★★★★★

东方飞龙 EFdragon.com

考研最后冲刺 2004

DONGFANGFEILONG

概率论与数理统计

高分过关300题

胡金德　1989－1997年数学命题小组组长　编

盛祥耀　1989－1995年数学命题小组组长

蔡燧林　1992－2000年数学命题组组长　著

陈　魁　著名考研辅导老师

策　划　东方飞龙

敬告读者

1 本书为赠送品而非卖品

2 凡购买一本《数学命题预测基础过关1800题》（胡金德等编著、知识产权出版社出版）的读者均可到原购书单位免费领取该书一本。

赠

概率论与数理统计

高分过关 300 题

编　著　盛祥耀　1989～1995 年数学命题小组组长
　　　　蔡燧林　1992～2000 年数学命题组组长
　　　　胡金德　1989～1997 年数学命题小组组长
　　　　陈　魁　著名考研辅导老师
策　划　东方飞龙

知识产权出版社

前　言

作者在编这本《概率论与数理统计高分过关300题》时，力图做到：

1. 全面体现高等学校数学教学大纲(本科非数学专业)和最新研究生入学考试数学考试大纲中概率论部分的内容和要求，试题限制在考试大纲范围之内，不列入超大纲内容的试题。

2. 提供足够数量的试题(本书共有350题)并给出了解答，有的还给出了多种方法，以帮助考生解决典型试题的技能，但希望不要依赖于解答，而要自己多动脑、动手，以使练试题发挥应有的效用。

3. 提供有助于阐明基本概念和相互联系的试题，这是要求考研生具有较强的综合分析问题和解决问题的能力所设置的，也是一些考生所缺乏的。

最后要请考研生注意，数学共有四个卷种，它们从内容上区别是：

数学一：本书全部

数学二：不要求

数学三：本书全部

数学四：要求第1章到第五章

在难度要求上，以数学一要求最高，后面依次是数学三、四，读者可自行掌握。

由于水平有限，错误和不当之处在所难免，敬请读者不吝赐教。

编　者

2003年9月

目　　录

第一章 随机事件及其概率

强化试题

1.1 掷一只骰子,观察朝上一面出现的点数.

(1) 若用事件 A 表示"出现奇数点",事件 B 表示"点数小于 5",事件 C 表示"大于 3 的偶数点".试用集合表示下列事件:$A\cup B,A\cup B\cup\bar{C},AB,A-B,ABC$;

(2) 对事件 A,B,验证德莫根定律.

1.2 设有 3 事件 A,B,C,试用事件的关系表示下列事件:

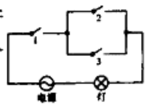
(1) 正好有 1 个事件发生;(2) 正好有 2 个事件发生;

(3) 至少有 1 个事件发生;(4) 至少有 2 个事件发生;

(5) 最多有 1 个事件发生;(6) 最多有 2 个事件发生.

1.3 设事件 A,B,如果 $AB=\bar{A}\,\bar{B}$,问 A 与 B 是什么关系?

1.4 图中给出了一个电路图,事件 A 表示"灯亮",事件 B_i 表示开关 i 闭合 $(i=1,2,3)$.试讨论这四个事件的关系.



1.4 题图

1.5 设有 10 件产品,其中有 6 件正品,4 件次品,从中任取 3 件,求下列事件的概率:

(1) $A=\{$没有次品$\}$;

(2) $B=\{$只有 1 件次品$\}$;

(3) $C=\{$最多 1 件次品$\}$;

(4) $D=\{$至少 1 件次品$\}$.

1.6 5 张数字卡片上分别写着 1,2,3,4,5,从中任取 3 张排成 3 位数,求下列事件的概率.

(1) 3 位数小于 400;

(2) 3 位数是偶数;

(3) 3 位数是 5 的倍数.

1.7 从 6 名候选人甲、乙、丙、丁、戊、己中选出 4 名作为委员,求甲、乙中最多有 1 人被选中的概率.

1.8 有标号为 1,2,3,4,5,6,7,8,9 的 9 张卡片,从中任取 2 张,求下面事件的概率:

(1) 至少有 1 张卡片标号不小于 7;

(2) 两张卡片标号之和不超过 10.

1.9 从 0,1,2…,9 这十个数字中,任取 3 个数

(1) $A_1=\{3$ 个数中不含 0,5$\}$,$A_2=\{3$ 个数中含 0 不含 5$\}$,$A_3=\{3$ 个数中不含 0 或 5$\}$,求 $P(A_1)$,$P(A_2)$,$P(A_3)$;

(2) $B_1=\{$只构成二位数$\}$,$B_2=\{$构成大于 500 的三位数$\}$,求 $P(B_1)$,$P(B_2)$.

1.10 从 0,1,2,…,9 这十个数字中,任取 4 个构成 4 位数,求 4 位数是偶数的概率.

1.11 现有 10 卷书要放到书架上去,其中有成套的书两种,一套 3 卷,一套 4 卷,考虑如下 4 种放法:

(1) 3 卷一套的放在一起;

(2) 4 卷一套的放在一起;

(3) 两套各自放在一起;

(4) 两套至少有一套放在一起.

求各种放法的概率.

1.12 某单位有 20 套新房(在同一楼层顺序排开),某人先分到一套(不在两端),不久又有 9 套分下去.求此人所分新房的相邻两套尚未分配出去的概率.

1.13 现有 10 人分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章,从中任选 3 人,记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率;

(2) 求最大号码为 5 的概率;

(3) 求中间号码为 5 的概率;

(4) 求正好有 1 人号码为 5 的概率;

(5) 求没有 1 人号码为 5 的概率;

1.14 某公司发出 17 桶油漆,其中白漆 10 桶,黑漆 4 桶,红漆 3 桶,在搬运过程中,所有标签全部脱落,交货人随意地将油漆发给顾客,现有 1 顾客定货为白漆 4 桶,黑漆 3 桶,红漆 2 桶,求该顾客能如数得到定货的概率.

1.15 50 个铆钉中有 3 个强度太弱,假若这 3 个铆钉装在同一个部件上,则这个部件的强度就不合格.现有 10 个部件,每个部件上要 3 个铆钉.若从 50 个铆钉中随机地取用,问恰好有 1 个部件强度不合格的概率是多少?

1.16 袋中有 6 只红球、4 只黑球,今从袋中随机取出 4 只球.设取到一只红球得 2 分,取到一只黑球得

1 分,则得分不大于 6 分的概率是

(A)$\frac{23}{42}$　(B)$\frac{4}{7}$　(C)$\frac{25}{42}$　(D)$\frac{13}{21}$

1.17　将 3 个小球随机地放入 4 个盒子中,求盒子中球的最多个数分别为 1,2,3 的概率.

1.18　抛掷 4 个骰子,求朝上一面的 4 个数全不相同的概率.

1.19　求下列事件的概率:

(1) A:同房间的 4 个学生,至少有 2 人生日在同一个月;

(2) B:同一班的 30 个学生中,至少有 1 人生日在 10 月 1 日;

(3) C:参加聚会的 K 个人中至少有 2 人生日相同;

(4) D:K 个人中至少有 2 人生日在 10 月 1 日.

1.20　已知 $P(A)=0.3,P(B)=0.4,P(A|B)=0.5$.

(1) 求 $P(AB),P(A\cup B)$;

(2) 求 $P(B|A)$;

(3) 求 $P(B|A\cup B)$;

(4) 求 $P(\bar{A}\cup\bar{B}|A\cup B)$.

1.21　已知 $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{6}$,求 $P(\bar{A}|\bar{B})$.

1.22　已知 $P(A)=0.7,P(B)=0.4,P(A\bar{B})=0.5$,求 $P(B|A\cup\bar{B})$.

1.23　已知 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$,求 $P(\bar{A}\,\bar{B})$.

1.24　为了安全生产,在矿井内设有两种报警系统,每种系统单独使用时,系统 A 有效的概率为 0.92,系统 B 有效的概率为 0.93,并知在 A 失灵的条件下,B 有效的概率为 0.85.当发生意外事故时,问下列事件的概率是多少?

(1) A,B 都失灵;

(2) A,B 中至少一个失灵;

(3) A,B 都有效;

(4) A,B 中至少一个有效;

(5) A,B 中正好一个失灵,一个有效;

(6) B 失灵的条件下 A 有效.

1.25　某人忘记了电话号码的最后一个数字,因而他就随意的拨号.假设拨完整个号码算一次拨号.

(1) 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率;

(2) 若已知最后一位数字是奇数,求上述概率.

1.26　袋中有 5 个球,其中 4 个白球,1 个红球,现有 5 个人依次从袋中各取 1 球,取后不放回,问第 1 人,第 2 人,……,第 5 人取到红球的概率各是多少?

1.27　10 张考签中有 4 个难签,3 人参加抽签.按甲、乙、丙顺序,每人抽 1 个,不放回,求各人抽到难签的概率.

1.28　箱中有同种产品 50 件,其中正品 40 件、次品 10 件,从中随机地取 3 次,每次取 1 件,不放回.求下列事件的概率:

(1) 3 次都取到正品;

(2) 至少有 1 次取到次品;

(3) 最多有 1 次取到次品;

(4) 正好有 2 次取到次品;

(5) 正好第 2 次取到次品.

1.29　有 3 个人,每人都以相同的概率被分配到 4 间房的每一间中,则某指定房间中恰有 2 人的概率是(　)

(A) $\frac{1}{64}$　(B) $\frac{3}{64}$　(C) $\frac{9}{64}$　(D) $\frac{3}{16}$

1.30　5 人以摸彩方式决定谁得一张电影票,今设“A_i”表示“第 i 人摸到”($i=1,2,3,4,5$),则下列结果中有一个不正确,它是(　)

(A) $P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{1}{3}$　(B) $P(\bar{A}_1A_2)=\frac{1}{5}$

(C) $P(\bar{A}_1A_2)=\frac{1}{4}$　(D) $P(A_5)=\frac{1}{5}$

1.31　若 $A\supset B,A\supset C,P(A)=0.9,P(\bar{B}\cup\bar{C})=0.8$,则 $P(A-BC)=$(　).

(A) 0.4　(B)0.6　(C)0.7　(D)0.8

1.32　某人忘记三位号码锁(每位都是 0～9 十个数码中的一个)的最后一个数码,因此在正确拨出前两个数码后,只能随机地试拨最后一个数码.每拨一次算作一次试开,则他在第 4 次试开时才将锁打开的概率是(　).

(A) $\frac{1}{4}$　(B) $\frac{1}{6}$　(C) $\frac{2}{5}$　(D) $\frac{1}{10}$

1.33　设 N 件产品中 D 件是不合格品,从这 N 件产品中任取 2 件,已知其中 1 件是不合格品,则另一件也是不合格品的概率是

(A) $\frac{D-1}{2N-D-1}$　(B)$\frac{D(D-1)}{N(N-1)}$

(C)$\frac{D(D-1)}{N^2}$　(D) $\frac{D-1}{2(N-D)}$

1.34　试证明:若 A,B,C 三事件独立,则

(1) $A\cup B$,(2) AB,(3) $A\bar{B}$,都与 C 相互独立.

1.35　现有 4 个球,其中有 3 个球分别涂上红、黄、绿颜色,第 4 个球涂红、黄、绿 3 色.从中任取 1 球,若记 A,B,C 分别表示“取 1 球有红色”,“取 1 球有黄色”,“取 1 球有绿色”,问 A,B,C 是否独立? 为什么?

1.36　假设实验室器皿中产生 A 类细菌与 B 类细菌的机会相等,且每个细菌的产生是相互独立的,若某次发现产生了 n 个细菌,则其中至少有一个 A 类细菌的概率是多少?

1.37　某高射炮发射一发炮弹击中飞机的概率为 0.6,现用此种炮若干门同时各发射一发炮弹,问至少需配置多少门高射炮,才能以不小于 99% 的概率击中来犯的一架敌机?

1.38　从 5 双不同的手套中,任取 4 只,求 4 只都不配对的概率.

1.39　已知 $P(A)=0.8,P(B)=0.7,P(A-B)=0.2$,求 $P(B|\bar{A})$.

1.40　现有 10 张彩票,其中有 5 张“发”,3 张“财”,其余都是“白”,规定一个人只有同时摸到“发”和“财”才算中奖.

(1) 甲、乙两人依次不放回地连续抽取两张,求甲、乙两人都中奖的概率 .

(2) 甲、乙两人有放回地连续抽取两张,求甲、乙两人中至少有一人中奖的概率 .

1.41　甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛,甲选手发球成功后,乙选手回球失误的概率为 0.3,若乙选手回球成功,甲选手回球失误的概率为 0.4,若甲选手回球成功,乙选手再次回球失误的概率为 0.5,试计算这几个回合中,乙选手输掉 1 分的概率 .

1.42　设 10 件产品中有 4 件不合格,从中任取 2 件,在这 2 件中已经知道有 1 件不合格,求另 1 件也不合格的概率 .

1.43　某技术部门招工需经过四项考核,各项考核是独立的,每个应招者都要经过全部四项考核,只要有一项不通过就不能录用.假设某人能通过第一、二、三、四项考核的概率分别为 0.6,0.8.0.91,0.95:

(1) 求他能被录用的概率;

(2) 通过了一、三项,但被淘汰,求被淘汰的概率;

(3) 假设考核按顺序进行,一旦某项考核不合格即被淘汰(不再参加后面的考核),求此人被淘汰的概率.

1.44　一工人看管 A,B,C 三台机器,在 1 小时内,这三台机器需照管的概率分别为0.2,0.1,0.4,各台机器是否需要照管相互独立,设该工人照管每台机器的时间不超过 1 小时,求 1 小时内,机器因无人照管而影响工作的概率.

1.45　甲、乙两箱中都放有 10 个红色、白色两种颜色的球,甲箱中有红球 6 个、白球 4 个;乙箱中有红球 4 个,白球 6 个.现从甲箱中任取 1 球放入乙箱,再从乙箱中任取 1 球:

(1) 求从乙箱中取出的 1 球为红球的概率;

(2) 若从乙箱中取出的 1 球为白球,求从甲箱取出的 1 球也是白球的概率.

1.46　甲箱中有红球 6 个,白球 4 个;乙箱中有红球 4 个,白球 5 个.现从甲箱中任取 1 球放入乙箱,再从乙箱中任取两球.求两球颜色相同的概率.

1.47　设 A_1,A_2,A_3 为三个独立事件,且 $P(A_k)=p\quad(k=1、2、3,0<p<1)$,则这三个事件不全发生的概率是

(A) $(1-p)^3$

(B) $3(1-p)$

(C) $(1-p)^3+3p(1-p)$

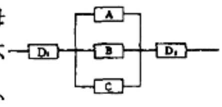
(D) $3p(1-p)^2+3p^2(1-p)$

1.48　甲盒内有红球 4 只,黑球 2 只,白球 2 只;乙盒内有红球 5 只,黑球 3 只;丙盒内有黑球 2 只,白球 2 只,从这三只盒子的任意一只中任意取出一只球,则它是红球的概率是

(A) 0.5625　　(B) 0.5

(C)0.45　　(D) 0.375

1.49　下列框图中的字母代表元件种类(字母相同下标不同的仍为同一类元件).已知 A、B、C、D、各类元件的正常工作概率依次为 p、q、r、s,且各元件的工作是相互独立的,则此系统正常工作的概率为



1.49 题图

(A) s^2pqr

(B) $s^2(p+q+r)$

(C) $s^2(1-pqr)$

(D) $s^2[1-(1-p)(1-q)(1-r)]$

1.50　甲袋中有 9 只白球和 1 只黑球,乙袋中有 10 只白球,每次从甲、乙两袋中随机各取一球交换放入另一袋中,这样做了三次,求黑球出现在甲袋中的概率.

1.51　甲箱中有红球 6 个,白球 4 个,乙箱中有红球 4 个,白球 4 个,现从甲箱中任取两球放入乙箱,再从乙箱中顺次取出两球,每次取 1 个,不放回,求先取出

红球再取出白球的概率.

1.52　甲、乙两人向同一目标进行射击，甲、乙命中目标的概率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，甲先射击，然后乙射击，轮流进行，求下列事件的概率：

(1) 在甲进行第 3 次射击时，目标被首次击中；

(2) 甲射击 3 次，且在乙之前击中目标.

1.53　用某种方法检验电子元件，元件是正品检验也是正品的概率为 0.99；元件是次品检验也是次品的概率为 0.95. 大批元件送来检验时，检验员只随机地从中取 3 次，每次取 1 件(不放回)进行独立检验，经检验，若 3 件全为正品，这批产品就可以出厂. 现送来一批元件共 100 件，已知其中混进去 4 件次品，求这批元件经检验能出厂的概率.

1.54　设有同种产品两箱，已知甲箱、乙箱的次品率分别为$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{4}$现随机地从任 1 箱中取出 1 件，经检验是次品，将此次品放人原箱，在此箱中再任取 1 件，求此件为正品的概率.

1.55　甲、乙、丙三人同时各自独立地对同一目标射击，各人击中目标的概率分别为0.4，0.5，0.7，假设目标被 1 人击中而被击毁的概率为 0.2，被两人击中而被击毁的概率为 0.6，被三人击中，目标一定被击毁.

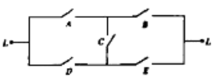
(1) 求目标被击毁的概率；

(2) 若目标已被击毁，求有 1 人击中的概率；

(3) 若目标已被击毁，求只有甲击中的概率.

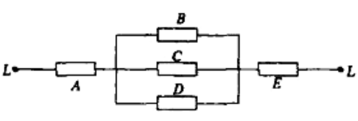
1.56　某种产品以 50 件装一箱，如果每箱产品中没有次品的概率为 0.37，有 1，2，3，4 件次品的概率分别为 0.37，0.18，0.06，0.02，今从某箱中任取 10 件，经验检有 1 件次品，求该箱产品中次品超过 2 件的概率.

1.57　如图，A，B，C，D，E 表示继电器接点，每一个继电器闭合的概率为 p，且各继电器是否闭合相互独立. 求 $L-L$ 成通路的概率.



1.57 题图

1.58　设一系统(如图)由 5 个元件 A，B，C，D，E 组成. 元件 A，E 正常工作的概率均为 q，元件 B，C，D 正常工作的概率均为 p，且相互独立.



1.58 题图

(1) 求系统 $L-L$ 能正常工作的概率；

(2) 求在系统 $L-L$ 正常工作时，元件 B，C，D 中仅有一个在正常工作的概率.

1.59　当危险情况 C 发生时，电路系统上的开关就闭合并发出警报. 通常采用多个开关并联的方法提高系统的可靠性(即 C 发生时，电路系统中开关闭合的概率)，设当 C 发生时，每一个开关闭合的概率为 0.95 并相互独立，要想保证整个系统以至少为 0.9999 的概率保证开关闭合并发出警报，问至少要并联多少个开关?

1.60　设 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，若$P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，问 A 与 B 是什么关系？并证明你的结论.

1.61　已知事件 A 与 B 相互独立，且 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，试在图上表示出来(读者先思考一会儿，会不会做？实在不会，再看解答).

1.62　设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份，随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

试题解答

1.1　(1) 显然样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，

$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{4,6\}$，

所以 $\bar{C}=\{1,2,3,5\}$，$\bar{B}=\{5,6\}$.

$A\cup B=\{1,3,5\}\cup\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,5\}$；

$A\cup B\cup\bar{C}=\{1,2,3,4,5\}\cup\{1,2,3,5\}=\{1,2,3,4,5\}$；

$AB=\{1,3,5\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,3\}$；

$A-B=A\bar{B}=\{1,3,5\}\cap\{5,6\}=\{5\}$；

$ABC=\{1,3\}\cap\{4,6\}=\varnothing$.

(2) 由(1)知，$\overline{A\cup B}=\{6\}$，$\bar{A}\,\bar{B}=\{2,4,6\}\cap\{5,6\}=\{6\}$，所以验证出$\overline{A\cup B}=\bar{A}\,\bar{B}$.

又由(1)知$\overline{AB}=\{2,4,5,6\}$，$\bar{A}\cup\bar{B}=\{2,4,6\}\cup\{5,6\}=\{2,4,5,6\}$，所以验证出$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

1.2　(1) 正好 1 个发生，即正好 1 个发生，2 个不发生，所以为 $A\bar{B}\,\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{B}C$；

(2) 正好 2 个发生，即正好 1 个不发生，2 个发生，所以为 $AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$；

(3) 至少 1 个发生即 $A\cup B\cup C$；

(4) 至少 2 个发生即 $AB\cup BC\cup AC$;

(5) 最多 1 个发生即为都不发生和正好 1 个发生的并事件,所以为 $\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}\cup A\bar{B}\,\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{B}C$. 又最多1个发生与至少 2 个发生是对立事件,所以又为 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$;

(6) 最多2个发生和 3 个都发生是对立事件所以为$\overline{ABC}$,根据德莫根定律又可写为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

1.3　题设 $AB=\bar{A}\,\bar{B}$,因为 $\bar{A}\,\bar{B}=\overline{A\cup B}$,所以 $AB=\overline{A\cup B}$,可以认为 $AB\subset\overline{A\cup B}$,又 $AB\subset A\cup B$,所以 $AB=\varnothing$,即$\overline{A\cup B}=\varnothing$,所以 $A\cup B=\Omega$,综合得出,A 与B 为对立关系. 即 $A=\bar{B}$ 或$B=\bar{A}$.

1.4　由 1.4 题图可知,当开关 1、2 同时接通时,则灯亮;当开关 1、3 同时接通时,灯也亮. 故有以下关系:

$$B_1B_2\subset A,\ B_1B_3\subset A,$$

$$A=B_1B_2\cup B_1B_3=B_1(B_2\cup B_3).$$

又知,当开关 1 不闭合时,灯肯定不会亮,故有$\bar{B}_1A=\varnothing$,即$\bar{B}_1$ 与 A 互斥.

1.5　这是古典型. 因为产品无序,用组合计算 n,m.

$$n=C_{10}^3=120$$

(1) $m_A=C_6^3=20,P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$;

(2) $m_B=C_4^1C_6^2=60,P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{60}{120}=\frac{1}{2}$;

(3) $m_C=m_A+m_B=80,P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{80}{120}=\frac{2}{3}$;

(4) $m_D=C_4^1C_6^2+C_4^2C_6^1+C_4^3=100$,

$$P(D)=\frac{m_D}{n}=\frac{100}{120}=\frac{5}{6}.$$

另法:$D=\bar{A},P(D)=P(\bar{A})=1-P(A)$

$$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}.$$

1.6　古典概型,设 3 事件分别为 A,B,C.

解法 1　考虑整个 3 位数,因为 3 位数有序,用排列计算 n,m. 排成 3 位数的总个数 $n=P_5^3=60$.

(1) 3 位数小于 400,百位数必须从 1,2,3 中取,取法为 $C_3^1=3$,在百位数取定后,十位数、个位数只能从其余的 4 个数中取出 2 个作排列,排法为 $P_4^2=12$,所以 $m_A=C_3^1P_4^2=36$,

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{36}{60}=0.6$$

(2) 3 位数为偶数,个位数只能从 2,4 中取,取法为 $C_2^1=2$,在个位数取定之后,十位数、百位数的取法为从其余的 4 个数中取 2 个排列,排法为 $P_4^2=12$,所以 $m_B=C_2^1P_4^2=24$,

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{C_2^1P_4^2}{P_5^3}=\frac{24}{60}=0.4$$

(3) 3 位数是 5 的倍数,个位数只能是 5,十位数、百位数从其余的 4 个数取 2 个排列,排法为 $P_4^2=12$,所以 $m_C=P_4^2=12$,

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{P_4^2}{P_5^3}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}=0.2$$

解法 2　只考虑 3 位数的特点,无顺序问题,用组合计算 n,m.

(1) 3 位数小于 400:只考虑百位,总取法为 $C_5^1=5$.3 位数小于 400,百位数只能从 1,2,3 中取,取法为 $m_A=C_3^1=3$,

$$P(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{3}{5}=0.6$$

(2) 3 位数是偶数:即个位数必须是偶数,只要考虑个位数. 总取法 $n=C_5^1=5$,偶数只能从 2,4 中取,取法为 $m_B=C_2^1=2$,

$$P(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{2}{5}=0.4$$

(3) 3 位数是 5 的倍数:只考虑个位数,取法为 $n=C_5^1=5$,个位数只能是 5,$m_C=1$,

$$P(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{1}{5}=0.2$$

1.7　{甲、乙中最多 1 人选中}={都没选中}∪{1 人选中}

$$p=p_{(1)}+p_{(2)}=\frac{C_4^4}{C_6^4}+\frac{C_2^1C_4^3}{C_6^4}$$

$$=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{9}{15}=0.6$$

另法:{甲、乙中最多 1 人选中}的对立事件为{甲、乙都被选中},这时,再从其余的 4 人中选出 2 人即可.

$$P\{\text{最多 1 人选中}\}=1-P\{\text{2 人都被选中}\}$$

$$=1-\frac{C_2^2C_4^2}{C_6^4}=1-\frac{6}{15}=\frac{9}{15}=0.6.$$

1.8　(1) 设该事件为 A,$n=C_9^2=36$.

A = {1 个不小于 7,1 个小于 7} ∪ {2 个都不小于 7}

$$m_A=C_3^1C_6^1+C_3^2=21$$

$$P(A)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$$

另法：$\bar{A}=\{2$个都小于$7\}$，$m_{\bar{A}}=C_6^2=15$，

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{15}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}.$$

(2) 可采用列举法. $n=C_9^2=36$，

第1张标号若是1，第2张的标号就是2,3,4,5,6,7,8,9，共8种情况，

第1张标号若是2，第2张的标号就是3,4,5,6,7,8，共6种情况，

第1张标号若是3，第2张的标号就是4,5,6,7，共4种情况，

第1张标号若是4，第2张的标号就是5,6，共2种情况

所以 $m=8+6+4+2=20$，$p=\frac{m}{n}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$.

1.9 (1) 组合问题，$n=C_{10}^3=120$，

对 A_1：$m_1=C_8^3$，$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$

对 A_2：$m_2=C_8^2$，$P(A_2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{30}$

对 A_3：$m_3=2C_9^3-C_8^3$，$P(A_3)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$

另法：$\bar{A}_3=\{3$个数含0，含$5\}$，$m_{\bar{A}_3}=C_8^1$

$$P(A_3)=1-P(\bar{A}_3)=1-\frac{C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}.$$

(2) 排列问题 $n=P_{10}^3$，

对 B_1：二位数即是以0作百位数的三位数 $m_1=P_9^2$

$$P(B_1)=\frac{P_9^2}{P_{10}^3}=\frac{1}{10}$$

对 B_2：大于500，即百位数为从5,6,7,8,9中取1数

$$m_2=5P_9^2,$$

$$P(B_2)=\frac{5P_9^2}{P_{10}^3}=\frac{5}{10}$$

1.10 排列问题. 因为要求构成4位数，而0放在首位的数，不是4位数，应减去，所以 $n=P_{10}^4-P_9^3=9P_9^3$，偶数的末位数为0,2,4,6,8共5个数，总排法为$5P_9^3$，这其中包含着0放在首位(此时只为3位数)，2,4,6,8这4个数各放在末位，中间两个数从其余的8个数中选取的排列，即$4P_8^2$，应减去，所以

$$m=5P_9^3-4P_8^2$$

$$P(A)=\frac{5P_9^3-4P_8^2}{9P_9^3}=\frac{41}{81}\approx 0.5062.$$

1.11 $n=P_{10}^{10}=10!$

(1) 3卷套在一起算1卷，总数按8卷计算，3卷又有全排列

$$m_1=8!3! \quad p_1=\frac{8!3!}{10!}=\frac{1}{15}$$

(2) 4卷套在一起算1卷，总数按7卷计算，4卷又有全排列

$$m_2=7!4! \quad p_2=\frac{7!4!}{10!}=\frac{1}{30}$$

(3) 两套各在一起，总数按5卷计算，各有全排列，

$$m_3=5!3!4! \quad p_3=\frac{5!3!4!}{10!}=\frac{1}{210}$$

(4) $m_4=m_1+m_2-m_3$
$=8!\,3!+7!\,4!-5!\,3!\,4!$

$$p_4=\frac{8!3!+7!4!-5!3!4!}{10!}=\frac{2}{21}\approx 0.095$$

1.12 20套新房某人先分到一套，还有19套，9套分下去，总分法为 $n=C_{19}^9$，某人相邻的两套尚未分配，可看成三套连成一套，即17套中有9套分下去，分法为 $m=C_{17}^9$，所以 $p=\frac{m}{n}=\frac{C_{17}^9}{C_{19}^9}=\frac{5}{19}\approx 0.2632.$

另法：将新房编号排序，可得 $p=\frac{P_{17}^9}{P_{19}^9}$.

1.13 $n=C_{10}^3=120$，号码为1,2,3,4,5,6,7,8,9,10，号码5前面有4个号码，后面有5个号码，5以外有9个号码.

(1) $m_A=C_5^2$ $\quad P(A)=\frac{C_5^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$;

(2) $m_B=C_4^2$ $\quad P(B)=\frac{C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{20}$;

(3) $m_C=C_4^1C_5^1$ $\quad P(C)=\frac{C_4^1C_5^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$;

(4) $m_D=C_9^2$ $\quad P(D)=\frac{C_9^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$;

(5) $m_E=C_9^3$ $\quad P(E)=\frac{C_9^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{10}$.

1.14 标签全部脱落，只能按无标签随机发货，定货总数为9桶，$n=C_{17}^9$，$m=C_{10}^4C_4^3C_3^2$，

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\frac{252}{2431}\approx 0.1037.$$

1.15　此题解法很多,关键是如何理解这个问题的数学模型,现只介绍一种方法,把这个问题中的"取"和"装"结合起来考虑,即先从 50 个铆钉中按 3 个一组取出,然后装到 10 个部件上,总的取、装法为 $n=C_{50}^3C_{10}^1$,把铆钉看成 3 个一组,那 3 个太弱的在一组,共需 10 组,部件强度不合格的取、装法为 $m=C_{10}^1C_3^3C_{10}^1$. 故概率为

$$p=\frac{m}{n}=\frac{C_{10}^1C_3^3C_{10}^1}{C_{50}^3C_{10}^1}=\frac{C_{10}^1}{C_{50}^3}=\frac{1}{1960}.$$

1.16　取 4 球得分不大于 6 分的情况:(基本事件数)

(1)取出 4 只黑球,取法有 $C_6^0C_4^4$ 种

(2)取出 1 只红球,3 只黑球,取法有 $C_6^1C_4^3$ 种

(3)取出 2 只红球,2 只黑球,取法有 $C_6^2C_4^2$ 种

而基本事件总数为:C_{10}^4种取法

所以 $p=\dfrac{C_6^0C_4^4+C_6^1C_4^3+C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\dfrac{23}{42}$

故正确选择应为 A.

1.17　3 个球放入 4 个盒子中,是有重复的排列问题,总放法为 $n=4^3=64$.

(1) 盒子中球的最多个数为 1,即 3 个球分别放入 4 个盒子中的 3 个盒子里放法为 $m_2=P_4^3=24$,

$$p_1=\frac{m_1}{n}=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}.$$

(2) 盒子中球的最多个数为 2,即 3 个球放入 4 个盒子中的 2 个盒子里,放法为排列数 $P_4^2=12$,其中 1 个盒子中有 2 个球,另 1 个盒子中有 1 个球,这 1 个球从 3 个球中取,取法为组合数 $C_3^1=3$(或 2 个球从 3 个球中取,取法为 $C_3^2=3$),所以球的放法为 $m_2=P_4^2C_3^1=36$,

$$p_2=\frac{m_2}{n}=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}.$$

(3) 盒子中球的最多个数为 3,即 3 个球全放入 4 个盒子中的 1 个盒子里,放法为 $m_3=P_4^1=4$,

$$p_3=\frac{m_3}{n}=\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$$

本题中计算 p_2 比较复杂,主要是计算 m_2 时既要考虑盒子(用排列)又要考试球(用组合).

另法:先求 p_1,p_3,因为 $p_1+p_2+p_3=1$,所以 $p_2=1-p_1-p_3=\frac{9}{16}$,这种解法避免了直接计算 p_2 的困难.

1.18　$n=6^4$, $m=P_6^4$, $p=\dfrac{P_6^4}{6^4}=\dfrac{5}{18}$.

1.19　(1) $n=12^4$, $\bar{A}=\{4$ 个人的生月都不相同$\}$

$m_{\bar{A}}=P_{12}^4$,　$P(\bar{A})=\dfrac{P_{12}^4}{12^4}$

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{P_{12}^4}{12^4}=1-\frac{495}{864}\approx 0.4271.$$

(2) $n=365^{30}$, $\bar{B}=\{$没有人生日在 10 月 1 日$\}$, $m_{\bar{B}}=364^{30}$

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-\frac{364^{30}}{365^{30}}\approx 0.08$$

(3) $n=365^K$, $\bar{C}=\{K$ 个人生日都不相同$\}$, $m_{\bar{C}}=P_{365}^K$

$$P(C)=1-P(\bar{C})=1-\frac{P_{365}^K}{365^K}.$$

(4) $n=365^K$, $\bar{D}=\{K$ 个人生日都不在 10 月 1 日$\}\cup\{$只有 1 人生日在 10 月 1 日$\}$,记为 $\bar{D}=(\bar{D})_1+(\bar{D})_2$,其中$(\bar{D})_2$ 又可看成$\{K$ 个人中有$(K-1)$人生日不在 10 月 1 日$\}$,

$m_1=364^K$, $m_2=C_K^{K-1}\cdot 364^{K-1}=K\cdot 364^{K-1}$

$m_{\bar{D}}=m_1+m_2$

$$P(\bar{D})=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{364^K+K364^{K-1}}{365^K}$$

$$P(D)=1-P(\bar{D})=1-\left(\frac{364}{365}\right)^K-\frac{K}{365}\left(\frac{364}{365}\right)^{K-1}.$$

1.20　(1) $P(AB)=P(B)P(A|B)$
$=0.4\times0.5=0.2$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
$=0.3+0.4-0.2=0.5$

(2) $\because$ $P(AB)=P(A)P(B|A)$

$\therefore$ $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.2}{0.3}=\dfrac{2}{3}$

(3) $P(B|A\cup B)=\dfrac{P(B(A\cup B))}{P(A\cup B)}$
$=\dfrac{P(B)}{0.5}=\dfrac{0.4}{0.5}=0.8$

(4)　$P(\bar{A}\cup\bar{B}|A\cup B)$

$=P(\overline{AB}|A\cup B)=\dfrac{P(\overline{AB}(A\cup B))}{P(A\cup B)}$

$=\dfrac{P(A\cup B-AB)}{P(A\cup B)}=\dfrac{P(A\cup B)-P(AB)}{P(A\cup B)}$

$=\dfrac{0.5-0.2}{0.5}=0.6$

1.21　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(B)P(A|B)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{9}$

$P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})=P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})$

$=1-P(A\cup B)=\frac{2}{9}$

$\therefore P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{B})}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$

$=\frac{\frac{2}{9}}{2/3}=\frac{1}{3}.$

1.22 $P(B|A\cup\bar{B})=\frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})}$

$P(B(A\cup\bar{B}))=P(AB)=P(A)-P(A\bar{B})$

$=0.7-0.5=0.2$

$P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})$

$=0.7+0.6-0.5=0.8$

$\therefore P(B|A\cup\bar{B})=\frac{0.2}{0.8}=0.25.$

1.23 $\because P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

$P(AB)=P(B)P(A|B)=P(B)\times\frac{1}{2}$

$\therefore P(B)=2P(AB)=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

$\therefore P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

1.24 据题意,已知$P(A)=0.92,P(B)=0.93,$

$P(B|\bar{A})=0.85$

(1) 都失灵为

$\bar{A}\bar{B},P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})$

$=(1-P(A))(1-P(B|\bar{A}))$

$=(1-0.92)(1-0.85)=0.012$

(2) 至少一个失灵为

$\bar{A}\cup\bar{B},P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})$

$=(1-0.92)+(1-0.93)-0.012$

$=0.138$

(3) 都有效为 AB,

$P(AB)=1-P(\overline{AB})=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})$

$=1-0.138=0.862$

(4) 至少一个有效为 $A\cup B$,

$P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\bar{A}\bar{B})$

$=1-0.012=0.988$

(5) 正好一个失灵,一个有效为$(A\bar{B}\cup\bar{A}B)$

$P(A\bar{B}\cup\bar{A}B)=P(A\bar{B})+P(\bar{A}B)$

$=P(A-AB)+P(B-AB)$

$=P(A)-P(AB)+P(B)-P(AB)$

$=P(A)+P(B)-2P(AB)$

$=0.92+0.93-2\times0.862=0.126$

(6) B失灵的条件下 A 有效的概率为条件概率

$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$

$=\frac{0.92-0.862}{1-0.93}\doteq0.8286$

1.25 设 A_i 为第 i 次接通电话,$\bar{A}_i$ 为第 i 次未接通.A 为不超过三次接通电话,据题意,$A=A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$

$P(A)=P(A_1\cup\bar{A}_1A_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$ 三事件互斥

$=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$

$=P(A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$

$+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{3}{10}=0.3$

另法

$P(A)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$

$=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$=1-\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{3}{10}=0.3$

(2) 类似于(1)

$P(A)=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{3}{5}=0.6$

另法 $P(A)=1-\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{3}{5}=0.6$

1.26 设 A_i 为第 i 个人取到红球,$\bar{A}_i$ 为第 i 个取到白球,$P(A_1)=\frac{1}{5}$,因为 $A_2\subset\bar{A}_1$,所以 $A_2=\bar{A}_1A_2P(A_2)=(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$

类似地

$P(A_3)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$

$=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

$P(A_4)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4)$

$=P(\bar{A}_1)\cdots P(A_4|\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

$P(A_5)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4A_5)=\cdots$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{5}$$

最后结论，$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_5)=\frac{1}{5}$. 概率相等，与先后次序无关.

1.27 设 A_i 为第 i 个人抽到难签，$\bar{A}_i$ 为第 i 个人未抽到难签.

$P(A_1)=\frac{4}{10}$,

$$\begin{aligned}P(A_2)&=P(A_1A_2\cup\bar{A}_1A_2)\quad\text{互斥事件组}\\&=P(A_1A_2)+P(\bar{A}_1A_2)\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)\\&=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{4}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_3)&=P(A_1A_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\\&\quad\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\\&=P(A_1A_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)\\&\quad+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)\\&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\\&\quad+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1A_2)\\&\quad+P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1)P(A_3|A_1\bar{A}_2)\\&\quad+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)\\&=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\\&\quad+\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}+\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}\\&=\frac{4}{10}\end{aligned}$$

三人抽到难签的概率相等，同为$\frac{4}{10}$，与先后次序无关.

1.28 **解法1** 按题意，考虑抽取次序.

设 A_i 为第 i 次抽到正品，$\bar{A}_i$ 为第 i 次抽到次品.

(1) $P(A_1A_2A_3)$

$$\begin{aligned}&=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\\&=\frac{40}{50}\times\frac{39}{49}\times\frac{38}{48}\\&\approx0.5041\end{aligned}$$

(2) $P(\bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\bar{A}_3)=1-P(A_1A_2A_3)$

$$\approx1-0.5041=0.4959$$

(3) P(最多有 1 次取到次品)

$=P$(3 次都取到正品$\cup$正好有 1 次取到次品)

$$\begin{aligned}&=P(A_1A_2A_3\cup\bar{A}_1A_2A_3\\&\quad\cup A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1A_2\bar{A}_3)\\&=P(A_1A_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)\\&\quad+P(A_1A_2\bar{A}_3)\\&\approx0.5041+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1A_2)\\&\quad+P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1)P(A_3|A_1\bar{A}_2)\\&\quad+P(A_1)P(A_2|A_1)P(\bar{A}_3|A_1A_2)\\&=0.5041+\frac{10}{50}\times\frac{40}{49}\times\frac{39}{48}+\frac{40}{50}\times\frac{10}{49}\times\frac{39}{48}\\&\quad+\frac{40}{50}\times\frac{39}{49}\times\frac{10}{48}\end{aligned}$$

(后面的三个数相等，可见，概率只由正品、次品的个数确定，而与所取次序无关)

$$\begin{aligned}&\approx0.5041+3\left(\frac{40\times39\times10}{50\times49\times48}\right)\\&\approx0.5041+0.3980=0.9021\end{aligned}$$

(4) P(正好有 2 次取到次品)

$$\begin{aligned}&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\cup\bar{A}_1A_2\bar{A}_3)\\&=P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)+P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\\&\quad+P(\bar{A}_1A_3\bar{A}_3)\\&=3P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)\end{aligned}$$

(据(3)，与次序无关)

$$=3\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}\times\frac{40}{48}\approx0.0918$$

(5) $P(\bar{A}_2)$

$$\begin{aligned}&=P(A_1\bar{A}_2A_3\cup A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\\&\quad\cup\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\cup\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)\\&=P(A_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_2)\quad(\text{与第 3 次无关})\\&=P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\\&=\frac{40}{50}\times\frac{10}{49}+\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}=\frac{1}{5}=0.2\end{aligned}$$

$P(\bar{A}_2)=P(\bar{A}_1)=\frac{1}{5}$，这不是巧合，是必然的.

解法2 不考虑抽取次序

(1) P(3 次都取到正品)$=P$(3 个都是正品)

$$=\frac{C_{40}^3}{C_{50}^3}\approx0.5041$$

(2) P(至少有 1 次取到次品)

$=P$(3 个中至少有 1 个次品)

$=1-P$(3 个都是正品) 据(1)

$$=1-\frac{C_{40}^3}{C_{50}^3}=0.4959$$

(3) P(最多有 1 次取到次品)

$=P$(最多有 1 个次品)

$=P$(3 个都是正品$\cup$正好有 1 个次品，2 个正品)

$=P$(3 个都是正品)$+P$(正好 1 个交品，2 个正品)

$$=\frac{C_{40}^3}{C_{50}^3}+\frac{C_{10}^1C_{40}^2}{C_{50}^3}\approx0.5041+0.3980=0.9021$$

(4) P(正好有 2 次取到次品)$=P$(正好有 2 个次品)

$$=\frac{C_{40}^2C_{10}^1}{C_{50}^3}\approx 0.0918$$

(5) $P(\bar{A}_2)=P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2)$

$$=\frac{\frac{1}{2}C_{40}^1C_{10}^1}{C_{50}^2}+\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}=\frac{1}{5}=0.2$$

1.29 设事件 A 表示某指定房间恰有 2 人，

1 人随机分到 4 间房中有 4 种等可能分法，

3 人随机分到 4 间房中有 4^3 种等可能分法，而组成 A 的不同分法有 $C_3^2C_4^1$ 种，

$$P(A)=\frac{C_3^2C_4^1}{4^3}=\frac{12}{64}=\frac{3}{16}.$$

∴ 正确选择是 D.

1.30 显然(B)与(C)中有一个是不正确的.

$$P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2\mid\bar{A}_1)$$
$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{5},$$

显然(B)的结果正确，(C)的结果不正确.

∴ 正确选择是 C.

1.31 ∵ $A\supset B, A\supset C$，∴ $A\supset BC$，

∴ $P(A-BC)=P(A)-P(BC)$.

又 $P(BC)=1-(\overline{BC})$，而 $\overline{BC}=\bar{B}\cup\bar{C}$，

∴ $P(BC)=1-P(\bar{B}\cup\bar{C})=1-0.8=0.2$，

∴ $P(A-BC)=P(A)-P(BC)$

$=0.9-0.2=0.7$.

∴ 正确选择是 C.

1.32 设 A_i 为第 i 次把锁打开，则

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_3|\bar{A}_1\bar{A}_2)P(A_4|\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$$
$$=\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{7}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{10}.$$

故正确选择应为 D.

1.33 设事件 A 为"2 件中至少有一件不合格品"，事件 B 为"2 件都是不合格品".

则 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{C_D^2/C_N^2}{(C_D^1C_{N-D}^1+C_D^2)/C_N^2}$$
$$=\frac{D(D-1)}{2D(N-D)+D(D-1)}$$
$$=\frac{D-1}{2N-D-1}$$

∴ 正确的选择是 A.

1.34 证明

(1) $P((A\cup B)C)=P(AC\cup BC)$

$=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

∵ A,B,C 独立 $=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(A)P(B)P(C)$

$=P(C)[P(A)+P(B)-P(AB)]$

∴ $P((A\cup B)C)=P(A\cup B)P(C)$

即$(A\cup B)$与 C 相互独立.

(2) $P((AB)C)=P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

∴ $P((AB)C)=P(AB)P(C)$

即(AB)与 C 相互独立.

(3) $P((A-B)C)=P(AC-BC)$

$=P(AC-ABC)$

$=P(AC)-P(ABC)$

$=P(A)P(C)-P(AB)P(C)$

$=P(C)P(A-AB)$

$=P(C)P(A-B)$

∴ $(A-B)$与 C 相互独立.

1.35 据题设有 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{2}, P(AB)=\frac{1}{4}, P(BC)=\frac{1}{4}, P(AC)=\frac{1}{4}$，$P(ABC)=\frac{1}{4}$，由此有 $P(AB)=P(A)P(B), P(AC)=P(A)P(C), P(BC)=P(B)P(C)$，但 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$，故 A,B,C 不独立.

1.36 P(至少有一个 A 类细菌)$=1-P$(全是 B 类细菌)$=1-\frac{1}{2^n}$.

1.37 设 n 是需配置的高射炮门数，记 A_i 为第 i 门炮击中敌机($i=1,2,3,\cdots,n$)，A 为敌机被击中.

依题意，A_1、A_2、…、A_n 相互独立，且 $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，

根据事件运算性质及概率运算性质及概率运算性质有

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i)$$
$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(\bar{A}_i)=1-0.4^n,$$

依题意应有 $1-0.4^n\geqslant 0.99$，

即 $(0.4)^n\leqslant 0.01$.

于是可解出 $n\geqslant\frac{\lg 0.01}{\lg 0.4}=5.026$，取 $n\geqslant 6$，

故至少需配置 6 门炮，才能以 99% 的概率击中来犯的一架敌机.

1.38 设 A 为 4 只都不配对.

5 双手套共 10 只，从中任取 4 只，相当于从 10 中取 4 的组合数，故样本点总数 $N=C_{10}^4=210$. 这些样本

点是等可能发生的.

A 包含的样本点数如下考虑,先从 5 双手套中任取 4 双,有 C_5^4 种取法,再从这 4 双中每双任取 1 只,有 2^4 种取法,故 A 的样本点数 $K=C_5^4\cdot 2^4=80$. 于是所求概率 $P(A)=\frac{K}{N}=\frac{8}{21}$.

1.39 **解法1** 由 $P(A-B)=P(A\cup B)-P(B)$,可得 $P(A\cup B)=0.2+0.7=0.9$,又由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,可得 $P(AB)=0.8+0.7-0.9=0.6$. 注意到$\overline{A}B+AB=B$,且$\overline{A}B$ 与 AB 是互不相容事件,由加法原则可得

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.7-0.6=0.1,$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)=0.2.$$

因此 $P(B|\overline{A})\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\frac{0.1}{0.2}=0.5$.

解法2 注意到 $A-B=A\overline{B}$,$A\overline{B}+AB=A$,且 $A\overline{B}$与AB 互不相容,可得

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)-P(A\overline{B})\\&=P(A)-P(A-B)\\&=0.8-0.2=0.6.\end{aligned}$$

又由于$\overline{A}B$ 与 AB 互不相容,且$\overline{A}B+AB=B$,那么

$$\begin{aligned}P(\overline{A}B)&=P(B)-P(AB)\\&=0.7-0.6=0.1,\end{aligned}$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)=0.2.$$

因此 $P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{0.1}{0.2}=0.5$.

1.40 设用 A 表示甲中奖的事件,B 表示乙中奖的事件.

(1)$P(A)=\frac{C_5^1\cdot C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{1}{3}$,$P(B|A)=\frac{C_4^1\cdot C_2^1}{C_8^2}=\frac{2}{7}$,

因此 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{21}\approx 0.095$.

即不放回地抽取,两人同时中奖的概率为 0.095.

(2)$P(A)=\frac{1}{3}$,由于是放回地抽取,从而 A 与 B 是相互独立的. 即 $P(B)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=P(A)P(B)=\frac{1}{9}$,

因此 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}\approx 0.5556$.

即如果有放回地抽取,甲、乙两人至少有一个中奖的概率为 0.5556.

另法:$P(\overline{A})=\frac{2}{3}$,$P(\overline{B})=\frac{2}{3}$,

$P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

$P(A\cup B)=1-P(\overline{A}\ \overline{B})=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}\approx 0.5556$.

1.41 设 A =“甲选手回球失误”

B_k =“乙选手第 k 次回球失误”($k=1,2$)

由题意有 $P(B_1)=0.3$,$P(A|\overline{B}_1)=0.4$,$P(B_2|\overline{B}_1\overline{A})=0.5$

且显然有 B_1 与$\overline{B}_1\overline{A}B_2$ 互不相容

$\therefore$ P(乙选手输掉 1 分)

$$\begin{aligned}&=P(B_1\cup\overline{B}_1\overline{A}B_2)\\&=P(B_1)+P(\overline{B}_1\overline{A}B_2)\\&=P(B_1)+P(\overline{B}_1)P(\overline{A}|\overline{B}_1)P(B_2|\overline{B}_1\overline{A})\\&=0.3+0.7\times 0.6\times 0.5=0.51\end{aligned}$$

1.42 **分析**:{2 件中已经知道有 1 件不合格} = {2 件中至少有 1 件不合格}. 设 A_{00} = {2 件都不合格},A_{01} = {2 件中 1 件合格,1 件不合格},{至少 1 件不合格} = $\{A_{01}\cup A_{00}\}$,A_{01},A_{00}互斥. 所求概率为

$$p=P(A_{00}\mid A_{01}\cup A_{00})=\frac{P(A_{00})}{P(A_{01})+P(A_{00})}$$

其中 $P(A_{01})=\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}$,$P(A_{00})=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$,

$$\therefore\ p=\frac{\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}{\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}+\frac{C_4^2}{C_{10}^2}}=\frac{C_4^2}{C_4^1C_6^1+C_4^2}=\frac{1}{5}=0.2.$$

另法:见 1.33 题,其解为 $p=(A)=\frac{D-1}{2N-D-1}$,此处 $N=10$,$D=4$. $\therefore p=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0.2$.

1.43 设 A_i 为第 i 项考核通过,$\overline{A}_i$ 为第 i 项考核不通过,B 为整个考核通过被录用,$\overline{B}$ 为被淘汰.

$$P(A_1)=0.6,P(A_2)=0.8,$$
$$P(A_3)=0.91,P(A_4)=0.95$$

(1) $$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1A_2A_3A_4)\\&=P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)\\&=0.6\times 0.8\times 0.91\times 0.95=0.41496.\end{aligned}$$

(2) **注意**:这里不是条件概率,是求交事件的概率,

$\overline{B}=A_1\overline{A}_2A_3A_4\cup A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4\cup A_1A_2A_3\overline{A}_4$

互斥事件组

$$\begin{aligned}P(\overline{B})&=P(A_1\overline{A}_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4)\\&\quad+P(A_1A_2A_3\overline{A}_4)\end{aligned}$$

$\because$ 独立 $=0.6\times 0.2\times 0.91\times 0.95+0.6\times 0.2\times 0.91\times 0.05+0.6\times 0.8\times 0.91\times 0.05$

≈ 0.1310.

(3) $\bar{B}=\bar{A}_1\cup A_1\bar{A}_2\cup A_1A_2\bar{A}_3\cup A_1A_2A_3\bar{A}_4$

互斥事件组

$P(\bar{B})=P(\bar{A}_1)+P(A_1\bar{A}_2)+P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1A_2A_3\bar{A}_4)$

$=0.4+0.6\times0.2+0.6\times0.8\times0.09+0.6\times0.8\times0.91\times0.05$

$=0.58504.$

注意: 由(1) $P(B)=0.41496$,则 $P(\bar{B})=1-P(B)=0.58504$,与(3)中结果相同.可见这两种不同的考核方式淘汰率是相同的.

1.44 设 A,B,C 分别表示在1小时内,机器 A,B,C 要人照管,A,B,C 相互独立,并有 $P(A)=0.2,P(B)=0.1,P(C)=0.4$.

因为在同一时间内,工人只能照管一台机器,因此"机器无人照管"这个事件为"同时至少有2台机器需要照管",即为$(AB\cup AC\cup BC)$,

$P(AB\cup AC\cup BC)$

$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-P(ABAC)-P(ABBC)-P(ACBC)+P(ABACBC)$

$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2P(ABC)$

由独立性 $=P(A)P(B)+P(A)P(C)+P(B)P(C)-2P(A)P(B)P(C)$

$=0.2\times0.1+0.2\times0.4+0.1\times0.4-2\times0.2\times0.1\times0.4$

$=0.124.$

1.45 设 A 表示从甲箱取出放入乙箱的1球为红色,则 $\bar{A}$ 表示从甲箱取出放入乙箱的1球为白色,B 表示从乙箱取出的1球为红色,$\bar{B}$ 表示从乙箱取出的1球为白色.

(1) 由全概率公式有

$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$=\frac{6}{10}\times\frac{5}{11}+\frac{4}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{46}{110}=\frac{23}{55}$

(2) 由逆概率公式(贝叶斯公式)

$$P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{23}{55}=\frac{32}{55}$$

$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{4}{10}\times\frac{7}{11}=\frac{28}{110}=\frac{14}{55}$

$\therefore\ P(\bar{A}|\bar{B})=\frac{14/55}{32/55}=\frac{14}{32}=\frac{7}{16}.$

1.46 设 A、$\bar{A}$ 分别表示从甲箱取出放入乙箱的1球为红色、白色,B,C,D 分别表示从乙箱取出的两球为红色、白色、一红一白,则"两球颜色相同"$=B\cup C=\bar{D}$

$$P(B\cup C)=P(\bar{D})=1-P(D),$$

由全概率公式有

$P(D)=P(A)P(D\mid A)+P(\bar{A})P(D\mid\bar{A})$

$=\frac{6}{10}\times\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}+\frac{4}{10}\times\frac{C_4^1C_6^1}{C_{10}^2}$

$=\frac{6\times50}{900}+\frac{4\times48}{900}=\frac{492}{900}$

$\therefore\ P(B\cup C)=1-P(D)=1-\frac{492}{900}=\frac{408}{900}$

$=\frac{102}{225}\approx0.4533.$

另法:

$P(B\cup C)=P(B)+P(C)$ (B 与 C 互斥)

由全概率公式有

$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\bar{A})P(B\mid\bar{A})$

$=\frac{6}{10}\times\frac{C_5^2}{C_{10}^2}+\frac{4}{10}\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$

$=\frac{6\times20}{900}+\frac{4\times12}{900}=\frac{168}{900}$

类似地

$P(C)=P(A)P(C\mid A)+P(\bar{A})P(C\mid\bar{A})$

$=\frac{6}{10}\times\frac{C_5^2}{C_{10}^2}+\frac{4}{10}\frac{C_6^2}{C_{10}^2}$

$=\frac{6\times20}{900}+\frac{4\times30}{900}=\frac{240}{900}$

$\therefore\ P(B\cup C)=\frac{168}{900}+\frac{240}{900}=\frac{408}{900}$

$=\frac{102}{225}\approx0.4533.$

1.47 P(不全发生)$=1-P$(全部发生)$=1-p^3=(1-p)^3+3p(1-p)$

∴正确的选择是C.

1.48 三只盒子中的任意一只盒子被取中的概率都是$\frac{1}{3}$.从甲盒中取到红球的概率是$\frac{4}{8}$,从乙盒中取到红球的概率是$\frac{5}{8}$,从丙盒中取到红球的概率是0.所以(由全概公式)

$$P(\text{红球})=\frac{1}{3}\times\frac{4}{8}+\frac{1}{3}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{3}\times0=0.375$$

∴正确的选择是D.

1.49 由系统的构造知.

P(系统正常工作)$=P[D_1D_2(A\cup B\cup C)]$由事件的独立性

$=P(D_1)P(D_2)P(A\cup B\cup C)$

$=P(D_1)P(D_2)[1-P(\overline{A})P(\overline{B})$

$P(\overline{C})]$

$=s^2[1-(1-p)(1-q)(1-r)]$

∴正确的选择是 D.

1.50 **解法 1** 设 A_i ="i 次交换后黑球出现在甲袋中"

$\overline{A}_i$ = "i 次交换后黑球出现在乙袋中"$(i=1,2,3)$

则$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$

$=\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=0.82$

$P(A_3)=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(\overline{A}_2)P(A_3|\overline{A}_2)$

$=\frac{82}{100}\cdot\frac{9}{10}+\frac{18}{100}\cdot\frac{1}{10}=0.756$

1.51 设 A,B,C 分别表示从甲箱取出放入乙箱的两球为红色、白色、一红一白；D_i 表示第 i 次从乙箱取出红球，$\overline{D}_i$ 表示第 i 次从乙箱取出白球.

所求概率为 $P(D_1\overline{D}_2)$.

由全概率公式有

$$P(D_1\overline{D}_2)=P(A)P(D_1\overline{D}_2\mid A)+P(B)P(D_1\overline{D}_2\mid B)+P(C)P(D_1\overline{D}_2\mid C)$$

其中

$$P(A)P(D_1\overline{D}_2\mid A)=P(A)P(D_1\mid A)P(\overline{D}_2\mid AD_1)=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{720}{8100}.$$

$$P(B)P(D_1\overline{D}_2\mid B)=P(B)P(D_1\mid B)P(\overline{D}_2\mid BD_1)=\frac{C_4^2}{C_{10}^2}\times\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}=\frac{288}{8100}.$$

$$P(C)P(D_1\overline{D}_2\mid C)=P(C)P(D_1\mid C)P(\overline{D}_2\mid CD_1)=\frac{C_6^1C_4^1}{C_{10}^2}\times\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1200}{8100}.$$

$\therefore\ P(D_1\overline{D}_2)=\frac{1}{8100}(720+288+1200)=\frac{2208}{8100}=\frac{552}{1025}.$

1.52 设 A_i 表示甲在第 i 次射击时击中目标；B_i 表示乙在第 i 次射击时击中目标，C 为目标被击中.

(1) 甲在第 3 次射击时目标被首次击中，甲在前 2 次都未击中目标，乙也未击中，此事件为 $C=\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3$，且相互独立.

$P(C)=P(\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3)$

$=P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{B}_2)P(A_3)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$

(2) 甲只射 3 次，甲在乙前击中目标.此概率为

$P(A_1\cup\overline{A}_1\overline{B}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3)$ (互斥事件组)

$=P(A_1)+P(\overline{A}_1\overline{B}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{B}_1\overline{A}_2\overline{B}_2A_3)$

$=\frac{1}{3}+P(\overline{A}_1)P(\overline{B}_1)P(A_2)+\frac{1}{12}$ (见(1))

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}.$

1.53 **分析**：这 100 件元件能出厂，就是 100 件元件中任取 3 件经检验全是合格品.(实际上并不一定合格)

设 A = {元件能出厂} = {100 件中任取 3 件检验全合格}

B_i = {任取 3 件中次品为 i 件}，$i=0,1,2,3$.

$\therefore\ A=AB_0\cup AB_1\cup AB_2\cup AB_3$，其中 $\bigcup_{i=0}^{3}B_i=\Omega$，由全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)\qquad(*)$$

其中

$$P(B_0)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3},\quad P(B_1)=\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}$$

$$P(B_2)=\frac{C_{96}^1C_4^2}{C_{100}^3},\quad P(B_3)=\frac{C_4^3}{C_{100}^3}$$

$P(A\mid B_0)=0.99^3,\quad P(A\mid B_1)=0.99^2\times0.05$

$P(A\mid B_2)=0.99\times0.05^2,\quad P(A\mid B_3)=0.05^3,$

代入(*)式，经计算得出

$$P(A)\approx0.8629$$

1.54 **分析**：设 A_i = {第一次取出的产品来自第 i 箱}，$i=1,2$；B_j = {第 j 次取出的产品为正品}，$j=1,2$，$\overline{B}_j$ 为次品，据题意，参照全概率公式有

$P(B_2)=P(A_1|\overline{B}_1)P(B_2|A_1)+P(A_2|\overline{B}_1)P(B_2|A_2)$ ①

由于是有放回的抽取，各箱的次品率、正品率不变

$P(B_2|A_1)=\frac{7}{8},\quad P(B_2|A_2)=\frac{3}{4}$

$P(A_1|\overline{B}_1)=\frac{P(A_1\overline{B}_1)}{P(\overline{B}_1)}=\frac{P(A_1)P(\overline{B}_1|A_1)}{P(\overline{B}_1)}$ ②

$P(A_2|\overline{B}_1)=\frac{P(A_2\overline{B}_1)}{P(\overline{B}_1)}=\frac{P(A_2)P(\overline{B}_1|A_2)}{P(\overline{B}_1)}$ ③

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$，$P(\overline{B}_1|A_1)=\frac{1}{8}$，$P(\overline{B}_1|A_2)=\frac{1}{4}$由全概率公式有

$P(\overline{B}_1)=P(A_1)P(\overline{B}_1\mid A_1)+P(A_2)P(\overline{B}_1\mid A_2)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$