

高等学校教学用书



解析函数論簡明教程

上 册

А. И. 馬庫雪維奇著

高等教育出版社



高等学校教学用书



解析函数論簡明教程

上册

A. И. 馬庫雪維奇著
閻 昌 齡 譯

高教出版社

高等学校教学用书



解析函数論簡明教程

下 冊

A. И. 馬庫雪維奇著
閻昌齡 吳望一譯

高等教育出版社

本書是根据苏联国立科学技术理論出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1957 年出版的馬庫雪維奇 (А. И. Маркушевич) 著“解析函数論簡明教程” (Краткий курс теории аналитических функций) 譯出, 原書經苏联高等教育部审定为国立大学教科書。

本書中譯本分上、下两册出版, 本册內容主要講复数、复变函数、导数; 初等解析函数及其对应的保形映射; 幂級数以及复变函数的积分。

本書可供我国綜合大学数学系及数学力学系数学专业作为教学参考書; 也可作为具备有数学分析基础知識的讀者进修复变函数論的自学用書。

解析函数論簡明教程

上 册

А. И. 馬庫雪維奇著

閻昌齡譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 054 号)

京華印書局印刷 新华書店發行

統一書号 15010·513 開本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印張 5 $\frac{5}{8}$

字數 137,000 印數 0001—5,000 定價 (8) ¥0.65

1958 年 12 月第 1 版 1958 年 12 月北京第 1 次印刷

本書是根据苏联国立科学技术理論書籍出版社 1957 年出版的 (А. И. Маркушевич) 馬庫雪維奇著: “краткий курс теории аналитических функций” 譯出, 原書是根据苏联綜合大学物理数学系的复变函数教学大綱編写的。內容基本上符合我国 1954 年 10 月高教部編訂的綜合大学数学力学专业用复变函数論教学大綱的要求。

中譯本分上、下两册出版, 上册已出版。下册內容主要講: 柯西积分、勞氏級数、殘数、解析开拓、解析函数所作的映射、椭圆函数的概念以及复变函数論在流体力学上的某些应用。

本書可供綜合大学数学专业用作复变函数論的教学参考書, 也可作为已具备数学分析基础知識的讀者自学复变函数論之用。

解析函数論簡明教程

下 册

А. И. 馬庫雪維奇著

閻昌齡 吳望一譯

高等教育出版社出版北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第 054 号)

京華印書局印刷 新华書店發行

統一書号 13010·562 開本 820×1168¹/₃₂ 印張 5²/₁₆

字數 166,000 印數 6001—7,000 定價 (65) 0.70

1959 年 4 月第 1 版 1959 年 3 月第 1 次印刷

序

本書是按大學物理數學系的教学大綱編写的解析函数論教科書。用來說明一般原理及方法的很多例子用小号鉛字印刷。某些(但是不多)补充基础教程的問題和細节也用小号鉛字印刷。对于希望深入这一領域的讀者,請閱讀附在本書末列名中的論著。

在这本書的准备中作者广泛地使用了自著“解析函数論”^①一書。

作者

① 有中譯本——譯者。

目 录

序.....	v
引論	1
1. 解析函数論的对象(1). 2. 复变解析函数(2).	
第一章 复数及其几何表示.....	4
1. 复数在平面上的几何表示(4). 2. 复数的运算(5). 3. 序列的極限(8). 4. 无限大和球極投影(9). 5. 平面上的点集合(12).	
第二章 复变函数, 导数及其在几何学及流体力学上的意义.....	15
1. 复变函数(15). 2. 函数在一点的極限(15). 3. 連續性(17). 4. 連續曲綫(18). 5. 导数和微分(21). 6. 微分法則(23). 7. 在区域的內点可微的必充条件(25). 8. 导数幅角的几何意义(32). 9. 导数模的几何意义(54). 10. 例: 綫性函数及分式綫性函数(34). 11. 頂点在无限远点的角(36). 12. 調和函数及共軛調和函数(88). 13. 解析函数的流体力学解釋(42). 14. 例(46).	
第三章 初等解析函数及其对应的保形映射	48
1. 多項式(48). 2. 映射的保形性遭到破坏的点(49). 3. 形如 $w = (z-a)^n$ 的映射(50). 4. 分式綫性变换的群的性質(53). 5. 圓的性質(56). 6. 重比的不变性(60). 7. 由直綫或圓周界限的区域的映射(65). 8. 对称性及其保持(67). 9. 例(71). 10. Жуковский 函数(74). 11. 指数函数的定义(79). 12. 用指数函数所作的映射(81). 13. 三角函数(86). 14. 几何状态(91). 15. 續(93). 16. 多值函数的單值分枝(95). 17. 函数 $w = \sqrt[n]{z}$ (97). 18. 函数 $w = \sqrt[n]{P(z)}$ (103). 19. 对数(106). 20. 一般冪函数和一般指数函数(111). 21. 反三角函数(117).	
第四章 复数項級数、冪級数	121
1. 收斂級数和發散級数(121). 2. Cauchy-Hadamard 定理(123). 3. 冪級数和的解析性(126). 4. 一致收斂性(129).	
第五章 复变数函数的积分法	132
1. 复变函数的积分(132). 2. 积分的性質(135). 3. 归結成平常积分	

的计算(136). 4. Cauchy 积分定理(138). 5. 证明续(143). 6. 在定积分计算上的应用(145). 7. 积分和原函数(154). 8. Cauchy 积分定理推广到函数在积分闭路上非解析的情形(157). 9. 关于复合闭路的定理(158). 10. 积分看作多连区域内的点函数(161).

下 册 目 录

第六章 Cauchy 积分公式和它的推論.....165

1. Cauchy 积分公式(165), 2. 解析函数的幂级数展开式. Liouville 定理(167), 3. 解析函数和調和函数的无限可微性(170). 4. Morera 定理(174). 5. Weierstrass 关于一致收敛的解析函数级数的定理(175). 6. 唯一性定理(179). 7. A -点, 特例, 零点(182). 8. 幂级数的级数(183). 9. 把级数代入级数(186). 10. 幂级数的除法(189). 11. 函数 $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{csc} z$, $\operatorname{sec} z$ 的幂级数展开式(195). 12. 調和函数展开成级数. Poisson 积分及 Schwarz 公式(198).

第七章 Laurent 级数. 單值性的孤立奇异点.

整函数和半純函数203

1. Laurent 级数(203). 2. Laurent 定理(206). 3. 單值性的孤立奇异点(210). 4. Сохоцкий 定理(215). 5. 解析函数的导数和有理結合的奇异点(219). 6. 无限远点的情形(222). 7. 整函数和半純函数(224). 8. 展整函数成乘积展开式(229). 9. 整函数的級和型(235).

第八章 殘数及其应用. 幅角原理.....237

1. 殘数定理及其在計算定积分中的应用(237). 2. 幅角原理及其推論(243). 3. 关于无限远点的殘数(250). 4. 殘数定理在半純函数展开成最簡分式上的应用(252). 5. $\operatorname{sec} z$, $\operatorname{ctg} z$, $\operatorname{csc} z$ 和 $\operatorname{tg} z$ 的簡單分式展开式(258).

第九章 解析开拓. Riemann 曲面的概念. 奇异点.....267

1. 解析开拓的任务(267). 2. 直接解析开拓(269). 3. 用解析函数元素作解析函数(270). 4. Riemann 曲面的构成(272). 5. Riemann-Schwarz 对称原理(274). 6. 幂级数在收敛圆边界上的奇异点(279). 7. 寻找奇异点的判定法(283). 8. 按函数奇异点的已知分布确定幂级数的收敛半徑(287). 9. 多值性的孤立奇异点(290).

第十章 解析函数所作的映射. 橢圓函数的概念

Christoffel-Schwarz 公式295

1. 解析函数所作的区域的映射(295). 2. 最大模原理及 Schwarz 引理(296). 3. 單叶性的局部判定法(299). 4. 解析函数的逆轉

(300). 5. 单叶性概念推广到有极点的函数情形(305). 6. Riemann 定理的概念. 映射的唯一性(306). 7. 边界对应的概念. 逆定理(308). 8. 用椭圆积分映射上半平面(315). 9. Jacobi 椭圆函数 $\operatorname{sn} w$ 的概念(320). 10. Christoffel-Schwarz 积分(325). 11. 圆柱体的(无环量)绕流问题(333). 12. 最简单的奇异点的流体力学解释(334). 13. 圆柱绕流问题的一般解(338). 14. 机翼举力的确定(341).

进一步研究的参考书	1
索引	4
外文人名读法表	8

引 論

1. 解析函数論的对象 本書叙述的对象有两个名称: 解析函数論和复变函数論。每个名称只強調了事情的一面, 因为我們将要研究复变解析函数。

定义在某个(有限的或无限的)区間 (a, b) 內的实变量 x 的函数 $f(x)$, 如果在这区間內的每个点 x_0 的邻域內都可以把 $f(x)$ 表成为按 $x-x_0$ 的非負整幂展成的幂級数的和

$$f(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \cdots + A_n(x-x_0)^n + \cdots,$$

那么, $f(x)$ 叫做在这区間內的解析函数。

任意的多項式, 函数 $e^x, \sin x, \cos x$ 在整个数軸上是解析的; 每个有理函数, 函数 $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sec x, \csc x$ 在不含有該函数无定义(变成无限大)的点的区間內是解析的; 函数 $\ln x$ 在区間 $(0, \infty)$ 內是解析的。所有这些論断都容易驗証。例如, 如果 $x_0 > 0$, 那么当 $|x-x_0| < |x_0|$ 时

$$\ln x = \ln x_0 + \ln\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right) = \ln x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-x_0)^n}{n x_0^n}.$$

解析函数的和, 差, 积, 商(在除数不变成零的区間內)是解析函数; 解析函数的导数同积分也是解析的。具有某些附加条件的如下命題是正确的: a) 解析函数的反函数是解析的; 6) 如果 $A_j(x) (j=0, 1, 2, \cdots, n)$ 是解析函数, 那么由方程式

$$A_0(x) + A_1(x)f(x) + \cdots + A_n(x)[f(x)]^n = 0$$

或方程式

$$A_0(x) + A_1(x)\frac{df(x)}{dx} + \cdots + A_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} = 0$$

确定的函数 $f(x)$ 是解析的。

由这些命题出發,容易明白,由数学分析、几何学、力学和物理学的问题引出来的一切最重要的函数都是解析的。事实上,不但上述的初等函数是解析的,而且如 Gamma 函数 (Γ 函数)、圆柱函数 (Bessel 函数)、椭圆函数和其他许多函数在适当的区间内都是解析的。这种情况说明,为什么解析函数在数学以及它的应用中起着这样重要的作用,同时,也是将解析函数的一般理论作为独特的数学课程的充分理由。

2. 复变解析函数 在研究最简单的解析函数——多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n (a_n \neq 0)$$

的时候,已经显示出来把它看作复变函数是适当的。

事实上,只有采取这种看法才能表明,使这函数取每个值(在特例可以是零)的 x 值有 n 个(其中有些可能重合)。由此还可以推出以下的基本推论,即多项式可以表示成一次因子的乘积

$$f(x) = a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),$$

以及其他和这有关的命题。

自然,把多项式当作复变函数研究时它的系数可以取任意的复数值。类似地,研究复变量 $z = x + iy$ 的最一般的解析函数的时候,

我們使用幂级数 $\sum_0^{\infty} A_n(z-z_0)^n$, 其中系数 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 还有数 z_0 都是复数。如果在复平面(表示复数的平面)上有某个点集合,在这集合的任意一点的邻域内函数 $f(z)$ 可以用幂级数的和表示为:

$$f(z) = \sum_0^{\infty} A_n(z-z_0)^n,$$

則称 $f(z)$ 在这点集合上是解析的。

以后我們可以看到，数学分析的基本概念一般來說可以推广到复变函数，其中有导数 $f'(z)$ 的概念及沿着某个平面曲线 L 的积分 $\int_L f(z)dz$ 的概念。

在本教程中将要証明以下的基本事实。函数 $f(z)$ 在复变量 z 平面的某个圆內解析的必充条件是滿足下列的四条件之一：

a) 函数 $f(z)$ 在圆內每一点有导数 $f'(z)$ ；

b) 若 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ，其中 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是实变量 x 和 y 的两个实函数，那么 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 是两次可微函数，滿足 Laplace 微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

而且以方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

彼此联系着；

b) 函数 $f(z)$ 在圆內是連續的，而且它沿着圆內任意閉曲线的积分等于零；

r) 在任意半徑較小的同心圆內函数 $f(z)$ 可以用多項式逼近到任意的精确度。

在这些命題之上建立了全部复变解析函数的理論。性質 a), b), r) 的任意一个可以作为复变解析函数概念的定义基础。在本教程中将用以性質 a) 为基础的定义，而只是在以后我們要証明这一定义和用幂級数的定义是等价的。

我們指出，解析函数論在物理及力学中的許多应用以性質 b) 为基础；例如，所謂平面上的热平衡或电平衡問題、液体或气体稳恒流在平面閉路上的环流問題，都归結到 Laplace 方程式，而 Laplace 方程式的种种解构成了全部的解析函数。

第一章 复数及其几何表示

1. 复数在平面上的几何表示 在高等代数教程中叙述了复数的理論^①。这里我們只回忆一下复数理論的基本定义及結果并且为了有利于以后的討論而作一些补充。

每个复数 c 具有 $a+bi$ 的形状, 其中 a 和 b 是实数, 而 i 是所謂虛数單位; a 叫做 c 的实部, b 叫做 c 的虛部。記作: $a = \operatorname{Re} c$, $b = \operatorname{Im} c$ (Re 是拉丁文 *realis*——实的开首两个字母, Im 是 *imaginaris*——虛的开首两个字母)。两个复数 c' 和 c'' 当、而且只当 $\operatorname{Re} c' = \operatorname{Re} c''$, $\operatorname{Im} c' = \operatorname{Im} c''$ 的时候相等。如果 $\operatorname{Im} c = 0$, 那么 $c = \operatorname{Re} c$ 是实数; 如果 $\operatorname{Im} c \neq 0$, 那么 c 叫做虛数, 如果同时 $\operatorname{Re} c = 0$, 就叫做純虛数。

为了得到复数在平面上的几何表示, 选取 Descartes 直角坐标系, 而且把每个点 $M(x, y)$ 看作是复数 $x+yi$ 的象; 数 $x+yi$ 叫做点 M 的添数。这一假定建立了平面上一切点的集合和一切复数的集合間的双方單值的对应。并且一切实数的集合表示成横坐标軸, 因此叫做实軸, 一切虛数的集合表示成不在横坐标軸上的点集合, 特別地, 純虛数的集合表示成縱坐标軸, 叫做虛軸(注意, 虛軸上有一个点——坐标原点表示实数 0_x)。表示复数的平面叫做复平面(有时叫做 Gauss 平面), 或按照表示复数的字母是 $z, w, \dots$ 而叫做 (z) 平面、 (w) 平面等等。

“复数 $x+iy$ ”和“点 $x+iy$ ”用作同意語。

为了得到数 $z = x+iy$ 的几何表示, 除了用点 (x, y) 以外, 还在坐标軸上的投影是 x 和 y 的矢量; 它的起点可以安放在任意点

^① 例如, 参看 A. Г. Купом 著高等代数教程(有中譯本)。

(圖1)。因此,可以把“复数”和“矢量”用作同意語。矢量的長度 $|z|$ 叫做复数 z 的模,实軸的正方向和矢量之間的角度 $\text{Arg } z$ (这里假定 $z \neq 0$)叫做 z 的幅角;幅角准确到 2π 的整数倍。且只有一个幅角的值 α 满足条件 $-\pi < \alpha \leq \pi$;它叫做幅角的主值而且用 $\arg z$ 表示。显然

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi,$$

其中 k 表示任意整数。

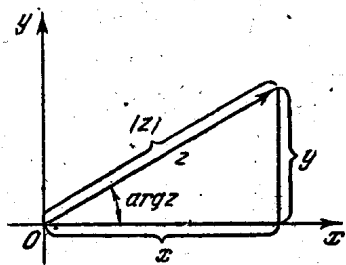


圖 1.

我們还要指出下列的关系式:

若 $z = x + iy$, 那么 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

当 $x > 0$ 时 $\arg z = \arctan \frac{y}{x}$,

当 $x < 0$ 而 $y \geq 0$ 时 $\arg z = \arctan \frac{y}{x} + \pi$,

当 $x > 0$ 而 $y < 0$ 时 $\arg z = \arctan \frac{y}{x} - \pi$.

z 的实部和虚部可以用模和幅角表示为:

$\text{Re } z = |z| \cos \text{Arg } z$, $\text{Im } z = |z| \sin \text{Arg } z$; 因此, z 本身可以表示成 $z = |z|(\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z)$ 的形式, 这个式子叫做 z 的三角形式。

二复数 $x + iy$ 与 $x - iy$ 叫做是(相互)共轭的。如果其中之一用 z 表示, 那么另一个用 $\bar{z}$ 表示。显然, 点 z 和 $\bar{z}$ 关于实軸是对称的。因此 $|z| = |\bar{z}|$; 此外, 如果 z 不是負实数, 那么 $\arg z = -\arg \bar{z}$; 如果 z 是負实数, 那么 $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$ 。

2. 复数的运算 复数的加法和乘法运算由下列的等式定义。

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1),$$

而减法和除法定义作对应的逆运算。由这些定义推出下列的重要

推論: 加法和乘法具有可交換和可結合的性質, 乘法對於加法具有可分配的性質; 兩個因子的乘積當, 且只當兩因子中至少有一個是零時才等於零; 減法常常是可能的, 除法在除數不等於零的條件下是可能的。這一切表明復數構成域。我們指出一個乘法的特殊情形: 若 $c = a + ib$, 那麼 $c \cdot \bar{c} = a^2 + b^2 = |c|^2$, 由此 $|c| = \sqrt{c \cdot \bar{c}}$ 。

復數 $c_1 = a_1 + ib_1$ 和 $c_2 = a_2 + ib_2$ 的加法在幾何表示中按照矢量加法規則來進行(圖 2, a)。差 $c_1 - c_2$ 可以用起點在點 c_2 、終點在點 c_1 的矢量來表示(圖 2, b)。由此推出, 二點 $c_1 = a_1 + ib_1$, $c_2 = a_2 + ib_2$ 的距離等於差的模: $\rho(c_2, c_1) = |c_1 - c_2|$ 。我們還要指出關於和及差的模的重要不等式

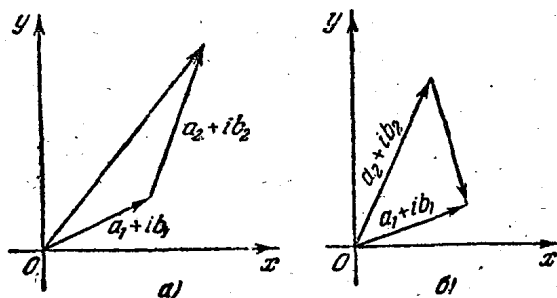


圖 2.

$$|c_1 + c_2| \leq |c_1| + |c_2|, \quad |c_1 - c_2| \geq ||c_1| - |c_2||;$$

等號只在矢量 c_1 和 c_2 共綫而且同方向的時候成立。

第一個不等式可以推廣到任意個被加項的情形:

$$|c_1 + c_2 + \dots + c_n| \leq |c_1| + |c_2| + \dots + |c_n|;$$

這裡的等式也只能在所有 n 個矢量 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 共綫而且指向同一方向的條件下成立。

為了得到乘法的幾何解釋, 將 c_1 和 c_2 寫成三角形形式

$$c_1 = |c_1| (\cos \text{Arg } c_1 + i \sin \text{Arg } c_1),$$

$$c_2 = |c_2| (\cos \text{Arg } c_2 + i \sin \text{Arg } c_2);$$

由乘法的定义得到:

$$c = c_1 c_2 = |c_1| |c_2| [\cos(\text{Arg } c_1 + \text{Arg } c_2) + i \sin(\text{Arg } c_1 + \text{Arg } c_2)];$$

由此得到:

$$|c_1 \cdot c_2| = |c_1| \cdot |c_2|, \quad \text{Arg}(c_1 \cdot c_2) = \text{Arg } c_1 + \text{Arg } c_2$$

(最后的等式应该理解如下: $\text{Arg } c_1$ 和 $\text{Arg } c_2$ 的值的一切可能的和构成一个数的集合, 与 $\text{Arg}(c_1 \cdot c_2)$ 的值的集合重合)。 c_1 乘以 c_2 的几何表示, 就是矢量 c_1 伸長 $|c_2|$ 倍而且繞自己的起点旋轉一个角 $\text{Arg } c_2$ 。对于商 $c_1 : c_2 = \frac{c_1}{c_2}$ ($c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$) 我們得到等式

$$|c_1 : c_2| = |c_1| : |c_2|, \quad \text{Arg}(c_1 : c_2) = \text{Arg } c_1 - \text{Arg } c_2.$$

由最后的等式推出, 矢量 c_1 与 c_2 之間的角度, 由 c_2 到 c_1 按反时針方向計算(准确到 2π 的整数倍), 等于 $\text{Arg } \frac{c_1}{c_2}$:

$$\widehat{c_2, c_1} = \text{Arg } \frac{c_1}{c_2}.$$

由乘法規則得到:

$$c^n = |c|^n (\cos n \text{Arg } c + i \sin n \text{Arg } c),$$

其中 n 是自然数; 显然, 这公式当 $n=0$ ($c^0=1$) 时也是成立的。注意到 $c^{-n} = \frac{1}{c^n}$, 我們得到:

$$c^{-n} = |c|^{-n} [\cos(-n \text{Arg } c) + i \sin(-n \text{Arg } c)].$$

因此, 对于任意整数 m 下列公式成立:

$$c^m = |c|^m (\cos m \text{Arg } c + i \sin m \text{Arg } c).$$

如果 p 和 q 是整数, $q > 2$ 而且分数 $\frac{p}{q}$ 是不可約的, 那么公式

$$c^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{c^p} = \sqrt[q]{|c|^p} \left[\cos\left(\frac{p}{q} \text{Arg } c\right) + i \sin\left(\frac{p}{q} \text{Arg } c\right) \right].$$

的右边給出 $c^{\frac{p}{q}}$ 的 q 个相异的值, 其中 $\sqrt[q]{|c|^p}$ 表示 $|c|^{\frac{p}{q}}$ 的正