数 学 分 析（上册）

复旦大学数学系主编

陈传璋　金福临　胡家赣　朱学炎　欧阳光中　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路 450 号）

新华书店上海发行所发行　上海市印十二厂印刷

开本 850×1156　1/32　印张 10.375　字数 245,000

1962 年 12 月第 2 版　1978 年 3 月第 5 次印刷

书号：13119·355　　定价：1.15 元

内 容 提 要

本书是1960年复旦大学数学系編著"数学分析"試用本的修訂本。修訂是根据两年来試用經驗并参照讀者所提出的一些意見改写的，較初版有了較多的补充和闡述，并附有适量的习题。

本书分上下两册，上册計极限論、微分学两篇，下册包括积分学、无穷級数和广义积分两篇，可作綜合大学数学系数学分析教材，亦可作高等院校有关专业的参考书。

数 学 分 析（下册）

复旦大学数学系主编

陈传璋　金福临　胡家赣　朱学炎　欧阳光中　编

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　上海群众印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 14.625　字数 349,000

1960年5月第1版　1962年12月第2版　1978年5月第5次印刷

书号：13119·357　　定价：1.65元

內 容 提 要

本书是1960年复旦大学数学系編著“数学分析”試用本的修訂本。修訂是根据两年来試用經驗并参照讀者所提出的一些意見改写的，較初版有了較多的补充和闡述，并附有适量的习題。

本书分上下两册，上册計极限論、微分学两篇，下册包括积分学、无穷級数和广义积分两篇，可作綜合大学数学系数学分析教材，亦可作高等院校有关专业的参考书。

序

本书是在复旦大学数学系1960年編著的“数学分析(一)”試用本的基础上重新編写的。其目的是作为綜合大学数学系数学分析基础課的教材或参考书。在这次改編工作中，根据基础課的教学要求及原书在复旦大学数学系試教的实际情况，幷吸取了各方面意見，基本上仍旧保持原书所采用的系統結构，进一步注意到加强基础理論、基础知識和基本訓练，从而对内容作了比較多的补充，也作了适当的改动。此外，幷附入适量的习題。

本书分上下两册計四篇。上册：第一篇极限論，包括变量与函数、数列极限、函数极限、函数連續性等；第二篇微分学，包括一元函数微分学及其应用、多元函数微分学及其应用。下册：第三篇积分学，包括不定积分和定积分及其应用、各种积分的概念及計算和它們之間的联系、場論；第四篇无穷級数和广义积分，包括无穷級数、广义积分、富里埃級数等。

我們对很多兄弟学校及有关单位同志們曾对本书試用本提出不少宝貴意見和积极建議，幷对曹志浩、張乃玲、陈开明、秦曾复、廖有为等同志对本书編写工作所进行的协助，以及上海科学技术出版社对本书出版工作所給予的支持，表示衷心感謝。

由于我們水平有限，編写时間也比較匆促，一定还存在不少缺点，我們除了进一步通过教学实踐来修改，充实，提高外，殷切期望同志們、讀者們随时給予批評指教。

編　者　1962年6月

∇ Nabla

数 学 分 析

下 册

复旦大学数学系 主編

陈傳璋 金福临 胡家赣 朱学炎 欧阳光中 編

(第 二 版)

上 海 科 学 技 术 出 版 社

目　录

（上　册）

017/3

目　录

（下　册）

第三篇　积　分　学

第四篇 无穷級数和广义积分

七

緒　論

本书包括了数学发展过程中微积分的主要內容。从数学历史来讲，微积分的产生标志着从初等数学到高等数学的飞跃。高等数学的研究对象和方法有自己明显的特点。高等数学和初等数学虽然有許多相同的地方，但也存在着許多本质上的差別。我們在这里准备淺显地說明一下高等数学研究的对象和方法具有哪些主要的特点，高等数学和初等数学的联系与差别，以及我們学习高等数学时需要明确的一些主要問題，以便讀者一开始就能密切地注意到这些問題。

高等数学研究的客观对象和方法具有哪些主要特点呢？

我們可以看一看数学发展的历史。十六世紀，由于生产技术的进步，也推动了数学的发展。我們知道，在这一世紀，机械学、航海学、物理学、力学提出了許多新的問題，如：运动着的物体的速度和它的运动規律有怎样的关系，天体是沿着怎样的軌道运行的，不規則图形的面积怎样計算等等。这些問題就要求有新的数学工具来解决，我們可以从下面几个具体例子来說明。

[例 1]　設物体运动規律是

$$s=t^3,$$

s 是物体运动的路程，t 是經过的时間；我們要求出 $t=1$ 秒这一瞬間物体的速度是多少。也就是物理学中所謂的瞬时速度是多少。

利用初等数学的知識，很容易計算出某一段时間間隔內这个物体运动的“平均速度”，那么，我們就从研究平均速度入手。但不能只計算一个或几个平均速度，而要有选擇地計算一連串的平均

速度，观察它們变化的趋势。例如先算出1秒到1.5秒間的平均速度

$$\bar{v}_1=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{3.375-1}{0.5}=4.750\text{ 米/秒},$$

再算出1秒到1.2秒間的平均速度

$$\bar{v}_2=\frac{1.728-1}{0.2}=3.640\text{ 米/秒},$$

继續算下去，得到一連串的平均速度：

1秒到1.1秒間的平均速度 $\bar{v}_3=3.310$ 米/秒、

1秒到1.01秒間的平均速度 $\bar{v}_4=3.030$ 米/秒，

1秒到1.001秒間的平均速度 $\bar{v}_5=3.003$ 米/秒，

…………………………………………………….

可以看出，平均速度 $\bar{v}$ 随着时間間隔的变化而变化。当时間間隔取得越小时，$\bar{v}_n$ 就越接近于我們要寻求的答案。从上述平均速度的趋势看来，$t=1$ 秒时的瞬时速度大体上是3米/秒。

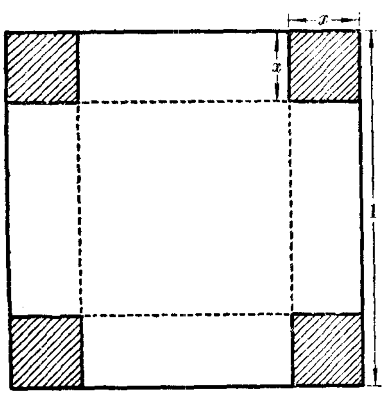

图 0-0-1

［例2］ 某个工厂制造一种鉄盒子时提出了这样一个問題：边长1分米的正方形原材料(图0-0-1)，剪去阴影部分做一个高为 x 的无盖小盒，問 x 取怎样的尺寸才能使盒的容积最大？

不难得出容积 V 和盒高 x 满足以下公式：

$$V=x(1-2x)^2.$$

当取 $$x=\frac{9}{20},\ \frac{2}{5},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7}\text{(分米)时，得}$$

$V = 0.0045, 0.0160, 0.0370, 0.0720, 0.0716$（分米^3）。

这些容积 V（图 0-0-2）随 x 的变化而变化，当 x 由大变小时，V 相应地由小到大再由大到小。从而，我們可以看出最大体积 V 大体上是出現在 $x=\frac{1}{5}$ 及 $x=\frac{1}{7}$ 之間。如果在 $x=\frac{1}{5}$ 及 $x=\frac{1}{7}$ 之間再取一串数值，算得更細些，那么我們对于什么时候容积最大，会看得更准确些。

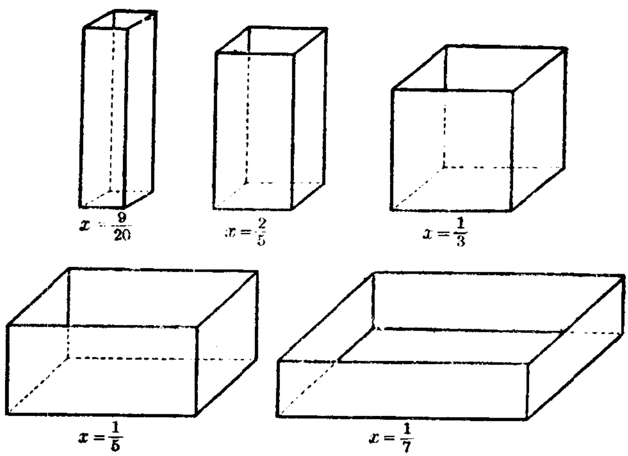

图　0-0-2

［例 3］ 現代科学技术常要求我們計算許多不規則图形的面积（图 0-0-3）。当然，越不規則，計算起来越复杂。我們来計算一

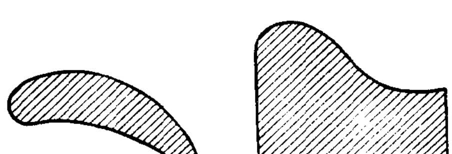

图　0-0-3

个較为簡单的叫做"曲边梯形"的面积作为例子，曲边是 $y=x^2$ 的一部分(图 0-0-4)。

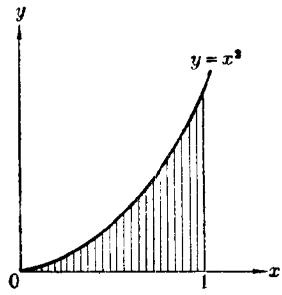

图 0-0-4

利用初等数学中的方法，我們按照图 0-0-5 中所示作出許多小矩形，这些小矩形面积的和近似于我們所求的面积，用这样的方法可以作出一連串不同的矩形面积之和 s_n 作为近似值。当然任何一个 s_n 不等于所求的曲边梯形的面积，但是随着分段愈来愈細，s_n 的变化趋势也愈来愈接近于曲边梯形面积。由图 0-0-5 所示可以看出，所求面积的值大体上在 $\frac{1}{3}$ 左右。

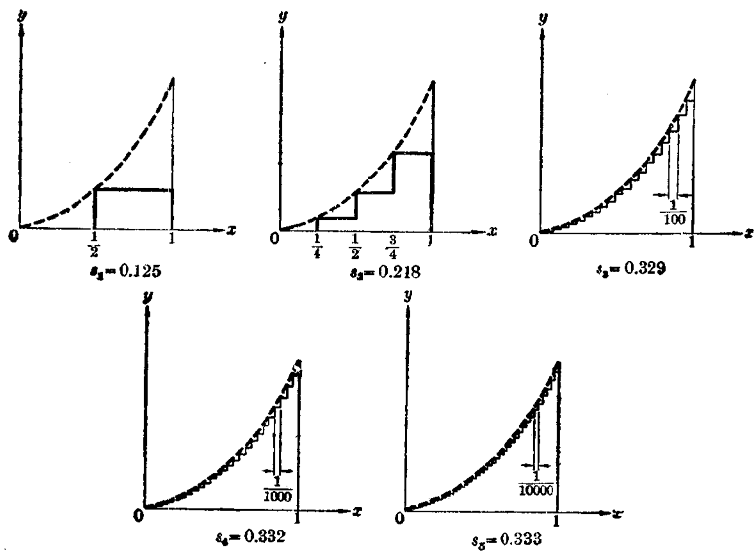

图 0-0-5

从以上三个例子我們看到：

1. 用初等数学工具来解决这一类問題不仅相当麻煩，而且又不能得到最終的答案，只能作大体上的估計；这是因为初等数学只能在有限的范圍内孤立地来討論問題。例如做盒子吧，用初等数学的办法，只能作出有限个盒子来加以比較；再如求速度吧，初等数学只能够考虑某个时間間隔内的平均速度；因此初等数学只能孤立地考虑某个片断。

2. 这一类問題都要求人們具有这样的一种观念，那就是必須在变化的过程中来考虑問題。无論如何不能只考虑一个片断，而应該考虑前后联系和变化的发展。例如做盒子吧，决不能停留在有限个盒子上，而应該在容积的变化过程中来找出一个具有最大容积的盒子。

由于大量类似的問題需要解决，从而产生了高等数学。

虽然如此，初等数学在很多的場合下仍旧起着重要的作用，但它总有一定的局限性，从上面的問題中我們也看到了这一点。

高等数学的方法和初等数学的方法根本不同，它要求在变化的过程中来掌握变量的实质。这样，既需要洞察过程的全貌，又需要作极其精細的分析，往往要研究在某一点极其微小的附近变量变化的情况。作个譬喻，一个好的短跑教练，他不仅要洞察整个跑步过程的全貌(从起点到終点)，同时还要对某些地方作极其精細的分析。例如必須仔細分析起跑动作以及終点冲刺动作。

为了作进一步說明，我們再举一个例子。

[例 4] 如同第二个例子一样，計算下面两个曲边梯形的面积，我們得到如图 0-0-6 所示的一系列矩形面积的和。

这些和数，随着分割愈来愈密，也就愈来愈接近于所求的面积。从图中我們看到，$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的那块曲边梯形面积，大致上是

2，但 $y=\frac{1}{x^3}$ 的那块曲边梯形面积却是越来越大，以致求不出这块面积。这两个图形虽然大致上差不多，但为什么一个面积可以求出来而另一个面积求不出来呢？

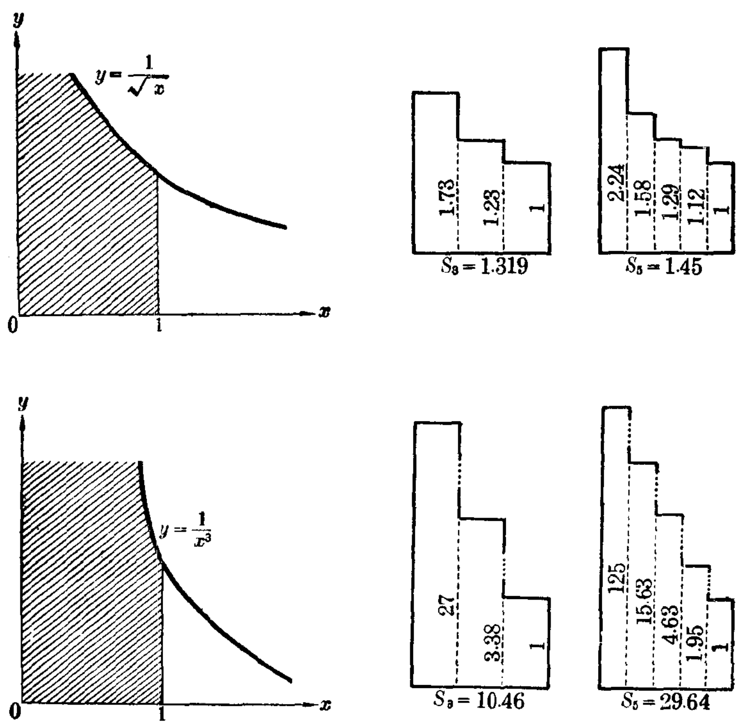

图 0-0-6

这是因为在 0 点出了問題，如果我們不去算 0 到 1 的那块面积，而是算 $\frac{1}{2}$ 到 1，或从 $\frac{1}{3}$ 到 1，从 $\frac{1}{4}$ 到 1 等等之間的面积，可象例 3 那样得到最終的結果。因此我們看到，只要把 0 点除去，計算从某个定数 $\delta>0$ 到 1 的那块面积，直观上告訴我們，无論对哪一个图形这个面积一定是存在的。