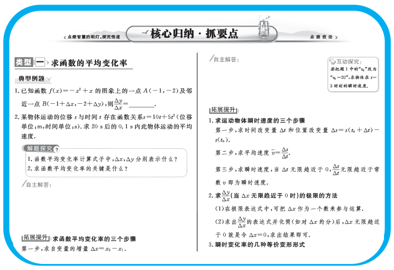
创新学习模式——稳步提升计划


自主初探·夯基础

自主预习

思考辨析 梳理基础

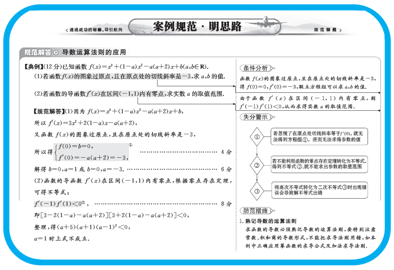
梳理教材主干
夯实基础知识
辨析易错易混
思考点拨提醒


核心归纳·抓要点

课堂探究

核心突破 典例探究

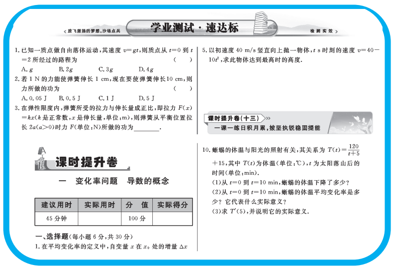
精选典型题目
总结解题规律
强化应用技能
突破重点难点


案例规范·明思路

案例规范

规范答题 案例探究

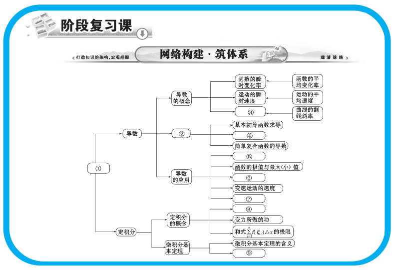
设置经典案例
明晰解题步骤
警示答题误区
累积应答技巧


学业测试·速达标

巩固提升

全面提升 课时巩固

习练基础试题
巩固考点知识
甄选经典试题
提升解题素能


阶段复习课
网络构建·筑体系

阶段整合

专题整合 阶段强化

构建知识体系
展现要素关系
纵横知识联系
归纳核心考点

目录

精讲精练　宁夏专版
高中数学选修2-2（人教A）

课堂学习案

第一章　导数及其应用
1.1　变化率与导数·1
1.1.1　变化率问题·1
1.1.2　导数的概念·1
1.1.3　导数的几何意义·4
1.2　导数的计算·8
第1课时　几个常用函数的导数与基本初等函数的导数公式·8
第2课时　导数的运算法则·11
1.3　导数在研究函数中的应用·14
1.3.1　函数的单调性与导数·14
1.3.2　函数的极值与导数·17
1.3.3　函数的最大(小)值与导数·21
1.4　生活中的优化问题举例·25
1.5　定积分的概念·28
1.5.1　曲边梯形的面积·28
1.5.2　汽车行驶的路程·28
1.5.3　定积分的概念·31
1.6　微积分基本定理·35
1.7　定积分的简单应用·38
1.7.1　定积分在几何中的应用·38
1.7.2　定积分在物理中的应用·41
阶段复习课·43

第二章　推理与证明
2.1　合情推理与演绎推理·46
2.1.1　合情推理·46
2.1.2　演绎推理·50
2.2　直接证明与间接证明·53
2.2.1　综合法和分析法·53
第1课时　综合法·53
第2课时　分析法·57
2.2.2　反证法·61
2.3　数学归纳法·64
阶段复习课·68

第三章　数系的扩充与复数的引入
3.1　数系的扩充和复数的概念·71
3.1.1　数系的扩充和复数的概念·71
3.1.2　复数的几何意义·74
3.2　复数代数形式的四则运算·77
3.2.1　复数代数形式的加、减运算及其几何意义·77
3.2.2　复数代数形式的乘除运算·80
阶段复习课·83

高效学习作业本

高效学习作业本（活页试卷）…… P85～P124
答案解析（单独成册）…………… P125～P164

聚焦助学技巧　突破疑难瓶颈

规范案例

- 用导数的定义求切线的方程·7
- 导数运算法则的应用·13
- 含参数极值的求解问题·20
- 函数最值在不等式问题中的应用·24
- 导数在解决实际问题中的应用·27
- 求曲边梯形的面积·30
- 求解分段函数的积分问题·37
- 演绎推理在函数中的应用·52
- 综合法在数列证明中的应用·56
- 用分析法证明不等式·60
- 反证法在证明问题中的应用·63
- 数学归纳法在证明不等式中的应用·67
- 利用复数在复平面内对应的点求参数的范围·76
- 复数运算中条件的合理应用·82

易错案例

- 对导数的概念理解不清致误·3
- 不能正确地利用导数的几何意义导致错误·10
- 误用函数单调递增(减)的充要条件致误·16
- 因忽视定积分的几何意义而导致错误·34
- 因忽视被积函数以及原函数导致计算错误·40
- 因忽视单位换算导致计算错误·42
- 对归纳推理的特征掌握不准确致误·49
- 忽视隐含条件而致误·73
- 复数运算中思维不严谨而致误·79

课堂学习案

第一章　导数及其应用

1.1　变化率与导数

1.1.1　变化率问题　1.1.2　导数的概念

踏着坚实的步伐，稳健启程　**自主初探·夯基础**　预习新知

自主学习

一、函数 $y=f(x)$ 从 x_1 到 x_2 的平均变化率

1. 定义式：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$______________.

2. 实质：函数值的改变量与自变量的改变量之比.

3. 意义：刻画函数值在区间$[x_1,x_2]$上变化的快慢.

思考：(1)函数 $f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的平均变化率的大小与曲线 $y=f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的"陡峭"程度有什么关系？

(2)平均变化率可以是零吗？举例说明.

二、函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率

1. 定义式：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$______________.

2. 实质：瞬时变化率是当自变量的改变量趋近于 0 时，平均变化率趋近的值.

3. 作用：刻画函数在某一点处变化的快慢.

思考：匀速直线运动的瞬时速度和平均速度相等吗？

三、导数的概念

1. 定义式：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=$______________.

2. 记法：$y'|_{x=x_0}$ 或______________.

3. 实质：函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数就是 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的__________.

判断：(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)函数在某一点的导数与 Δx 值的正、负无关.　(　　)

(2)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 处的导数值是 $\Delta x=0$ 时的平均变化率.　(　　)

(3)在导数的定义中，Δx，Δy 都不能为零.　(　　)

知识点拨

1. **对平均变化率的三点说明**

(1)$y=f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上的平均变化率是曲线 $y=f(x)$在区间$[x_1,x_2]$上陡峭程度的"数量化"，曲线陡峭程度是平均变化率的"直观化".

(2)平均变化率的几何意义就是函数 $y=f(x)$图象上两点 $P_1(x_1,f(x_1))$，$P_2(x_2,f(x_2))$所在直线(即割线)的斜率.

(3)平均变化率的物理意义是把位移 s 看成时间 t 的函数 $s=s(t)$，在时间段$[t_1,t_2]$上的平均速度，即$\bar{v}=\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$.

2. **对瞬时变化率的两点说明**

(1)平均变化率与瞬时变化率的关系：

①区别：平均变化率刻画函数值在区间$[x_1,x_2]$上变化的快慢，瞬时变化率刻画函数值在点 x_0 处变化的快慢；

②联系：当 Δx 趋于 0 时，平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$趋于一个常数，这个常数即为函数在 x_0 处的瞬时变化率，它是一个固定值.

(2)"Δx 无限趋近于 0"的含义：

Δx 趋于 0 的距离要多近有多近，即$|\Delta x-0|$可以小于给定的任意小的正数，且始终 $\Delta x\neq 0$.

3. **导数与瞬时变化率的关系**

导数是函数在 x_0 及其附近函数值的改变量 Δy 与自变量的改变量 Δx 之比的极限，它是一个局部性的概念，若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则函数 $y=f(x)$在 x_0 处有导数，否则不存在导数.

4. **导数的物理意义**

不同的物理量有着不同的物理意义.例如，变速直线运动路程 $s=s(t)$的导数，就是瞬时速度，即 $s'(t_0)=v(t_0)$.我们也常说路程函数 $s(t)$对时间的导数就是瞬时速度.

‹ 点燃智慧的明灯，探究悟道

核心归纳·抓要点

点拨技法 ›

类型一 求函数的平均变化率

典型例题

1.已知函数 $f(x)=-x^2+x$ 的图象上的一点 $A(-1,-2)$ 及邻近一点 $B(-1+\Delta x,-2+\Delta y)$，则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$________.

2.某物体运动的位移 s 与时间 t 存在函数关系 $s=10t+5t^2$(位移单位：m，时间单位：s).求 20 s 后的 0.1 s 内此物体运动的平均速度.

解题探究

1.函数平均变化率计算式子中，Δx，Δy 分别表示什么？

2.求函数平均变化率的关键是什么？

自主解答：

拓展提升 求函数平均变化率的三个步骤

第一步，求自变量的增量 $\Delta x=x_2-x_1$.

第二步，求函数值的增量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$.

第三步，求平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

【变式训练】求 $y=x^2$ 在 $x=x_0$ 附近的平均变化率.

类型二 求瞬时速度

典型例题

1.以初速度 $v_0(v_0>0)$ 垂直上抛的物体，t 秒时的高度为 $s(t)=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，则物体在 t_0 时刻的瞬时速度为________.

2.一个小球自由下落，它在下落 3 秒时的速度是多少？并说明它的意义(重力加速度为 9.8 m/s^2).

解题探究

1.运动物体的平均速度与瞬时速度有什么关系？

2.题 2 中“下落 3 秒时的速度”的含义是什么？

自主解答：

互动探究： 若把题 1 中的“v_0”改为“$v_0=20$”，求物体在 $t=3$ 时刻的瞬时速度.

拓展提升

1.求运动物体瞬时速度的三个步骤

第一步，求时间改变量 Δt 和位置改变量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$.

第二步，求平均速度 $\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

第三步，求瞬时速度，当 Δt 无限趋近于 0，$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 无限趋近于常数 v 即为瞬时速度.

2.求 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$(当 Δx 无限趋近于 0 时)的极限的方法

(1)在极限表达式中，可把 Δx 作为一个数来参与运算.

(2)求出 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的表达式并化简(如对 Δx 约分)后，Δx 无限趋近于 0 就是令 $\Delta x=0$，求出结果即可.

3.瞬时变化率的几种等价变形形式

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+n\Delta x)-f(x_0)}{n\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(x_0)$$

【变式训练】已知自由落体的运动方程为 $s(t)=5t^2$，则 t 在 2 到 $2+\Delta t$ 这一段时间内落体的平均速度为________，落体在 $t=2$ 时的瞬时速度为________.

类型三 求函数在某点处的导数

典型例题

1.若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=k$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+2\cdot\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 等于 (　　)

A. $2k$　B. k　C. $\frac{1}{2}k$　D. 以上都不是

2.求函数 $y=\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

解题探究

1.函数值增量 $f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)$ 与自变量的增量 Δx 不一致，此时应如何处理才可求函数的导数？

2.题 2 中求函数在 $x=1$ 处的导数的实质是什么？

自主解答:

【变式训练】求函数 $y=x-\frac{1}{x}$ 在 $x=1$ 处的导数.

拓展提升 求函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数的三个步骤

求函数的增量 → $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

↓

求函数的平均变化率 → $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

↓

取极限,得导数 → $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

简称:一差、二比、三极限.

破译思维的密码,点拨迷津

案例展示·析误区

规避误区

易错误区 对导数的概念理解不清致误

【典例】若函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的导数为 m,那么 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a-2\Delta x)}{\Delta x}$ 的值为________.

【解析】$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a-2\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)+f(a)-f(a-2\Delta x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a)-f(a-2\Delta x)}{\Delta x}$

$=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}+2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a-2\Delta x)-f(a)}{-2\Delta x}$

$=2m+2m$①$=4m$.

答案:$4m$

【类题试解】已知函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导,且 $x_0\in(a,b)$,则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$ 的值为　(　　)

A. $f'(x_0)$　　B. $2f'(x_0)$

C. $-2f'(x_0)$　　D. 0

误区警示

错解:求得的值为 $2m$

↓

错因:不能正确地把已知条件转化为平均变化率的极限,误认为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=m$,从而导致错误

防范措施

弄清导数的含义

函数在某一点的导数,是该点函数平均变化率的极限,函数在某一点自变量的增量,既可以是正数,也可以是负数,导数是函数值的改变量与"相应"自变量改变量的极限,如本例中

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}$ 与 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a-2\Delta x)-f(a)}{-2\Delta x}$ 均为函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的导数的表达式.

放飞激扬的梦想,沙场点兵　**学业测试·速达标**　检测实效

1.已知物体做自由落体运动的方程为$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$,若Δt无限趋近于0时,$\frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t}$无限趋近于9.8 m/s,那么下列关于9.8 m/s正确的说法是　(　　)

A.物体在0～1 s这一段时间内的速度

B.物体在1～(1+Δt)s这段时间内的速度

C.物体在$t=1$ s这一时刻的速度

D.物体从1 s到(1+Δt)s这段时间内的平均速度

2.已知函数$y=3x-x^2$在$x=2$处的自变量增量为$\Delta x=0.1$,则Δy为　(　　)

A.-0.11　B.1.1　C.3.80　D.0.29

3.如果某物体的运动方程是$s=2(1-t)^2$,则在$t=1.2$秒时的瞬时速度是　(　　)

A.4　B.-4　C.4.8　D.0.8

4.已知函数$f(x)$在$x=1$处的导数为1,则

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1+x)}{3x}=$　(　　)

A.3　B.$-\frac{2}{3}$　C.$\frac{1}{3}$　D.$-\frac{3}{2}$

5.函数$f(x)=x^2+3x$在$x=2$处的导数为________.

6.求函数$f(x)=\frac{1}{x}$在$x=2$处的平均变化率,并求出该点的导数.

课时提升卷(一)

一课一练日积月累,披坚执锐稳固提能

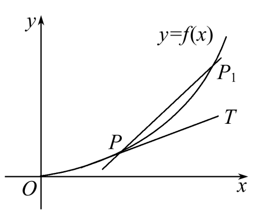
1.1.3　导数的几何意义

踏着坚实的步伐,稳健启程　**自主初探·夯基础**　预习新知

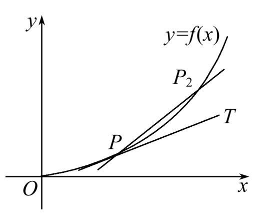
自主学习

一、导数的几何意义

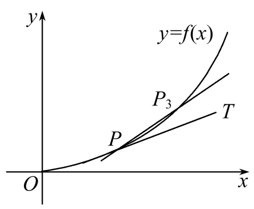
1.切线的概念:如图,对于割线PP_n,当点P_n趋近于点P时,割线PP_n趋近于确定的位置,这个确定位置的直线PT称为点P处的________.



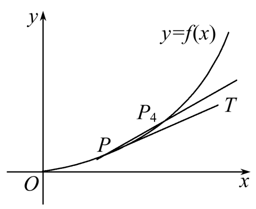
(1)



(2)



(3)



(4)

知识点拨

1.对切线的三点说明

(1)曲线上一点是否有切线,要根据割线是否有无限趋近的位置来判断.若有,则在此点有切线,且切线是唯一的;若没有,则在此点处无切线.

(2)曲线的切线并不一定与曲线只有一个公共点,可以有多个公共点.

(3)若函数$f(x)$在点x_0处有导数,则在该点处函数$f(x)$的曲线必有切线,且导数值是该切线的斜率.若函数$f(x)$在x_0处导数不存在,则在该点处的切线斜率不存在,但切线存在,切线的倾斜角为直角.

2.函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$、导函数$f'(x)$之间的区别与联系

(1)函数在一点处的导数$f'(x_0)$,就是在该点处函数值的改变量与自变量的改变量之比的极限值,它是一个常数,不是变数.

(2)导函数是指函数在某一区间内任一点x的导数构成的函数.

2. 导数的几何意义：函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数就是切线 PT 的斜率 k，即 $k=$____________.

思考：割线 PP_n 的斜率 k_n 与切线 PT 的斜率 k 有什么关系？

(3)函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 处的函数值，这也是求函数在点 x_0 处的导数的方法之一.

学习微博

二、导函数的概念

1. 定义：当 x 变化时，______便是 x 的一个函数，我们称它为 $f(x)$ 的导函数(简称______).
2. 记法：$f'(x)$ 或 y'，即 $f'(x)=y'=$____________.

判断：(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)导函数 $f'(x)$ 的定义域与函数 $f(x)$ 的定义域相同.　(　　)

(2)函数 $f(x)=x^2$ 的导数是 $f'(x)=2x$.　(　　)

(3)函数 $f(x)=0$ 没有导函数.　(　　)

点燃智慧的明灯，探究悟道

核心归纳 · 抓要点

点拨技法

类型一　求曲线上在一点处切线的方程

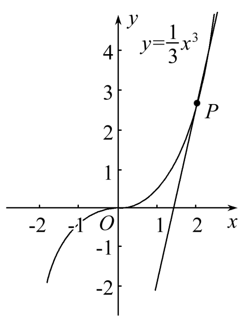
典型例题

1. 曲线 $y=\frac{1}{2}x^2-2$ 在点 $(1,-\frac{3}{2})$ 处的切线方程为________.

2. 如图，已知曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 上一点 $P(2,\frac{8}{3})$，

求：(1)点 P 处的切线的斜率.

(2)点 P 处的切线方程.



解题探究

1. 求曲线上一点的切线方程的关键是什么？
2. (1)曲线 $y=\frac{1}{3}x^3$ 在 $x=2$ 处的导数的意义是什么？

(2)过点 $P(x_0,y_0)$，斜率为 k 的直线方程是什么？

自主解答：

拓展提升

1. 求函数 $y=f(x)$ 的导数的三个步骤

(1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

(3) $y'=f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

2. 求曲线上某点处的切线方程的基本步骤

(1)求出该点的坐标.

(2)求出函数在该点处的导数，即曲线在该点处的切线的斜率.

(3)利用点斜式写出切线方程.

【变式训练】求曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点 $\left(\frac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率，并写出切线方程.

类型二　求切点的坐标

典型例题

1. 曲线 $y=x^3$ 在点 P 处的切线斜率为 3，则点 P 的坐标为______.

2. 直线 $l:y=x+a(a\neq 0)$ 和曲线 $C:y=x^3-x^2+1$ 相切.
   (1)求 a 的值.
   (2)求切点的坐标.

解题探究

1. 曲线上一点切线的斜率与该点的导数有什么关系？
2. 切点的坐标满足切线方程吗？是否也满足曲线的方程？

自主解答：

互动探究： 若把题 1 中的"点 P 处的切线斜率为 3"变为"点 P 处的切线与直线 $x+y=0$ 垂直"，结果如何？

拓展提升

1. **求切点坐标的一般思路**
   (1)先设切点坐标 (x_0,y_0).
   (2)求导函数 $f'(x)$.
   (3)求切线的斜率 $f'(x_0)$.
   (4)由斜率间的关系列出关于 x_0 的方程，解方程求 x_0.
   (5)由于点 (x_0,y_0) 在曲线 $y=f(x)$ 上，将 x_0 代入求 y_0，得切点坐标.
2. **切点问题的处理方法**
   (1)由条件得到直线的倾斜角或斜率，由这些信息得知函数在某点的导数，进而求出点的横坐标.
   (2)解决这些问题要注意和解析几何的知识联系起来，如直线的倾斜角和斜率的关系，两直线平行或垂直与斜率的关系等.

类型三　导数几何意义的综合应用

典型例题

1. 曲线 $y=\frac{1}{x}$ 和 $y=x^2$ 在它们交点处的两条切线与 x 轴所围成的三角形的面积是________.

2. 已知 $f(x)=x^2,g(x)=x^3$.
   (1)求 $f'(x),g'(x)$，并判断 $f'(x)$ 和 $g'(x)$ 的奇偶性.
   (2)若对于所有的实数 x，$f'(x)-2<ag'(x)$ 恒成立，试求实数 a 的取值范围.

解题探究

1. 已知曲线方程，如何求两条曲线的交点的坐标？
2. 奇函数、偶函数的判断方法是什么？不等式 $ax^2+bx+c>0$ 恒成立的充要条件是什么？

自主解答：

拓展提升　**导数几何意义应用问题的解题策略**

(1)导数几何意义的应用问题往往涉及解析几何的相关知识，如直线斜率与方程以及直线间的位置关系等，因此要综合应用所学知识解题.
(2)解题的关键是函数在某点处的导数，已知切点可以求斜率，已知斜率也可以求切点，切点的坐标是常设的未知量.
(3)一定要区分曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线与过点 $P(x_0,f(x_0))$ 的切线的不同，前者 P 为切点，后者 P 不一定为切点.

【变式训练】 求证：函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 图象上各点处的切线斜率都小于 1.

速递成功的秘籍，导引航向

案例规范·明思路

规范解题

规范解答 用导数的定义求切线的方程

【典例】(12分)已知函数$f(x)=x^3-3x$及$y=f(x)$上一点$P(1,-2)$，求过点P与曲线$y=f(x)$相切的直线方程.

【规范解答】$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-3(x+\Delta x)-x^3+3x}{\Delta x}=3x^2-3$①.

…………………………………………………… 2分

设切点坐标为$(x_0,x_0^3-3x_0)$②，

则直线l的斜率$k=f'(x_0)=3x_0^2-3$，

所以直线l的方程为$y-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(x-x_0)$. ……… 4分

又直线l过点$P(1,-2)$，所以$-2-(x_0^3-3x_0)=(3x_0^2-3)(1-x_0)$，

所以$2x_0^3-3x_0^2+1=(x_0-1)^2(2x_0+1)=0$③，

解得$x_0=1$或$x_0=-\dfrac{1}{2}$. …………………………………… 6分

故所求直线斜率为$k=3x_0^2-3=0$或$k=3x_0^2-3=-\dfrac{9}{4}$，

于是$y-(-2)=0\cdot(x-1)$或$y-(-2)=-\dfrac{9}{4}(x-1)$，

即$y=-2$或$y=-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{4}$. ………………………… 10分

故过点$P(1,-2)$的切线方程为

$y=-2$或$y=-\dfrac{9}{4}x+\dfrac{1}{4}$. ………………………… 12分

条件分析

已知点$P(1,-2)$是曲线$y=x^3-3x$上的点，可以利用导数的几何意义，求切线的方程.但不知该点是否为切点，所以切线方程可能有多种情况.

失分警示

① 若不能正确地求出①处的导数，弄错切线的斜率，会导致本例不得分

② 若漏掉②处，误认为点(1，-2)为唯一的切点，忽略过点(1，-2)，切点为$(x_0,x_0^3-3x_0)$的切线，从而仅求得一条切线，本例最多得5分

③ 若不能正确地得到③式，即没能正确地写出过点$(x_0,x_0^3-3x_0)$的直线方程，则不能求出x_0的两个值，此种情况最多得6分

防范措施

1. 记清常用的公式

利用导数的定义求曲线上某一点的导数，要记清导数的表达式，化简后求极限时的式子要有意义，如本例中求得$y'=3x^2-3$.

2. 理清切点的实质

在求切线方程的过程中，关键是寻找两个条件：一是切点，二是切线的斜率.其中切点又是关键，需要找清切点，如本例中点$P(1,-2)$不一定是切点，做题时要高度关注.

【类题试解】求抛物线$y=x^2$过点$\left(-\dfrac{5}{2},-6\right)$的切线方程.

放飞激扬的梦想，沙场点兵

学业测试·速达标

检测实效

1. 设$f'(x_0)=0$，则曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线 (　　)

A. 不存在　　B. 与x轴平行或重合

C. 与x轴垂直　　D. 与x轴斜交

2. 如果曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线方程为$x+2y-3=0$，那么 (　　)

A. $f'(x_0)>0$　　B. $f'(x_0)<0$

C. $f'(x_0)=0$　　D. $f'(x_0)$不存在

3. 若曲线$y=f(x)$在x_0处的切线的斜率为k，

则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$________.

4. 曲线$y=x^2$在点$P(1,1)$处的切线的方程为________.

5. 函数$y=x^2+4x$在$x=x_0$处的切线斜率为2，则$x_0=$________.

6. 求曲线$y=x^3$在点$(3,27)$处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积.

课时提升卷(二)

一课一练日积月累，披坚执锐稳固提能

1.2　导数的计算

第 1 课时　几个常用函数的导数与基本初等函数的导数公式

踏着坚实的步伐,稳健启程　**自主初探 · 夯基础**　预习新知

自主学习

一、几个常用函数的导数

1. 若 $y=f(x)=c$,则 $f'(x)=$______.
2. 若 $y=f(x)=x$,则 $f'(x)=$______.
3. 若 $y=f(x)=x^2$,则 $f'(x)=$______.
4. 若 $y=f(x)=\frac{1}{x}$,则 $f'(x)=$______$=$______.
5. 若 $y=f(x)=\sqrt{x}$,则 $f'(x)=$______.

思考:正比例函数的图象特点与导数的关系是什么?

二、基本初等函数的导数公式

1. 若 $f(x)=c$(c 为常数),则 $f'(x)=$______.
2. 若 $f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{Q}^*)$,则 $f'(x)=$______.
3. 若 $f(x)=\sin x$,则 $f'(x)=$______.
4. 若 $f(x)=\cos x$,则 $f'(x)=$______.
5. 若 $f(x)=a^x$,则 $f'(x)=$______.
6. 若 $f(x)=\mathrm{e}^x$,则 $f'(x)=$______.
7. 若 $f(x)=\log_a x$,则 $f'(x)=$______.
8. 若 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=$______.

判断:(正确的打"√",错误的打"×")

(1)若 $f'(x)=\sin x$,则 $f(x)=\cos x$.　(　　)

(2)指数函数的导数还是同底数的指数函数.　(　　)

(3)若 $f(x)=x^3$,则 $f'(x)=3x^2$.　(　　)

知识点拨

1. 对常数函数导数的几何意义与物理意义的理解

(1)常数的导数为 0,其几何意义为 $f(x)=c$ 在任意点处的切线平行于 x 轴,其斜率为 0.

(2)若 $y=c$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=0$ 可以解释为某物体的瞬时速度始终为 0,即一直处于静止状态.

2. 正比例函数 $y=x$ 的导数的几何意义和物理意义

(1)正比例函数 $y=x$ 的图象是过原点的直线,直线上每一点处的切线都是直线 $y=x$,斜率都为 1,即 $y'=1$.

(2)若 $y=x$ 表示路程关于时间的函数,则 $y'=1$ 可以解释为某物体做瞬时速度为 1 的匀速直线运动.

3. 基本初等函数的导数公式的特点

(1)常数函数的导数为零.

(2)有理数幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$ 的导数依然为幂函数,且系数为原函数的次数,幂指数是原函数的幂指数减去 1.

(3)正弦函数的导数为余弦函数,余弦函数的导数为正弦函数的相反数.

(4)指数函数的导数依然为指数函数,且系数为原函数底数的自然对数.

点燃智慧的明灯,探究悟道　**核心归纳 · 抓要点**　点拨技法

类型一　利用导数公式求函数的导数

典型例题

1. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$,则 $f'(2)=$　(　　)

A. 4　B. $\frac{1}{4}$　C. -4　D. $-\frac{1}{4}$

2. 设 $f_0(x)=\sin x$,$f_1(x)=f_0'(x)$,$f_2(x)=f_1'(x)$,…,$f_{n+1}(x)=f_n'(x)$,$n\in\mathbf{N}$,则 $f_{2\,013}(x)$等于　(　　)

A. $\sin x$　B. $-\sin x$　C. $\cos x$　D. $-\cos x$

3. 求下列函数的导数:

(1) $y=3^x$. (2) $y=\log_2 x$.

(3) $y=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. (4) $y=\sqrt[4]{x^3}$.

解题探究

1. 若 $f(x)=\frac{1}{x^2}$,则 $f'(a)$的含义是什么?
2. 正弦函数 $y=\sin x$ 的导数是什么?
3. 求函数导数时,如果所求函数不能直接应用公式,应如何求解?

自主解答:

拓展提升

1. **用公式求函数导数的方法**

(1)若所求函数符合导数公式,则直接利用公式求解.

(2)对于不能直接利用公式的类型,关键是合理转化函数的关系式为可以直接应用公式的基本函数的模式,如 $y=\frac{1}{x^4}$ 可以写成 $y=x^{-4}$,$y=\sqrt[5]{x^3}$ 可以写成 $y=x^{\frac{3}{5}}$ 等,这样就可以直接使用幂函数的求导公式求导,以免在求导过程中出现指数或系数的运算失误.

2. **周期性问题处理方法**

如果所求的问题具有周期性,可通过观察先写出所求问题前几项,从写出的几项中找出周期,再把所求的问题转化到已知的前几项求解.

【变式训练】求下列函数的导数:

(1)$y=x^7$.(2)$y=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

(3)$y=\ln 3$.(4)$y=x\sqrt{x^3}$.

类型二　导数几何意义的应用

典型例题

1.(2014·江西高考)若曲线 $y=x\ln x$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x-y+1=0$,则点 P 的坐标是________.

2.已知两条曲线 $y=\sin x$,$y=\cos x$,是否存在这两条曲线的一个公共点,使在这一点处,两条曲线的切线互相垂直?并说明理由.

解题探究

1.曲线 $y=x\ln x$ 在点 P 处切线的斜率是多少?

2.两条直线互相垂直的条件是什么?

自主解答:

拓展提升

1. **利用导数的几何意义解决切线问题的两种情况**

(1)若已知点是切点,则在该点处的切线斜率就是该点处的导数.

(2)如果已知点不是切点,则应先设出切点,再借助两点连线的斜率公式进行求解.

2. **探索性问题的解题策略**

(1)直接从给出的结论入手,寻求成立的充分条件.

(2)直接从给出的条件入手,寻求结论.

(3)假设结论存在(或不存在),然后经过推理求得符合条件的结果(或导出矛盾)等.

3. **利用导数公式求切线方程的步骤**

(1)利用导数公式求 $f'(x_0)$.

(2)写出切线方程 $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$,并整理成一般式.

类型三　导数的实际应用

典型例题

1.设曲线 $y=\sqrt{x}$ 上有点 $P(x_1,y_1)$,与曲线切于点 P 的切线为 m,若直线 n 过 P 且与 m 垂直,则称 n 为曲线在点 P 处的法线,设 n 交 x 轴于点 Q,又作 $PR\perp x$ 轴于 R,则 RQ 的长为________.

2.已知直线 $x-2y-4=0$ 与抛物线 $y^2=x$ 相交于 A,B 两点,O 为坐标原点,试在抛物线的弧 AB 上求一点 P,使△ABP 的面积最大.

解题探究

1.如何求函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数?已知直线的方程如何求直线与 x 轴交点的坐标?

2.如何确定三角形面积最大?题目中隐含的 P 点所满足的条件是什么?

自主解答:

拓展提升 **导数的综合应用的解题技巧**

(1)导数的几何意义为导数和解析几何的沟通搭建了桥梁,很多综合问题我们可以数形结合,巧妙利用导数的几何意义,即切线的斜率建立相应的未知参数的方程来解决,这往往是解决问题的关键所在.

(2)导数作为重要的解题工具,常与函数、数列、解析几何、不等式等知识结合出现综合大题.遇到解决一些与距离、面积相关的最值、不等式恒成立等问题,可以结合导数的几何意义分析.

【变式训练】已知曲线 $y=\frac{1}{x^3}$ 在点 $P(-1,-1)$ 处的切线与直线 m 平行且距离等于 $\sqrt{10}$,求直线 m 的方程.

案例展示·析误区

破译思维的密码，点拨迷津　　规避误区

易错误区 不能正确地利用导数的几何意义导致错误

【典例】已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=e^x$ 的切线，则 k 的值等于________.

【解析】设切点的坐标为 (x_0,y_0)，

因为 $y=e^x$ 在 (x_0,y_0) 的导数为 e^{x_0}，

所以 $e^{x_0}=\dfrac{y_0}{x_0}$ 且 $y_0=e^{x_0}$ ①，

解得 $x_0=1$，$y_0=e$. $k=\dfrac{y_0}{x_0}=e$.

答案：e

【类题试解】已知直线 $y=kx$ 是曲线 $y=\ln x$ 的切线，则 k 的值等于　(　　)

A. e　　B. $-e$　　C. $\dfrac{1}{e}$　　D. $-\dfrac{1}{e}$

误区警示

错解 → k 的值等于 $\dfrac{1}{e}$

错因 → 不能根据题目条件得到①处的方程，求不出切点坐标，从而导致答案错误

防范措施

1. 导数几何意义的应用

本例实质是求过点(0,0)且与曲线 $y=e^x$ 相切的直线方程的斜率.要把切线的斜率与导数联系起来，要注意切点的坐标既满足切线方程又满足曲线方程.

2. 牢记导数公式

导数公式是计算函数导数的关键，在本例中，要正确应用 $(e^x)'=e^x$ 这个公式，在应用的基础上牢固掌握.

学业测试·速达标

放飞激扬的梦想，沙场点兵　　检测实效

1. 下列结论正确的个数为　(　　)

①$y=\ln 2$，则 $y'=\dfrac{1}{2}$；

②$y=\cos x$，则 $y'|_{x=\frac{\pi}{6}}=-\dfrac{1}{2}$；

③$y=2^x$，则 $y'=2^x\ln 2$；

④$y=\log_5 x$，则 $y'=\dfrac{1}{x\ln 5}$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

2. 曲线 $y=x^n$ 在 $x=2$ 处的导数为 12，则 n 等于　(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知 $f(x)=\ln x$，则 $f(1)+f'(1)=$　(　　)

A. 1　　B. -2　　C. 0　　D. 2

4. 质点的运动方程是 $s=\dfrac{1}{t^4}$(其中 s 的单位是 m，t 的单位是 s). 质点在 $t=3$s 时的速度是________.

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，且 $f'(a)-f(a)=-2$，则 $a=$________.

6. 求曲线 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在点(8,4)处的切线方程.

课时提升卷(三)

一课一练日积月累，拔坚执锐稳固提能

第 2 课时　导数的运算法则

踏着坚实的步伐，稳健启程　**自主初探·夯基础**　预习新知

自主学习

一、导数的四则运算法则

条件：$f(x)$，$g(x)$是可导的.

结论：(1)$[f(x)\pm g(x)]'=$____________.

(2)$[f(x)g(x)]'=$________________.

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=$________________.

思考：如果 $f(x)$的导数为 $f'(x)$，c 为常数，那么如何求函数 $f(x)+c$ 与$cf(x)$的导数？

二、复合函数的求导公式

1. 复合函数的定义：(1)一般形式是________.
   (2)可分解为________与________，其中 u 称为________.
2. 求导法则：复合函数 $y=f(g(x))$的导数和函数 $y=f(u)$，$u=g(x)$的导数间的关系为：$y'_x=$__________.

判断：(正确的打"√"，错误的打"×")

(1)函数 $f(x)=xe^x$ 的导数为 $f'(x)=e^x(x+1)$.　(　　)

(2)函数 $f(x)=\sin(-x)$的导数为 $f'(x)=\cos x$.　(　　)

(3)函数 $f(x)=\ln\sin|x|$由 $y=\ln u$，$u=\sin|x|$复合而成.　(　　)

知识点拨

1. 熟练掌握导数的四则运算法则

几个函数的和函数的导数等于各个函数的导数的和，要注意区分两个函数的积函数的导数与两个函数的商函数的导数公式的不同，两个函数的积函数的导数是和的形式，满足加法"交换律"，两个函数的商函数的导数的分子是差的形式，不满足"交换律".

2. 对复合函数求导法则的四点说明

(1)分析清楚复合函数的复合关系是由哪些基本函数复合而成，适当选定中间变量.

(2)分步计算中的每一步都要明确是对哪个变量求导，而其中特别要注意的是中间变量.

(3)根据基本函数的求导公式及导数的运算法则，求出各函数的导数，并把中间变量转换成自变量的函数.

(4)复合函数求导熟练以后，中间步骤可以省略，不必再写出函数的复合过程，对于经过多次复合及四则运算而成的复合函数，可以直接应用公式和法则，从最外层开始由外及里逐层求导.

点燃智慧的明灯，探究悟道　**核心归纳·抓要点**　点拨技法

类型一　应用导数的运算法则求导

典型例题

1. 设 $f(x)=(2x-1)(3-x)$，则 $f'(0)=$________.
2. 分别求下列函数的导数：
   (1)$y=x\sin x$.(2)$y=\tan x$.

解题探究

1. 积函数 $f(x)g(x)$的导数是什么？
2. 导数的除法法则是什么？

自主解答：

拓展提升　求函数的导数的策略

(1)先区分函数的运算特点，即函数的和、差、积、商，再根据导数的运算法则求导数.

(2)对于三个以上函数的积、商的导数，依次转化为"两个"函数的积、商的导数计算.

【变式训练】分别求下列函数的导数：

(1)$y=x\cdot\sin x\cdot\ln x$.(2)$y=\dfrac{\cos x}{\sin x}$.

类型二　复合函数的导数

典型例题

1. 已知 $f(x)=(x^2+1)^2$ 的导数为 $f'(x)$，则 $f'(1)=$________.

2. 分别求下列函数的导数：

(1) $y=e^{5+4x^2}$．(2) $y=\sin(-2x)+\cos(-2x)$．

解题探究

1. 题 1 中，函数由哪些基本函数复合而成？
2. 题 2(2)函数求导时，可以先化简吗？

自主解答：

互动探究： 若题 2(2)改为 $y=\sin(-2x)\cos(-2x)$，则 $y'|_{x=\frac{\pi}{2}}=$________.

拓展提升

1. 求复合函数的导数的步骤

- 分层 — 选择中间变量，写出构成它的内、外层函数
- ↓
- 分别求导 — 分别求各层函数对相应变量的导数
- ↓
- 相乘 — 把上述求导的结果相乘
- ↓
- 变量回代 — 把中间变量回代

2. 求复合函数的导数的注意点

(1) 内、外层函数通常为基本初等函数．

(2) 求每层函数的导数时注意分清是对哪个变量求导，这是求复合函数导数时的易错点．

【变式训练】 分别求下列函数的导数：

(1) $y=\ln(2x^2+3x+4)$．

(2) $y=\sin^4x+\cos^4x$．

类型三　与切线有关的综合问题

典型例题

1. 函数 $y=2\cos^2x$ 在 $x=\frac{\pi}{12}$ 处的切线斜率为________.

2. 已知函数 $f(x)=ax^2+\ln x$ 的导数为 $f'(x)$，

(1) 求 $f(1)+f'(1)$．

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 存在垂直于 y 轴的切线，求实数 a 的取值范围．

解题探究

1. 导数的几何意义是什么？
2. 题 2 中，由曲线 $y=f(x)$ 存在垂直于 y 轴的切线，能得到什么结论？

自主解答：

拓展提升 关于复合函数导数的应用及其解决方法

(1) 应用：复合函数的导数应用主要有：求在某点处的切线方程，已知切线的方程或斜率求切点，以及涉及切线问题的综合应用．

(2) 方法：先求出复合函数的导数，若已知切点则求出切线斜率、切线方程；若切点未知，则先设出切点，用切点表示切线斜率，再根据条件求切点坐标．总之，切点在解决此类问题时起着至关重要的作用．

【变式训练】 1.(2013・广东高考)若曲线 $y=kx+\ln x$ 在点 $(1,k)$ 处的切线平行于 x 轴，则 $k=$________.

2.(2014・江苏高考)在平面直角坐标系 xOy 中，若曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$ (a,b 为常数)过点 $P(2,-5)$，且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行，则 $a+b$ 的值是________.