

普通工科高等院校教材

高等数学

第三版 上册

同济大学函授数学教研室 编著

同济大学出版社

普通高等工科院校教材

高等数学 (第三版)

上 册

同济大学函授数学教研室 编著



同济大学出版社

内 容 提 要

本书是在1998年出版的“高等工科院校函授自学教材”《高等数学》(第二版)的基础上,参照教育部1998年颁布的成人高等教育工科各专业本科用《高等数学课程教学基本要求》而修订的。全书仍分上、下两册,共16章。上册内容为一元函数微积分、向量代数与空间解析几何等10章;下册内容为多元函数微积分、无穷级数、微分方程等6章。书中每章后配有“学习指导”,以内容小结与例题分析为主,着重于帮助学生提高解题能力。

本书条理清晰,论述准确;由浅入深,循序渐进;推演论证,跨度较小;重点突出,难点分散;例题较多,典型性强;深广度要求适当,便于自学和教学。它可作为普通高校或成人高校工科类各专业本科或专升本使用,也可供工程技术人员或参加国家自学考试及学历文凭考试的读者作为自学用书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/同济大学函授数学教研室编著.
3版.-上海:同济大学出版社,2002.10
普通高等工科院校教材
ISBN 7-5608-2477-3

I. 高... II. 同... III. 高等数学-高等学
校-教材 IV. 013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第052516号

高等数学(上册)(第三版)

同济大学函授数学教研室 编著

责任编辑 李炳钊 责任校对 郁 峰 封面设计 李志云

出 版	同济大学出版社
发 行	(上海四平路1239号 邮编200092 电话021-65985622)
经 销	全国各地新华书店
印 刷	常熟市华顺印刷有限公司
开 本	787mm×960mm 1/16
印 张	32
字 数	640 000
印 数	33 001—37 100
版 次	2002年10月第三版 2006年8月第四次印刷
书 号	ISBN 7-5608-2477-3/O·218
定 价	30.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换

第三版前言

本教材原来是侧重于为函授生使用而编写的,它比较便于自学,也适合于函授教学环节的操作.现考虑到有些全日制工科院校本科或专升本的教学,也都已选用本教材作为“高等数学”课程的教学用书.为了使这套教材除了可供函授教学使用外,也能适用于全日制工科类各专业的本科或专升本教学使用,我们在原书的基础上,特作了修订和改版.

这次改版,全书仍分为上、下两册.除了对原书的某些内容作了修改外,还重新组编了各节后的习题,另编成“高等数学习题集”,改变了原书中把习题分为节后“练习题”和章后“习题”的两段做法.为了帮助学生掌握各章内容要点,提高运用所学知识解题的能力,我们还着重改编了各章后的“学习指导”,以内容小结和例题分析为主要内容.

参加这次修订工作的有刘浩荣、郭景德、顾吉衢、谈祝多、许新福等.由于我们的水平有限,修订的时间又较匆促,难免还有许多错误或不当之处,恳请读者或同行不吝批评指正.

编 者

2002年3月于同济

第二版前言

由同济大学函授数学教研室编著、同济大学出版社出版的高等工科院校函授自学教材《高等数学》(上、下册),自1993年出版以来,得到了许多兄弟院校的大力支持,三年内已五次印刷,总计印数近五万套,为了进一步提高教材的质量,更好地适应成人教育发展的需要,保证函授本科教育的质量,我们认真总结原教材在试用中存在的问题,听取有关兄弟院校对使用教材的意见,参照1993年修订的“教学基本要求”,重新修订编写了这套本科函授《高等数学》教材.新版教材仍分上、下两册.上册除“函数、极限和连续”、“一元函数微积分”外,还有“向量代数及空间解析几何”;下册包括“多元函数微积分”、“无穷级数”和“微分方程”等.

新版教材继续保留了原教材的特色,它既便于自学,也具有适合于函授教学操作使用的多功能作用.为使教材的质量和水平更上一个新的台阶,我们在新版教材中主要采取了以下一些新的举措:

1. 使教材的内容及深广度更加符合“成人教育工科类各专业本科《高等数学》课程的教学基本要求”.按照全国普通理工院校成人教育研究会数学学科委员会于1993年修订的“教学基本要求”,我们在新编教材中又删去了若干超出基本要求的或打“*”号的内容,例如,在上册中,删去了“反双曲函数”、“ Γ -函数”、“向量的混合积”等.此外,对有关附录及“自学指导”中不必要的重复内容,也都作了删减,以有利于压缩教材的篇幅.

2. 考虑到对原教材使用的习惯性和连续性,新版教材基本上保留了原有的体系,只是从有利于组织教学和使用方便的角度考虑,对部分章节内容及安排次序作了适当的调整或变动.例如,考虑到许多学校分两学期教学的安排,我们把原教材下册中的“向量代数”及“空间解析几何”提前放入上册之末,且对这部分内容作了较大的修改,使内容安排上更为紧凑些.与此同时,还删去了“空间立体图形的作法”这一节,把作图的要求分散到前面各节的例题中去,并有待于学习“三重积分”时再反复深化.

此外,从有利于突出重点或分散难点考虑,在对部分章节的内容组织及写法上都作了较大的变动或修改.例如,“复合函数”、“函数的极限”、“不定积分的换元法”、“向量的坐标表示法”等重点内容都作了较多的修改或重写.又如,为了分散难点,把原教材中“有关极限的定理”这一节拆散,分别放入“函数的极限”和“无穷小与无穷大”等有关节内,以避免几个极限定理过于集中在一起,增加自学的难度.

3. 为了方便自学者在完成作业时参考或查对答案,我们改变了过去把答案附

于书末的传统习惯,紧跟各次习题作业之后,便附上有关答案或提示,这样,既方便查找,也有利于编者校对,以减少原书稿或排版中的错误.为了加强对基本概念的训练,适应考试题型的更新,我们在每章之末的“复习思考题”部分,都配有(A),(B)类题.前者是普通题型(计算题、应用题、证明题等),后者是标准化题(选择题、填空题、是非题等).

4. 修改了原书中部分不恰当的例题或习题.为适应社会主义市场经济的发展需要,在不增加教学内容的前提下,适当地扩充应用题的范围.例如,把求函数的最大值和最小值的原理与方法,扩充应用于经济决策分析中,求某种条件下的“最大利润”、“最低成本”、“最佳产量”等,对于数学在物理、力学中的应用仍不减弱,以充分体现工科教材理论联系实际、重视实际应用的特色.

5. 新版教材按国际规定使用有关数学符号.如“ x 的正切”和“ x 的反正切”,分别用“ $\tan x$ ”和“ $\arctan x$ ”表示,而不再用“ $\operatorname{tg} x$ ”和“ $\operatorname{arctg} x$ ”;“ x 的余切”和“ x 的反余切”,分别用“ $\cot x$ ”和“ $\operatorname{arccot} x$ ”表示,而不再用“ $\operatorname{ctg} x$ ”和“ $\operatorname{arcctg} x$ ”.

通过严格把握教材内容及出版的质量,我们相信,新版教材将会更受成人教育界的欢迎.本书可供各类成人学历教育工科类本科或专升本层次的专业学生作为教材,也可作为全日制本科专业学生或自学考试者的教材或参考书.

本教研室参加这次修订编写工作的有:刘浩荣、郭景德、许新福、周忆行、谈祝多、顾吉衢等.由于我们的水平所限,书中难免还有不足或错误之处,恳请诸位读者不吝指正.

编 者

1998年1月

前 言

本书是在总结我校原有的函授《高等数学》教材及多年来的函授教学经验的基础上,根据全国普通高等理工院校成人教育研究会数学研究组制定的“成人教育本科《高等数学》教学基本要求”编写而成的.全书分上、下两册,其中上册为一元函数微积分;下册包括向量代数及空间解析几何、多元函数微积分、级数与微分方程等.

根据函授教学以“自学为主,面授为辅”的特点,我们在编写此书时,力求做到:概念清楚,论述正确;循序渐进,由浅入深;例题较多,台阶较小;重点突出,难点分散.为使教材便于自学,便于使用,具有多种功能,我们在编写时,注意采取了以下一些措施:

(1)取材“少而精”.对于超出教学基本要求的内容,一般都不编入;对于个别后继课程用得较多的内容,则以“*”号标出,可以不作为必读的内容,仅供需要时查阅参考.

(2)在内容的安排上,尽量保持章节间相对的独立性.照顾到少学时专业或专科类专业函授生使用时,可以方便地删减取舍.

(3)注意理论联系实际,重视学生能力的培养.尽可能使数学的概念、理论与应用相结合,并适当增加数学在物理、力学中的应用举例.

(4)在每章之末都编写了“自学指导”.一方面指出学习该章的基本要求及重点,使学生自学后能够“心中有数”;另一方面对于某些概念、重点或难点,为避免多占正文的篇幅,放入“自学指导”,指出应当注意的问题,并适当地解释和说明,以弥补函授生在自学中缺少教师指导的不足.

(5)贯彻“学练结合,适当反复”的教学原则.在每节后都附有较为简单的练习题,以供学生消化所学的内容;在每章之末配有习题,以供学生在自学的基础上系统而又全面消化巩固所学的知识;为便于复习或提高的需要,在每章之末还选编了适量的复习思考题.这些习题在书后均附有答案,个别较难的题也都附有提示,可供学生参考.此外,为了定期检查学生的自学效果,书中还精心地选编了阶段性的测验作业题.

(6)考虑到学生多分散于各基层单位,查找有关资料可能不便,我们在上册书末还特地附有积分表、初等数学常用公式及平面解析几何(摘要)等附录,可供查阅.

参加本书编写的有本教研室顾吉衢、谈祝多、周忆行、周葆一、郭景德、刘浩荣等同志.其中第一、二、九、十、十一章由郭景德执笔;第三、五章由周葆一执笔;第

四、十四、十五、十六章由周忆行执笔;第六、七、八、十二、十三章由刘浩荣执笔.顾吉衢、谈祝多担任编写工作的指导,刘浩荣组织全书的汇总定稿,并选编了上册末的有关附录的内容.

本书经同济大学谈祝多副教授及北京科技大学原函授部主任钱文侠研究员详细审阅.他们对全书的初稿提出了许多宝贵的意见,对于修改定稿起到了重要的作用.在编写过程中,我们曾广泛地参考了许多国内外的《高等数学》教材,特别是本校及其他兄弟院校编写出版(或未正式出版)的《高等数学》教材或函授专用教材.在此,我们一并表示衷心的感谢.

这套函授自学教材的编写出版,曾得到同济大学函授学院、应用数学系及同济大学出版社有关同志的关心与支持,也得到了本教研室的许多老师的热情帮助与支持,我们也深表感谢.

本书除了工科专业函授生可以作为“高等数学”教材使用外,也可供工科类成人教育的电大、职大、夜大学生及广大自学者或工程技术人员作为教材或自学参考书.对于全日制工科类专业的大学生,也是比较合适的参考书.

由于我们的水平所限,书中难免有许多不足或错误之处,诚恳地希望广大读者批评指正.

编 者

1991年4月于同济

目 录

第一章 函数

1.1 集合、区间、邻域.....	(1)
一、集合(1) 二、实数的绝对值(3) 三、区间和邻域(4)	
1.2 函数的概念	(6)
一、变量与常量(6) 二、函数的概念(6) 三、函数的表示法与分段函数(9)	
1.3 函数的几种特性.....	(11)
一、函数的有界性(11) 二、函数的奇偶性(12) 三、函数的单调性(13)	
四、函数的周期性(15)	
1.4 反函数与复合函数	(17)
一、反函数(17) 二、复合函数(19)	
1.5 基本初等函数与初等函数	(23)
一、基本初等函数(23) 二、初等函数(27) 三、双曲函数(28)	
1.6 建立函数关系式举例	(30)
学习指导	(33)

第二章 极限与连续

2.1 数列的极限	(40)
一、数列的概念及其性质(40) 二、数列的极限(42) 三、数列的收敛性与有界性的关系(46)	
2.2 函数的极限	(50)
一、自变量趋向于无穷时函数的极限(50) 二、自变量趋向于有限值时函数的极限(52) 三、函数极限的性质定理(57)	
2.3 无穷小和无穷大	(58)
一、无穷小的概念及运算(59) 二、无穷大的概念(60) 三、无穷大与无穷小的关系(62) 四、具有极限的函数与无穷小的关系(63)	
2.4 极限的运算法则	(63)
一、极限的四则运算法则(64) 二、复合函数的极限(69) 三、极限的不等式定理(70)	

2.5 极限存在的夹逼准则 两个重要极限	(71)
一、极限存在的夹逼准则(71) 二、两个重要极限(73)	
2.6 无穷小的比较	(78)
一、无穷小比较的概念(78) 二、等价无穷小的性质及其应用(80)	
2.7 函数的连续性与间断点	(81)
一、函数的连续性(81) 二、左、右连续及连续的充要条件(84)	
三、函数的间断点及其分类(86)	
2.8 连续函数的运算及初等函数的连续性	(89)
一、连续函数的四则运算(89) 二、反函数与复合函数的连续性(89)	
三、初等函数的连续性(90)	
2.9 闭区间上连续函数的性质	(92)
一、最大值和最小值定理(92) 二、介值定理(94)	
学习指导	(96)

第三章 导数与微分

3.1 导数的概念	(105)
一、变化率问题举例(105) 二、导数的定义(107) 三、根据定义求导数举例(108)	
四、导数的几何意义(111) 五、函数的可导性与连续性的关系(113)	
3.2 函数的四则运算的求导法则	(115)
一、函数的和、差的求导法则(115) 二、函数的积的求导法则(117)	
三、函数的商的求导法则(119)	
3.3 反函数的导数	(121)
一、反函数的求导法则(121) 二、指数函数的导数(122) 三、反三角函数的导数(123)	
3.4 复合函数的求导法则	(124)
3.5 初等函数的导数和分段函数的求导举例	(129)
一、初等函数的导数(130) 二、分段函数求导举例(131)	
3.6 高阶导数	(132)
3.7 隐函数的导数 由参数方程所确定的函数的导数	(137)
一、隐函数的导数(137) 二、对数求导法(139) 三、由参数方程所确定的函数的导数(140)	
3.8 函数的微分	(144)
一、微分的定义(144) 二、函数可微与可导之间的关系(145) 三、微分的几何意义(147)	
四、函数的微分公式与微分法则(148) 五、复合函数的微分法则与微分形式不变性(149)	
3.9 微分的应用	(151)

一、微分在近似计算中的应用(151)	二、微分在误差估计中的应用(154)
学习指导	(157)

第四章 中值定理与罗必塔法则

4.1 中值定理	(168)
一、罗尔定理(168)	二、拉格朗日定理(170)
三、柯西定理(173)	
4.2 罗必塔法则	(175)
一、 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的罗必塔法则(175)	二、其他未定式的计算(178)
4.3 泰勒公式	(180)
学习指导	(186)

第五章 导数的应用

5.1 函数的单调性的判定法	(199)
5.2 函数的极值及其求法	(204)
5.3 最大值、最小值问题	(210)
一、函数在闭区间上的最大值和最小值(210)	二、实际问题中的最大值和最小值(212)
5.4 曲线的凹凸性与拐点	(215)
一、曲线的凹凸性(215)	二、曲线的拐点(218)
5.5 函数图形的描绘	(220)
一、曲线的水平渐近线与铅直渐近线(220)	二、函数图形的描绘(221)
5.6 曲率	(225)
一、弧微分(225)	二、曲率的概念及计算公式(226)
三、曲率半径与曲率圆(232)	
学习指导	(234)

第六章 不定积分

6.1 原函数与不定积分	(244)
一、原函数与不定积分的概念(244)	二、基本积分表(249)
三、不定积分的性质(251)	
6.2 换元积分法	(255)
一、第一类换元法(256)	二、第二类换元法(264)
三、基本积分表的扩充(270)	
6.3 分部积分法	(272)

6.4 有理函数的积分	(279)
一、把有理真分式化为部分分式之和(279)	二、有理真分式的积分(284)
6.5 三角函数有理式的积分及简单无理函数的积分举例	(290)
一、三角函数有理式的积分(290)	二、简单无理函数的积分举例(293)
6.6 积分表的使用	(295)
学习指导	(299)

第七章 定积分

7.1 定积分的概念	(316)	
一、引入定积分的两个实例(316)	二、定积分的定义(319)	三、定积分的几何意义(321)
7.2 定积分的性质 中值定理	(324)	
7.3 牛顿-莱布尼兹公式	(330)	
一、变上限的定积分(330)	二、牛顿-莱布尼兹公式(333)	
7.4 定积分的换元积分法	(337)	
7.5 定积分的分部积分法	(344)	
7.6 定积分的近似计算法	(348)	
一、矩形法(349)	二、梯形法(349)	三、抛物线法(350)
7.7 广义积分	(354)	
一、无穷区间上的广义积分(354)	二、无界函数的广义积分(357)	
学习指导	(360)	

第八章 定积分的应用

8.1 平面图形的面积.....	(376)	
一、直角坐标情形(376)	二、极坐标情形(380)	
8.2 某些特殊立体的体积	(382)	
一、平行截面面积为已知的立体的体积(382)	二、旋转体的体积(384)	
8.3 平面曲线的弧长.....	(387)	
一、直角坐标情形(387)	二、参数方程情形(389)	三、极坐标情形(391)
8.4 功和动能	(392)	
一、功(393)	二、动能(397)	
8.5 水压力与引力	(398)	
一、水压力(398)	二、引力(403)	
* 8.6 平均值与均方根	(404)	

一、函数的平均值(404)	二、均方根(407)	
学习指导		(408)

第九章 向量代数

9.1 空间直角坐标系	(419)
一、空间直角坐标系(419)	二、空间内点的直角坐标(420)
三、空间内两点间的距离公式(421)	
9.2 向量的概念及其几何运算	(422)
一、向量的概念(422)	二、向量的加、减运算(423)
三、数与向量的乘法(425)	
9.3 向量的坐标	(428)
一、向量在轴上的投影(428)	二、向量的坐标(431)
三、向量线性运算的坐标表示式(432)	四、向量的模及方向余弦的坐标表示式(435)
9.4 向量的数量积	(438)
一、数量积的定义及其运算性质(438)	二、数量积的坐标表示式及两个向量垂直的充要条件(441)
9.5 向量的向量积	(444)
一、向量积的定义及其运算性质(444)	二、向量积的坐标表示式及两个向量平行的充要条件(446)
学习指导	(448)

第十章 空间解析几何

10.1 空间平面及其方程	(453)
一、平面的点法式方程(453)	二、平面的一般方程(455)
三、平面的截距式方程(457)	四、两平面的夹角及两平面平行或垂直的条件(458)
五、点到平面的距离公式(460)	
10.2 空间直线及其方程	(461)
一、空间直线的一般方程(461)	二、空间直线的点向式、两点式及参数方程(462)
三、两直线的夹角及两直线平行或垂直的条件(464)	四、直线与平面的夹角及平行或垂直的条件(466)
五、平面束方程(467)	
10.3 空间曲面及其方程	(474)
一、曲面与方程的概念(474)	二、球面(474)
三、柱面(475)	四、旋转曲面(477)
10.4 空间曲线及其方程	(480)
一、空间曲线的一般方程(480)	二、空间曲线的参数方程(481)

三、空间曲线在坐标面上的投影(482)	
10.5 二次曲面	(484)
一、椭球面(485) 二、椭圆抛物面(486) 三、单叶双曲面(487)	
四、双叶双曲面(489) 五、双曲抛物面(490)	
学习指导	(490)

第一章 函 数

函数是高等数学研究的主要对象. 本章将在中学代数关于函数知识的基础上来进一步讨论函数. 首先, 我们用集合论的观点给出函数的一般定义, 然后着重介绍后面的章节中常用到的概念: 函数的特性、基本初等函数、复合函数及初等函数.

1.1 集合、区间、邻域

一、集 合

研究事物时, 常要按事物的某些性质进行归类, 由此产生了集合的概念. 一个**集合**(简称为**集**)是具有某种共同性质的事物的全体. 集合中的每一个单一的事物称为集合的**元素**. 例如:

某工厂生产的所有产品构成一个集合, 其中每个产品是集合的元素;

小于 2 的所有实数构成一个集合, 其中的每个实数是集合的元素;

方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的一切根构成一个集合, 其中每一个根是集合的元素;

直角坐标平面中, 圆心在原点、半径为 R 的圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上的点 (x, y) 的全体构成一个集合, 圆上的每个点 (x, y) 是集合的元素.

本书主要用到的集合是**实数集**, 即元素是实数的集合. 全体实数构成的集合记作 $\mathbf{R}$. 本书还要用到元素是点(直线、平面、空间上的点)的集合, 简称为**点集**.

集合常用大写的字母如 A, B, C, E, N, M 等表示; 集合的元素常用小写的字母如 a, b, e, x, y, t 等表示. 给定一个集合 M , 若 a 是 M 的元素, 则记作

$$a \in M$$

(读作 a 属于 M), 若 a 不是 M 的元素, 则记作

$$a \notin M \text{ (或 } a \not\in M)$$

(读作 a 不属于 M).

集合的构成常用花括号记法表示. 一般有两种表示方法: 一种是列举法, 就是把集合中所有的元素都一一列举出来, 写在花括号“ $\{ \}$ ”内. 例如, 全体自然数集可以表示成

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

另一种方法是描述法, 就是在花括号内, 左边写出集合的一个代表元素, 右边写出集合的元素所具有的性质, 中间用竖线“ $|$ ”分开. 例如, 满足不等式 $-3 < x < 1$ 的一切实数 x 所构成的实数集, 可以表示成

$$A = \{x \mid -3 < x < 1\}.$$

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素, 即若 $e \in A$, 必有 $e \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记作

$$A \subset B \quad \text{或} \quad B \supset A$$

(读作 A 含于 B 或 B 包含 A).

若 A 是 B 的子集, 而 B 又是 A 的子集, 则称集合 A 与集合 B 相等, 记作

$$A = B.$$

设集合 A 是集合 U 的子集, 属于 U 而不属于 A 的所有元素构成的集合称为 A 在 U 内的余集, 记作 $\bar{A}_U$ (见图 1-1), 即

$$\bar{A}_U = \{e \mid e \in U, \text{且 } e \notin A, A \subset U\}.$$

例如, 集合 $A = \{1, 2\}$ 是集合 $U = \{1, 2, 4, 6\}$ 的子集. 集合 A 在 U 内的余集为 $\bar{A}_U = \{4, 6\}$.

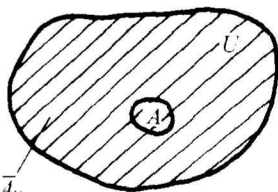


图 1-1

下面介绍有关集合的运算.

把两个集合 A 和 B 的元素合在一起构成一个新的集合 (A 与 B 中若有两个元素相同, 在新集合中只算一个元素), 此集合称为 A 和 B 的并集, 记作 $A \cup B$, 即

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \text{ 或 } e \in B\}. \quad (1.1)$$

从两个集合 A 和 B 中, 取出所有相同的元素构成一个新的集合, 此集合称为 A 和 B 的交集, 记作 $A \cap B$, 即

$$A \cap B = \{e \mid e \in A \text{ 且 } e \in B\}. \quad (1.2)$$

$A \cup B$ 及 $A \cap B$ 如图 1-2 所示.

例 1 设 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \mid 2 < x \leq 6\}$, 求 $A \cup B$ 及 $A \cap B$.

解 根据定义有

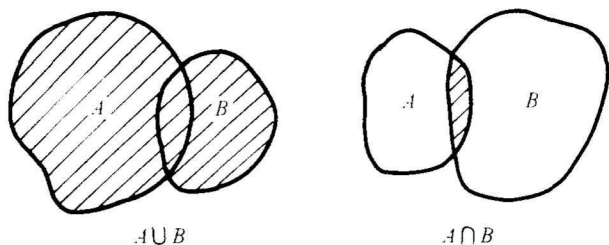


图 1-2

$$A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 6\}; \quad A \cap B = \{x \mid 2 < x \leq 5\}.$$

为了讨论方便,我们引入空集的概念.不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\emptyset$.例如,集合 A 和它在 U 内的余集 $\bar{A}_U$ 的交集不含有任何元素,所以它是空集,即 $A \cap \bar{A}_U = \emptyset$.再如,不存在同时满足不等式 $x < 2$ 及 $x > 3$ 的实数,因此,集合 $\{x \mid x < 2 \text{ 且 } x > 3\} = \emptyset$.应注意,空集不能写成 $\emptyset = \{0\}$.这是因为集合 $\{0\}$ 中含有一个元素 0 ,所以它不是空集.

二、实数的绝对值

一个实数 a 的绝对值定义为

$$|a| = \begin{cases} -a, & \text{当 } a < 0 \text{ 时;} \\ a, & \text{当 } a \geq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

它在几何上表示数轴上的点 a 到原点 O 的距离.由算术根的意义可知

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

常用的绝对值性质主要有:

- (1) $-|a| \leq a \leq |a|$;
- (2) $|a| \leq k$ (k 是实数,且 $k > 0$) 等价于 $-k \leq a \leq k$;
- (3) $|a+b| \leq |a| + |b|$;
- (4) $||a| - |b|| \leq |a-b|$;
- (5) $|ab| = |a| \cdot |b|$;
- (6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$).

下面仅证明性质(3)和(4).

证 (3) 由性质(1)知,