同济五版

高等数学配套辅导教材

（同时适用于四版）

高等数学

全真课堂

（上下册合订本）

主编：北京大学数学科学学院

詹瑞清　卢海敏

考点精要　习题全解

过程提示　题型归纳

应试技巧　全真模拟

学苑出版社

高等数学全真课堂

（上、下册合订本）

詹瑞清　卢海敏　主编

学　苑　出　版　社

内容提要

本书是同济大学主编的《高等数学》第五版的配套复习参考书，为上、下册合订本，分别对书中的基本概念做了详尽的剖析，并通过大量的考研真题和典型例题帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力.

在每章的开头，有本章内容简介、考点精要和考点分析表（自1990年后考研数学一试卷中考到的知识点的分数分布统计表）；每章的结尾，有本章考研大纲要求. 每章的每节又分为三部分：第一部分以表格的形式给出了本节的基本概念、性质及定理，其中"说明"和"注意"是剖析该概念的内涵和强调对该概念理解上易出错的地方，第二部分是常考题型，列出了在考研及平时考试中可能遇到的各类题型，题型分析说明了该题型的特点及具体解题方法，所给的例子以历年考研真题及典型例题为主，详尽的解题步骤及"纸上VCD"——注解，让读者能快速掌握各类题型的解题方法及技巧. 第三部分是小结，概括本节的所有题型. 每章结尾部分还包括：一、自测题及相应的答案与提示，旨在帮助读者复习并检验对本章的知识点及主要题型的掌握程度. 二、配备了同济大学主编的《高等数学》第五版本章的部分习题详解，以备读者在学习过程中使用.

本书可供理、工、医、农等非数学专业的大学生及从事高等数学教学的教师使用，本书也可作为考研数学的复习参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全真课堂
詹瑞清，卢海敏主编.
-北京：学苑出版社，2002.8
ISBN 7-5077-1842-5

Ⅰ. 高…
Ⅱ. ①詹… ②卢…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第048973号

出版发行：学苑出版社
地　址：北京万寿路西街11号　邮编：100036
印　刷：河北保定华泰印刷厂
经　销：新华书店

开本：850×1168　1/32　印张：26.25
2002年9月第1版　2002年9月第1次印刷
印数：1－8000册

定价：28.00元

前　言

读同济大学应用数学系主编的《高等数学》(第五版),该书逻辑严密,说理清晰,层次分明,不愧为大手笔,大制作。而这本《高等数学全真课堂》作为同济大学主编的《高等数学》的配套复习参考书,正是为了让千千万万的莘莘学子突破高等数学学习和考试的瓶颈孕育而生的,两者相得益彰,桴鼓呼应。

仔细研读《高等数学全真课堂》后,会发现,本书不仅可以帮助同学们建立起巩固的知识,开拓思维模式,更可帮助大家在解题方法、思路上有一个质的飞跃,在高等数学考试的战场上,使同学们超群绝伦,稳操必胜之券!新颖独特的编写思路,高屋建瓴的优化设计,使《高等数学全真课堂》是值得向同学们倾力推荐的——

特色一:抽丝剥茧,归纳原理与方法

万事万物万变不离其宗,都含有其最根本的东西,数学也是如此,无论题型如何纷繁复杂,其中必含有其根本的原理与方法,只要找到了这些原理与方法,便可对症下药。

本书的基本概念、性质及定理部分就是这样的原理与方法,它对各个概念、性质和定理进行了详细的说明并指出了注意事项。以表格的形式归纳出来,令人一目了然,同时便于同学们对比各个概念、性质、定理,使同学们在比较中加深理解,使知识更加系统化。只要掌握了这些原理就等于找到了解决问题所需的一切工具,同时各章的考点精要及分析部分,对各章重点进行了全面分析,从而确保同学们的学习有的放矢,达到事半功倍的效果。

特色二:举一反三,掌握常考题型

有了解题的工具怎样才能达到成功的彼岸呢?关键在于多见多练。见多了就熟了,熟透了就懂了;练多了就准了,又熟又准就快了。变所欲为,易于反掌——这是笨办法,但这是每一个人都能做到的。而本书的常考

题型，就是通过对历年来考研试题中出现的一些典型例题进行详尽的阐述，旨在帮助同学们在以后的解题过程中举一反三，触类旁通。总结历年考生的备考经验，大多数人都做过大量的真题和典型例题——当然，做到后来就不必再中规中矩，只认题型想解法即可。

特色三：熟能生巧，检测、巩固知识点

本书的各章自测题就是在同学们对各章内容有了全面了解之后，给同学们一个检测、巩固的机会，对各种题型有个深刻的了解，从而下笔如有神。同时，也使同学们对各个知识点有更为深刻的理解，达到以此类推，互为贯通。

特色四：指点迷津，提升应试准确性

本书对《高等数学》(同济五版)各章、节中出现的比较难的练习题都给出了详尽的答案，用以点拨解题方法供在学习过程中参考。帮助同学们在学习过程中不断检测自己，从而不断提高应试的准确性。因为会做题，不等于能做对题，准确性靠多练，临场自信靠平时的准确性。

题海浩淼，题型繁多，无穷于天地，不绝于江河，无人能对所有的题都进行了解。虽然本书限于篇幅所举有限，但认真研习之，不徐不疾，得之于手而应于心，必可以不变应万变！

题海书山，敢问路在何方？《高等数学全真课堂》告诉你：路在脚下。

编　者

2002 年 8 月于北大燕园

目　　录

第一章 函数与极限

在本章里，我们首先学习了函数及其相关概念，并介绍了函数的四个基本性质和几个常用的初等函数；接着讨论了序列、函数的极限，包括各种情况下极限的定义形式和几种不同函数形式求极限的常用方法；然后研究了无穷小量和无穷大量，包括无穷小的比较；最后说明了函数的连续性，并且介绍了利用连续函数的性质求解一些常见命题的方法. 本章知识是高等数学的基础，极限概念和求极限运算贯穿了高等数学的始终，因此本章需要重点理解的是极限的概念及其本质.

考点精要及分析

复合函数，特别是分段函数的复合；极限的概念，极限存在准则，求极限的方法（求极限的方法主要有：极限四则运算法则、两个重要的极限、等价无穷小代换、夹逼准则和单调有界准则）；无穷小的阶；函数间断点的类型；有限区间上连续函数的介值定理和最大最小值定理. 以历年考研数学考点分析为例，可见上述为本章学习重点.

考点分析

考点 / 分数 / 年份	复合函数	极限四则运算法则	两个重要极限	单调有界准则	无穷小的阶
1990	3		3		
1991			5		3
1992		3			
1993			5		
1994		3			
1995			3		
1996			3	6	
1997		3			
1998					
1999					
2000		5			
2001					
合计	3	14	19	6	3

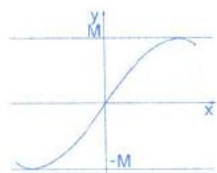
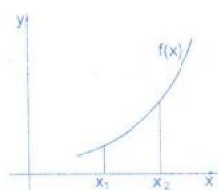
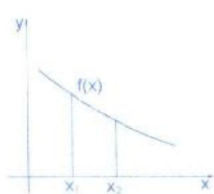
第一节 函数及其基本性质

一、基本概念、性质及定理

表 1.1.1 函数及相关概念

名称	定义	说明	注意
函数	设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 其中数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量. $W = \{f(x) \mid x \in X\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域. 点集 $G = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.	1. 函数定义的两个要素： ① 定义域 D：自变量 x 的变化范围. ② 对应法则 f：给定 x 的值，求 y 值的方法. 2. 函数的表示法与变量用什么字母表示无关，即 $y = f(x)$，$u = f(v)$ 等均表示同一函数.	**当且仅当两个函数的定义域及对应法则均相同时，两个函数相等.**
复合函数	设函数 $y = f(u)$ 的定义域包含函数 $u = g(x)$ 的值域，则在函数 $g(x)$ 的定义域 X 上可以确定一个函数 $y = f[g(x)]$，称 g 与 f 的复合函数. 记作 $y = f[g(x)]$ 或 $y = f \cdot g$.	复合函数 $y = f(\varphi(x))$. 若存在 $X^* \in X$，使得 $\varphi(x)$ 在 X^* 上的值域 $W^* \subset U$，而 U 为 $y = f(u)$ 的定义域，则 $y = f(\varphi(x))$ 的定义域为 X^*.	**若 $\varphi(x)$ 的值域不含在 $f(u)$ 的定义域内则不能复合.**
反函数	设 $y = f(x)$ 定义域为 X，值域为 W，若对于任给 $y \in W$，在 X 中只有一个数 x 与之对应，使得 $f(x) = y$，把 y 看作自变量，x 看作函数，得到的一个新函数，称为函数 f 的反函数. 记作 f^{-1}，$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.	函数 $y = f(x)$ 的反函数 $f^{-1}(y) = x$ 与 $y = f(x)$ 表示同一条曲线，用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y = f^{-1}(x)$ 及 $y = f(x)$ 图形关于直线 $y = x$ 对称，f^{-1} 的定义域即为 f 的值域.	**只有一一对应的函数才有反函数.**

表 1.1.2　函数的四种特性

<table>
<tr><th>性质</th><th colspan="2">定　　义</th><th>说　　明</th><th>注　　意</th></tr>
<tr><td>有界性</td><td colspan="2">设函数$f(x)$的定义域为D,数集$X \subset D$.如果存在数K_1,使得$f(x) \leqslant K_1$,对任一$x \in X$都成立,则称函数$f(x)$在X上有上界,而K_1称为函数$f(x)$在X上的一个上界.
若存在数K_2使得$f(x) \geqslant K_2$,对任一$x \in X$都成立,则称函数$f(x)$在X上有下界,而K_2称为函数$f(x)$在X上的一个下界.
如果存在正数M,使得$|f(x)| \leqslant M$,对任一$x \in X$都成立,则称函数$f(x)$在X上有界.如果这样的M不存在,就称函数$f(x)$在X上无界.</td><td>1. 函数$f(x)$有界则$f(x)$必有下界$-M$和上界M;反之若$f(x)$有上界K_1,又有下界K_2,则$f(x)$必有界$M = \max\{|K_1|,|K_2|\}$.
2. 函数无界的严格定义:对于任给正数M,总存在$x_M \in X$,使得$|f(x_M)| \geqslant M$.即任何一个正数M都不可能是$f(x)$的界.
</td><td rowspan="3">1. 函数的有界性是相对于某个区间而言的.
2. 无界函数与无穷大的区别:在一定变化趋势下$f(x)$为无穷大,则$f(x)$一定无界;若$f(x)$在某个区间上无界,则$f(x)$不一定是无穷大.如$f(x) = x\sin x$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">单调性</td><td>单调增加(单调上升)</td><td>设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I \subset D$,如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1 < x_2$时,恒有$f(x_1) < f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间上I是单调增加的.</td><td></td></tr>
<tr><td>单调减少(单调下降)</td><td>设函数$f(x)$的定义域为D,区间$I \subset D$,如果对于区间I上任意两点x_1及x_2,当$x_1 < x_2$时,恒有$f(x_1) > f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间上I是单调减少的.</td><td></td></tr>
</table>

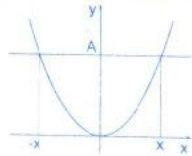
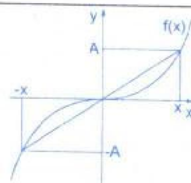
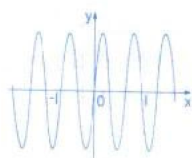
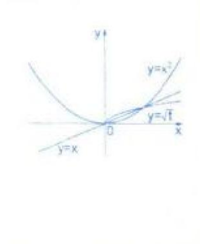
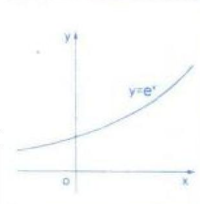
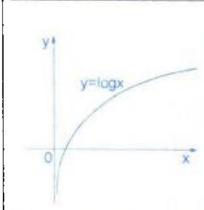
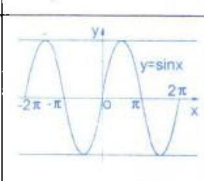
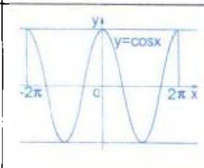
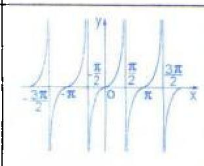
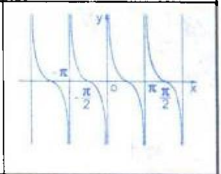
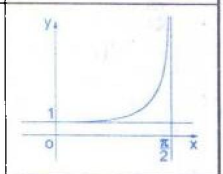
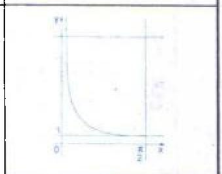
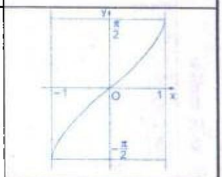
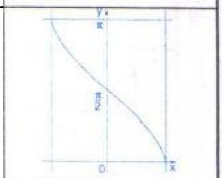
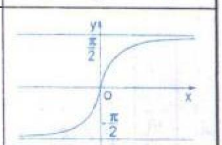
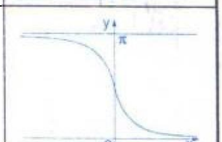
<table>
<tr><th>性质</th><th colspan="2">定　　义</th><th>说　　明</th><th>注　　意</th></tr>
<tr><td rowspan="2">奇偶性</td><td>偶函数</td><td>设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果对于任一$x\in D$,$f(-x)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为偶函数.</td><td>
</td><td rowspan="2">函数的奇偶性是相对于区间而言的,若定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇或偶函数.</td></tr>
<tr><td>奇函数</td><td>设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 如果对于任一$x\in D$,$f(-x)=-f(x)$恒成立,则称$f(x)$为奇函数.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>周期性</td><td colspan="2">设函数$f(x)$的定义域为D,如果存在一个不为零的数l,使得对于任一$x\in D$有$(x\pm l)\in D$,且$f(x+l)=f(x)$恒成立,则称$f(x)$为周期函数,l称为$f(x)$的周期.</td><td>
</td><td>1. 一般将$f(x)$的最小正周期简称为$f(x)$的周期. 但周期函数不一定存在最小正周期,如常数函数.
2. 定义中,并不要求函数的定义域必须有界.</td></tr>
</table>

表 1.1.3 基本初等函数和初等函数

名称		表达式(定义域)	性 质	说 明	图 形
基本初等函数	幂函数	$y=x^{\mu}$(μ 为常数) 当$\mu=\frac{1}{2}$,$x\in[0,+\infty)$ 当$\mu=3$,$x\in(-\infty,+\infty)$	当$\mu>0$时,单调递增. 当$\mu<0$时,单调递减.	幂函数的定义域,要看μ是什么数而定.但不论μ取什么值,幂函数在$(0,+\infty)$内总有定义.	
	指数函数	$y=a^x(a>0,a\neq1)$ 定义域:$x\in(-\infty,+\infty)$	若$a>1$,单调递增. 当$a<1$时,单调递减.		
	对数函数	$y=\log_a x(a>0,a\neq1)$ 定义域:$x\in(0,+\infty)$	若$a>1$,单调递增. 当$a<1$时,单调递减.	$y=a^x$与$y=\log_a x$互为反函数	
	三角函数	正弦函数$y=\sin x$ 定义域:$x\in(-\infty,+\infty)$	奇函数,周期函数$T=2\pi$,有界函数$\lvert\sin x\rvert\leq1$	值域为$[-1,1]$	
		余弦函数$y=\cos x$ 定义域:$x\in(-\infty,+\infty)$	偶函数,周期函数$T=2\pi$,有界函数$\lvert\cos x\rvert\leq1$	值域为$[-1,1]$	
		正切函数$y=\tan x$定义域:$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$	奇函数,周期函数$T=\pi$,单调递增.		

名称		表达式(定义域)	性　　质	说　　明	图　　形
基本初等函数	三角函数	余切函数 $y=\cot x$ 定义域:$x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$	周期函数 $T=\pi$,单调递减.		
		正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$	周期函数 $T=2\pi$,在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上无界.		
		余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$	周期函数 $T=2\pi$,在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上无界.		
	反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义域为:$[-1,1]$	奇函数,单调递增	值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	
		反余弦函数 $y=\arccos x$ 定义域为:$[-1,1]$	单调递减	值域为$[0,\pi]$	
		反正切函数 $y=\arctan x$ 定义域:$(-\infty,+\infty)$	奇函数,有界 $\lvert\arctan x\rvert<\dfrac{\pi}{2}$ 单调增函数	值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$	
		反余切函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 定义域:$(-\infty,+\infty)$	有界函数 $0<\operatorname{arccot}x<\pi$ 单调递减.	值域为$(0,\pi)$	
初等函数		凡是由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.			

二、常考题型

1. 关于函数的定义域的求法

【题型特点与解题技巧】

❶ 求复杂函数的定义域,通常将复杂函数看成一系列初等函数的复合,然后考查每个初等函数的定义域和值域,得到对应的不等式组,通过联立求解不等式,就可以得到函数的定义域.

❷ 求复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域,一般采用的方法是令 $t=\varphi(x)$,根据 $f(x)$ 的定义域解出 x 的变化范围,或者计算 $y=f(\varphi(x))$ 的表达式,直接求解函数的定义域;

❸ 已知 $y=f(\varphi(x))$ 的定义域,求 $f(x)$ 的定义域的方法则是从 x 的变化范围解出 $t=\varphi(x)$ 的变化范围.

❹ 请熟记下列常用初等函数的定义域:

初等函数	定　义　域
$y=\dfrac{1}{x}$	$x\neq 0,(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$y={}^{2n}\sqrt{x}$	$x\geqslant 0,[0,+\infty)$
$y=\log_a x$	$x>0,(0,+\infty)$
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in Z$
$y=\cot x$	$x\neq k\pi,k\in Z$
$y=\arcsin x$(或 $\arccos x$)	$\|x\|\leqslant 1,[-1,1]$

【典型考题1】 求下列函数的定义域

(1) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$

(2) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$

解 (1) 当 $\lg\dfrac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$ 时,函数有定义,

即$\frac{5x-x^2}{4} \geqslant 1 \Rightarrow (x-1)(x-4) \leqslant 0$

故得定义域为:$1 \leqslant x \leqslant 4$ 或$[1,4]$

(2) 当$\sqrt{16-x^2}$和$\lg\sin x$同时有定义时,函数才有定义,所以

函数是指数函数、对数函数和三角函数的复合.

$$\begin{cases} 16-x^2 \geqslant 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant 4 \\ 2n\pi < x < (2n+1)\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{cases}$$

求解联立不等式得

函数的定义域为: $-4 \leqslant x < -\pi, 0 < x < \pi$

或$[-4, -\pi) \cup (0, \pi)$.

【典型考题2】 设$f(x) = e^{x^2}, f(\varphi(x)) = 1-x$,且$\varphi(x) \geqslant 0$,求$\varphi(x)$的定义域.

('98年考研数学一)

解 $f(x) = e^{x^2} \Rightarrow f(\varphi(x)) = e^{\varphi^2(x)}$

通过替换和函数表示法的变量无关性得表达式.

$\because f(\varphi(x)) = 1-x, \therefore e^{\varphi^2(x)} = 1-x$

$\therefore \varphi^2(x) = \ln(1-x)$

由$\varphi(x) \geqslant 0$可得$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$

因此$\varphi(x)$的定义域为:$\ln(1-x) \geqslant 0$

即$x \leqslant 0$或$(-\infty, 0]$

【典型考题3】 设$y = f(x)$的定义域为$[-1,1]$, $\varphi(x) = 1-\sin x$,求复合函数$y = f(\varphi(x))$的定义域.

x的变化范围解出$\varphi(x)$的变化范围.

解 令$t = \varphi(x)$,由题意知$f(t)$的定义域为$[-1,1]$

即$-1 \leqslant 1-\sin x \leqslant 1$,

解得$2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

所以函数$y = f(\varphi(x))$的定义域为$[2k\pi, (2k+1)\pi], k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

【典型考题4】 设$f(x)$的定义域为$[-1,1)$,求$f(\sin x) + f(\cos x + a)(a > 0)$的定义域.

解 分别考虑$f(\sin x)$和$f(\cos x + a)$的定义域再解联立不等式.

由于$f(x)$的定义域为$[-1,1)$

由$-1 \leqslant \sin x < 1 \Rightarrow x \neq \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

由$-1 \leqslant \cos x + a < 1 \Rightarrow -1-a \leqslant \cos x < 1-a$.

当$1-a \leqslant -1 \Rightarrow a \geqslant 2$时,不等式$-1-a \leqslant \cos x < 1-a$无解