高等学校教学用書

解析函数論簡明教程

上　册

A. И. 馬庫雪維奇著

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析函数論簡明教程

上册

A. И. 馬庫雪維奇著
閻昌齡譯

高等教育出版社

高等学校教学用書

解析函数論簡明教程

下册

A. И. 馬庫雪維奇著
閻昌齡　吳望一譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国立科学技术理論出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1957年出版的馬庫雪維奇（А. И. МаркуШевич）著“解析函数論簡明教程”（Краткий куре теории аналитических функчий）譯出，原書經苏联高等教育部审定为国立大学教科書。

本書中譯本分上、下两册出版，本册內容主要講复数、复变函数，导数；初等解析函数及其对应的保形映射；冪級数以及复变函数的积分。

本書可供我国綜合大学数学系及数学力学系数学專业作为教学参考書；也可作为具备有数学分析基础知識的讀者进修复变函数論的自学用書。

解析函数論簡明教程

上 册

А. И. 馬庫雪維奇著

閻昌齡譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号13010·513 開本850×1168 1/32，印張5 5/16、

字數137,000 印數0001—5,000 定價(8)￥0.65

1958年12月第1版 1958年12月北京第1次印刷

本書是根据苏联国立科学技术理論書籍出版社1957年出版的(А. И. Маркушевич)馬庫雪維奇著:“краткий курс теории аналитических функций”譯出,原書是根据苏联綜合大学物理数学系的复变函数教学大綱編写的。內容基本上符合我国1954年10月高教部No订的綜合大学数学力学專业用复变函数論教学大綱的要求。

中譯本分上、下两册出版,上册已出版。下册內容主要講:柯西积分、劳氏級数、残数、解析开拓、解析函数所作的映射、橢圓函数的概念以及复变函数論在流体力学上的某些应用。

本書可供綜合大学数学專业用作复变函数論的教学参考書,也可作为已具备数学分析基础知識的讀者自学复变函数論之用。

解析函数論簡明教程

下 册

А. И. 馬庫雪維奇著

劉昌齡 吳望一譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第054号)

京华印書局印刷 新华書店發行

統一書号13010·562 開本850×1168 1/32 印張6 2/16

字數166,000 印數0001—7,000 定價(6)￥0.70

1959年[illegible]

序

本書是按大学物理数学系的教学大綱編写的解析函数論教科書。用来說明一般原理及方法的很多例子用小号鉛字印刷。某些(但是不多)补充基础教程的問題和細节也用小号鉛字印刷。对于希望深入这一領域的讀者，請閱讀附在本書末列名中的論著。

在这本書的准备中作者广泛地使用了自著"解析函数論"① 一書。

作者

---

① 有中譯本——譯者。

目　录

下 册 目 录

引 論

1. 解析函数論的对象 本書叙述的对象有两个名称：解析函数論和复变函数論。每个名称只强調了事情的一面，因为我們将要研究复变解析函数。

定义在某个(有限的或无限的)区間(a, b)内的实变量x的函数$f(x)$，如果在这区間內的每个点x_0的邻域內都可以把$f(x)$表成为按$x-x_0$的非負整幂展成的幂級数的和

$$f(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots+A_n(x-x_0)^n+\cdots,$$

那么，$f(x)$叫做在这区間內的**解析函数**。

任意的多項式，函数e^x，$\sin x$，$\cos x$在整个数軸上是解析的；每个有理函数，函数$\operatorname{tg} x$，$\operatorname{ctg} x$，$\sec x$，$\csc x$在不含有該函数无定义(变成无限大)的点的区間內是解析的；函数$\ln x$在区間$(0, \infty)$內是解析的。所有这些論断都容易驗証。例如，如果$x_0>0$，那么当$|x-x_0|<|x_0|$时

$$\ln x=\ln x_0+\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)=\ln x_0+\sum_1^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{nx_0^n}.$$

解析函数的和，差，积，商(在除数不变成零的区間內)是解析函数；解析函数的导数同积分也是解析的。具有某些附加条件的如下命題是正确的：a)解析函数的反函数是解析的；б)如果$A_j(x)$ $(j=0, 1, 2, \cdots, n)$是解析函数，那么由方程式

$$A_0(x)+A_1(x)f(x)+\cdots+A_n(x)[f(x)]^n=0$$

或方程式

$$A_0(x)+A_1(x)\frac{df(x)}{dx}+\cdots+A_n(x)\frac{d^nf(x)}{dx^n}=0$$

确定的函数 $f(x)$ 是解析的。

由这些命题出發，容易明白，由数学分析、几何学、力学和物理学的問題引出来的一切最重要的函数都是解析的。事实上，不但上述的初等函数是解析的，而且如 Gamma 函数（Γ 函数）、圓柱函数（Bessel 函数）、橢圓函数和其他許多函数在适当的区間內都是解析的。这种情况說明，为什么解析函数在数学以及它的应用中起着这样重要的作用，同时，也是将解析函数的一般理論作为独特的数学課程的充分理由。

2. 复变解析函数 在研究最簡單的解析函数——多項式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n(a_n\neq 0)$$

的时候，已經显示出来把它看作复变函数是适当的。

事实上，只有采取这种看法才能表明，使这函数取每个值（在特例可以是零）的 x 值有 n 个（其中有些可能重合）。由此还可以推出以下的基本推論，即多項式可以表示成一次因子的乘积

$$f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

以及其他和这有关的命题。

自然，把多項式当作复变函数研究时它的系数可以取任意的复数值。类似地，研究复变量 $z=x+iy$ 的最一般的解析函数的时候，我們使用冪級数 $\sum\limits_{0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n$，其中系数 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 还有数 z_0 都是复数。如果在复平面（表示复数的平面）上有某个点集合，在这集合的任意一点的邻域內函数 $f(z)$ 可以用冪級数的和表示为：

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n,$$

則称 $f(z)$ 在这点集合上是解析的。

以后我們可以看到，数学分析的基本概念一般来說可以推广到复变函数，其中有导数 $f'(z)$ 的概念及沿着某个平面曲綫 L' 的积分 $\int_L f(z)dz$ 的概念。

在本教程中将要証明以下的基本事实。函数 $f(z)$ 在复变量 z 平面的某个圓內解析的必充条件是滿足下列的四条件之一：

a) 函数 $f(z)$ 在圓內每一点有导数 $f'(z)$；

б) 若 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，其中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是实变量 x 和 y 的两个实函数，那么 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 是两次可微函数，滿足 Laplace 微分方程式

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

而且以方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

彼此联系着；

в) 函数 $f(z)$ 在圓內是連續的，而且它沿着圓內任意閉曲綫的积分等于零；

г) 在任意半徑較小的同心圓內函数 $f(z)$ 可以用多項式逼近到任意的精确度。

在这些命題之上建立了全部复变解析函数的理論。性質 a)，б)，в)，г) 的任意一个可以作为复变解析函数概念的定义基础。在本教程中将用以性質 a) 为基础的定义，而只是在以后我們要証明这一定义和用冪級数的定义是等价的。

我們指出，解析函数論在物理及力学中的許多应用以性質 б) 为基础；例如，所謂平面上的热平衡或电平衡問題、液体或气体稳恒流在平面閉路上的环流問題，都归結到 Laplace 方程式，而 Laplace 方程式的种种解构成了全部的解析函数。

第一章　复数及其几何表示

1. 复数在平面上的几何表示　在高等代数教程中叙述了复数的理論[①]。这里我們只回忆一下复数理論的基本定义及結果并且为了有利于以后的討論而作一些补充。

每个复数 c 具有 $a+bi$ 的形状，其中 a 和 b 是实数，而 i 是所謂虛数單位；a 叫做 c 的实部，b 叫做 c 的虛部。記作：$a=\operatorname{Re} c$, $b=\operatorname{Im} c$ (Re 是拉丁文 realis——实的开首两个字母，Im 是 imaginarius——虛的开首两个字母)。两个复数 c' 和 c'' 当、而且只当 $\operatorname{Re} c'=\operatorname{Re} c''$, $\operatorname{Im} c'=\operatorname{Im} c''$ 的时候相等。如果 $\operatorname{Im} c=0$, 那么 $c=\operatorname{Re} c$ 是实数；如果 $\operatorname{Im} c\neq 0$，那么 c 叫做虛数，如果同时 $\operatorname{Re} c=0$，就叫做純虛数。

为了得到复数在平面上的几何表示，选取 Descartes 直角坐标系，而且把每个点 $M(x, y)$ 看作是复数 $x+yi$ 的象；数 $x+yi$ 叫做点 M 的添数。这一假定建立了平面上一切点的集合和一切复数的集合間的双方單值的对应。并且一切实数的集合表示成横坐标軸，因此叫做实軸，一切虛数的集合表示成不在横坐标軸上的点集合，特别地，純虛数的集合表示成縱坐标軸，叫做虛軸(注意，虛軸上有一个点——坐标原点表示实数 0)。表示复数的平面叫做复平面(有时叫做 Gauss 平面)，或按照表示复数的字母是 $z, w, \cdots$ 而叫做 (z) 平面、(w) 平面等等。

“复数 $x+iy$”和“点 $x+iy$” 用作同意語。

为了得到数 $z=x+iy$ 的几何表示，除了用点 (x, y) 以外，还用在坐标軸上的投影是 x 和 y 的矢量；它的起点可以安放在任意点

① 例如，参看 А. Г. Курош 著高等代数教程(有中譯本)。

(圖 1)。因此，可以把“复数”和“矢量”用作同意語。矢量的長度 $|z|$ 叫做复数 z 的模实軸的正方向和矢量之間的角度 $\operatorname{Arg} z$(这里假定 $z\neq 0$)叫做 z 的輻角；輻角准确到 2π 的整数倍。且只有一个輻角的值 α 满足条件 $-\pi<\alpha\leqslant\pi$；它叫做輻角的主值而且用 $\arg z$ 表示。显然

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi,$$

其中 k 表示任意整数。

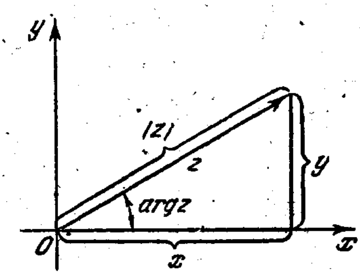

圖 1.

我們还要指出下列的关系式：

若 $z=x+iy$，那么 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$；

当 $x>0$ 时 $\arg z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}$，

当 $x<0$ 而 $y\geqslant 0$ 时 $\arg z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+\pi$，

当 $x>0$ 而 $y<0$ 时 $\arg z=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}-\pi$.

z 的实部和虛部可以用模和輻角表示为：

$\operatorname{Re} z=|z|\cos\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Im} z=|z|\sin\operatorname{Arg} z$；因此，$z$ 本身可以表示成 $z=|z|(\cos\operatorname{Arg} z+i\sin\operatorname{Arg} z)$ 的形式，这个式子叫做 z 的三角形式。

二复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 叫做是(相互)共軛的。如果其中之一用 z 表示，那么另一个用 $\bar{z}$ 表示。显然，点 z 和 $\bar{z}$ 关于实軸是对称的。因此 $|z|=|\bar{z}|$；此外，如果 z 不是負实数，那么 $\arg z=-\arg\bar{z}$；如果 z 是負实数，那么 $\arg z=\arg\bar{z}=\pi$。

2. 复数的运算 复数的加法和乘法运算由下列的等式定义。

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$
$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1),$$

而减法和除法定义作对应的逆运算。由这些定义推出下列的重要

推論：加法和乘法具有可交換和可結合的性質，乘法对于加法具有可分配的性質；两个因子的乘积当、且只当两因子中至少有一个是零时才等于零；減法常常是可能的，除法在除数不等于零的条件下是可能的。这一切表明复数构成域。我們指出一个乘法的特殊情形：若 $c=a+ib$，那么 $c\cdot\bar{c}=a^2+b^2=|c|^2$，由此 $|c|=\sqrt{c\cdot\bar{c}}$。

复数 $c_1=a_1+ib_1$ 和 $c_2=a_2+ib_2$ 的加法在几何表示中按照矢量加法規則来进行(圖 2, a)。差 c_1-c_2 可以用起点在点 c_2、終点在点 c_1 的矢量来表示(圖 2, $б$)。由此推出，二点 $c_1=a_1+ib_1$，$c_2=a_2+ib_2$ 的距离等于差的模：$\rho(c_2, c_1)=|c_1-c_2|$。我們还要指出关于和及差的模的重要不等式

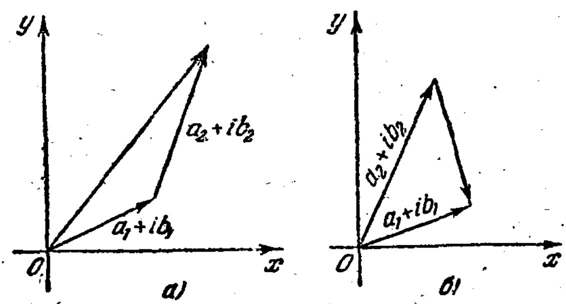

圖 2.

$$|c_1+c_2|\leqslant|c_1|+|c_2|,\quad |c_1-c_2|\geqslant\big||c_1|-|c_2|\big|;$$

等号只在矢量 c_1 和 c_2 共綫而且同方向的时候成立。

第一个不等式可以推广到任意个被加項的情形：

$$|c_1+c_2+\cdots+c_n|\leqslant|c_1|+|c_2|+\cdots+|c_n|;$$

这里的等式也只能在所有 n 个矢量 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 共綫而且指向同一方向的条件下成立。

为了得到乘法的几何解釋，将 c_1 和 c_2 写成三角形式

$$c_1=|c_1|(\cos\operatorname{Arg}c_1+i\sin\operatorname{Arg}c_1),$$

$$c_2=|c_2|(\cos\operatorname{Arg}c_2+i\sin\operatorname{Arg}c_2);$$

由乘法的定义得到：

$$c=c_1c_2=|c_1|\,|c_2|[\cos(\operatorname{Arg} c_1+\operatorname{Arg} c_2)+ \\ +i\sin(\operatorname{Arg} c_1+\operatorname{Arg} c_2)];$$

由此得到：

$$|c_1\cdot c_2|=|c_1|\cdot|c_2|,\quad \operatorname{Arg}(c_1\cdot c_2)=\operatorname{Arg} c_1+\operatorname{Arg} c_2$$

(最后的等式应該理解如下：$\operatorname{Arg} c_1$ 和 $\operatorname{Arg} c_2$ 的值的一切可能的和构成一个数的集合，与 $\operatorname{Arg}(c_1\cdot c_2)$ 的値的集合重合)。c_1 乘以 c_2 的几何表示，就是矢量 c_1 伸長 $|c_2|$ 倍而且繞自己的起点旋轉一个角 $\operatorname{Arg} c_2$。对于商 $c_1:c_2=\frac{c_1}{c_2}(c_1\neq 0,c_2\neq 0)$ 我們得到等式

$$|c_1:c_2|=|c_1|:|c_2|,\ \operatorname{Arg}(c_1:c_2)=\operatorname{Arg}c_1-\operatorname{Arg} c_2.$$

由最后的等式推出，矢量 c_1 与 c_2 之間的角度，由 c_2 到 c_1 按反时針方向計算(准确到 2π 的整数倍)，等于 $\operatorname{Arg}\frac{c_1}{c_2}$:

$$\widehat{c_2,c_1}=\operatorname{Arg}\frac{c_1}{c_2}.$$

由乘法規則得到：

$$c^n=|c|^n(\cos n\operatorname{Arg} c+i\sin n\operatorname{Arg} c),$$

其中 n 是自然数；显然，这公式当 $n=0\ (c^0=1)$ 时也是成立的。注意到 $c^{-n}=\frac{1}{c^n}$，我們得到：

$$c^{-n}=|c|^{-n}[\cos(-n\operatorname{Arg} c)+i\sin(-n\operatorname{Arg} c)].$$

因此，对于任意整数 m 下列公式成立：

$$c^m=|c|^m(\cos m\operatorname{Arg} c+i\sin m\operatorname{Arg} c).$$

如果 p 和 q 是整数，$q\geqslant 2$ 而且分数 $\frac{p}{q}$ 是不可約的，那么公式

$$c^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{c^p}=\sqrt[q]{|c|^p}_{+}\left[\cos\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg} c\right)+i\sin\left(\frac{p}{q}\operatorname{Arg} c\right)\right]$$

的右边給出 $c^{\frac{p}{q}}$ 的 q 个相异的値，其中 $\sqrt[q]{|c|^p}_{+}$ 表示 $|c|^{\frac{p}{q}}$ 的正