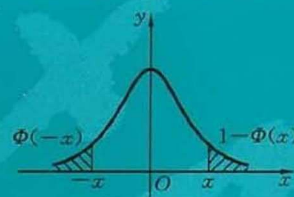
新编高等院校高职高专公共基础课规划教材

俞礼钧 王裕民 主编

应用高等数学

（下册）（第3版）

YINGYONG GAODENG SHUXUE



华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

新编高等院校高职高专公共基础课规划教材

应用高等数学(下册)

(第 3 版)

主　编　俞礼钧　王裕民
副主编　彭祥光　王　力
　　　　赵丽君　王叔宝

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学(下册)(第3版)/俞礼钧　王裕民　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2010.8

ISBN 978-7-5609-4565-1

新编高等院校高职高专公共基础课规划教材

Ⅰ.应…　Ⅱ.①俞…　②王…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第074182号

应用高等数学(下册)(第3版)　　俞礼钧　王裕民　主编

责任编辑:史永霞
封面设计:刘　卉
责任校对:李　琴
责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　武昌喻家山　　邮编:430074　　电话:(027)87557437
录　　排:武汉兴明图文信息有限公司
印　　刷:华中科技大学印刷厂
开　　本:787mm×960mm　1/16
印　　张:17.25
字　　数:375千字
版　　次:2010年8月第3版第5次印刷
定　　价:34.50元

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118　竭诚为您服务

前　言

本书分为上、下两册，上册是一元函数微积分学，下册包括线性代数和概率论与数理统计，各章分节附有习题，文后附有习题答案。

本书在编写上侧重于应用，对过于复杂的定理证明及在实际问题中应用较少的部分都予以省略，不去强调论证的严密性。

本书在知识结构、教学内容、体例编写等方面，力求提供丰富的素材，贯彻深入浅出的原则，重视数形结合的方法，强化计算工具的使用；将现代生活和各类专业学习中有广泛应用的基础知识作为必学内容，以保证普通高校基础教学的教学水平。在编写过程中，编者还注意渗透现代教学的观点和方法，为方便学生深入学习奠定了较好的基础。

本书编写具有一定的弹性，希望其适用面更为广泛。为了帮助三类本科在内的各种高职高专学校的学生根据实际情况选择不同的内容，本书在编写中考虑了培养应用型人才的培养目标和要求等问题。

本书可作为高等学校三类本科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的教材或教学参考书。

本书由俞礼钧、王裕民担任主编，彭祥光、王力、赵丽君、王叔宝担任副主编。其中，第 2 章和第 7 章由俞礼钧负责编写，第 5 章和第 6 章由王裕民、王叔宝负责编写，第 11 章、第 12 章和第 13 章由彭祥光负责编写，第 1 章和第 9 章由王力负责编写，第 3 章、第 4 章、第 8 章和第 10 章由赵丽君负责编写。

本书在编写过程中，得到了编者所在学校领导和教务处的大力支持及有关教师的热情帮助，在此一并表示诚挚的谢意。

由于编者水平有限，本书难免存在疏漏之处，敬请广大读者和从事教学的教师提出批评和建议。

编　者

2006 年 6 月

第 3 版前言

本书原来编写时把读者群定格在学习高等学校三类本科经济类高等数学课程和高职高专数学课程的学生上，以此确定上册内容是一元函数微积分学与多元函数微积分学，下册内容包括线性代数和概率论与数理统计。本教材因为取材精简恰当、文字流畅易读，自发行以来普遍受到好评。其后不少工程等类专业的行家认为其实把本教材用于其他专业，较之于有些教材更为适宜。

几经斟酌，为感谢同仁、社会的厚爱，便于教师开展教学工作，遂决定再次改版，修订本书。一方面删去一些看似重复的繁例或冗文，使其体现删繁就简的原则；另一方面增扩工程等类专业所需的基本内容。改版时编者希望整个教材内容能体现培养第一线应用型技术人才的特点，体现从工程类到经济类各类专业的数学意识、创新能力和全面素质培养的要求，使之与国家中长期教育改革和发展规划纲要的精神相契合。在保证基本要求的前提下，改编时注意把有用的内容充实到教材中去，既体现教育规格之所需，又能满足读者终身学习的需要。在当前强调对学生加强素质教育的背景下，本书结合了教学改革的实践心得。编者追求的目标是，学生能获得专业素质教育、理性思维训练、美感熏陶及数学文化的传承。

本书改版后，读者对象是各类三类本科和各类高职院校及专科学校的学生(包括理、工、师范、财经、医、农的本、专科生，电大、职大、函大及高等教育自学考生)。不同专业可根据需要自行决定取舍其中内容。

改版后，全书仍分上、下两册，并配以对应的教学指导书(包括习题解答)一本。上册内容包括极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学和多元函数积分学等 8 章；下册包括微分方程、无穷级数、行列式、矩阵与线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、统计推断、方差分析与回归分析等 8 章。

本套书由俞礼钧、王力、王裕民担任主编，赵丽君、彭祥光、王叔宝担任副主编。其中，第 2 章、第 9 章、第 10 章和第 11 章由俞礼钧负责编写。第 5 章和第 7 章由王裕民、王叔宝负责编写。第 1 章、第 8 章和第 12 章由王力负责编写。第 3 章、第 4 章、第 6 章和第 13 章由赵丽君负责编写。第 14 章、第 15 章和第 16 章由彭祥光负责编写。负责修订者为俞礼钧、王力、赵丽君和王叔宝。全套书仍由俞礼钧统稿。

改写过程中多位使用本书的教师如王红胜、胡芳、石丽君等人提出了有价值的建议并写

出了详细的书面意见。本书得以付梓,受到武汉商贸职业学院教务处代芳处长的鼎力支持。编者在此一并致以衷心的感谢。

但愿此次改版正应"删繁就简三秋树,立异标新二月花"之寓意。

编者

花开红树之时,光谷腹地之处

2010 年 3 月武汉

目　录

第 9 章　微 分 方 程

建立函数关系是研究变量之间的依赖关系的重要手段. 但是,有些实际问题很难甚至不能直接建立变量之间的函数关系,往往由问题的实际意义我们比较容易得到待定的函数及其导数(或微分)的关系式——微分方程. 通过求解微分方程,得到所要寻找的函数关系,因此建立微分方程并求解微分方程,也是得到函数模型的重要途径. 例如在研究力学系统或电路系统问题时,在一定条件下,问题的解决就常常归结为微分方程的研究.

9.1　微分方程的基本概念

所谓方程,是指那些含有未知量的等式,它表达了未知量所必须满足的某种条件. 在初等数学中,我们曾学习过代数方程和某些超越方程.

微分方程与上述方程的不同之处在于,它的未知量是未知函数,方程中含有导数或微分运算,它是联系自变量和未知函数及其导数(或微分)的关系式. 例如,

$y' = xy$(其中 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,$x$ 为自变量,y 为未知函数),

$x\mathrm{d}t + t\mathrm{d}x = 0$($t$,$x$ 均可为自变量),

$y'' + 2y' - 3y = \mathrm{e}^x$($x$ 为自变量,y 为未知函数).

未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程. 本章只讨论常微分方程,简称微分方程.

微分方程中出现未知函数最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶. 如上述方程中,前两个是一阶微分方程,第三个是二阶微分方程.

下面举例进一步说明微分方程的概念.

【例 1】　设一曲线通过坐标原点,且曲线上任一点(x,y)处的切线斜率等于该点横坐标的平方,求此曲线方程.

【解】　设所求曲线方程为 $y = y(x)$,由导数的几何意义得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2.$$

为求出未知函数 y，将上面微分方程两端对 x 积分，得

$$y=\int x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+C.$$

将函数 $y=\frac{1}{3}x^3+C$ 代入原微分方程，使方程恒成立，它就是微分方程的解. 该式中含有一个任意常数 C，且常数的个数等于微分方程的阶数，称这样的解为微分方程的通解.

又由已知条件，曲线通过坐标原点，知

$$x=0\text{ 时},\quad y=0.$$

将此条件代入通解表达式中，确定常数 $C=0$. 我们称能用于确定通解中常数 C 的条件为微分方程的初始条件. 将常数 $C=0$ 再代回到通解表示式中，最后得微分方程的解

$$y=\frac{1}{3}x^2.$$

我们称这种不含有任意常数的微分方程的解为微分方程的特解.

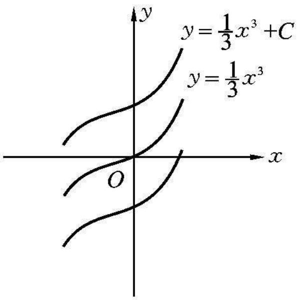


图 9-1

从几何意义上看，$y=\frac{1}{3}x^3+C$ 表示一簇立方抛物线，如图 9-1 所示，称为微分方程的积分曲线族，而 $y=\frac{1}{3}x^3$ 是这簇曲线中通过点(0,0)的那一条.

【例 2】 设质量为 m 的质点以初速度 v_0 作竖直上抛运动，在运动过程中，物体只受重力作用，求质点在任意时刻的位置与时间关系的运动方程.

【解】 建立坐标系如图 9-2 所示. 坐标原点取在开始上抛时的抛出点，y 轴竖直向上.

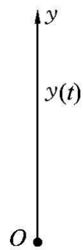


图 9-2

设在任意时刻 t 质点所在位置为 $y(t)$，物体的运动方程为 $y=y(t)$. 由于质点只受重力 mg 作用，且力的方向与 y 轴正向即开始运动方向相反，故由牛顿第二定律，有

$$ma=m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-mg.$$

这是一个二阶微分方程，它不含自变量 t 及未知函数 $y(t)$，只含有未知函数的二阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-g.$$

对上面微分方程两边积分，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\int(-g)\mathrm{d}t=-gt+C_1,$$

即
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1,$$
再积分一次，得
$$y=\int(-gt+C_1)\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2.$$
上式为微分方程的通解(独立的任意常数 C_1、C_2 与微分方程的阶数相同). 要确定通解中常数 C_1、C_2，这时就需要两个条件. 由题设条件知初始条件为
$$y\big|_{t=0}=0,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=v_0,$$
将条件 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=v_0$ 代入 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1$，得 $C_1=v_0$；将 $y\big|_{t=0}=0$ 代入 $y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$，得 $C_2=0$. 于是微分方程的特解为
$$y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t=v_0t-\frac{1}{2}gt^2,$$
此式即为所求质点的运动方程.

通过上面两个例题说明了微分方程的几个基本概念. 微分方程的解有两种形式：一种不含任意常数；一种含任意常数. 一般来说，用未知函数及其各阶导数在某个特定点的值作为确定通解中任意常数的条件，称为初始条件. 一个微分方程与其初始条件构成的问题，称为初值问题. 求解初值问题，实际上就是求解微分方程满足初始条件的特解.

利用微分方程解决实际问题的一般步骤如下：

(1) 建立反映实际问题的微分方程；

(2) 按实际问题写出初始条件；

(3) 求出微分方程的通解；

(4) 由初始条件确定所求的特解.

习　题　9.1

1. 指出下列微分方程的阶数：

(1) $x(y')^2-2yy'=x$；　　(2) $yy''+(1+y^2)'=x$；

(3) $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\theta}+\rho=\sin^2\theta$；　　(4) $L\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}\theta=0$.

2. 判断下列各题中的函数是否为所给微分方程的解. 若是其解，试指出是通解还是特解(其中 C 为任意常数).

(1) $(x-2y)y'=2x-y$，$x^2-xy+y^2=0$；

(2) $y''-2y'+y=0$，$y=x^2\mathrm{e}^x$；

(3) $y=xy'+f(y')$，$y=Cx+f(C)$；

(4) $y''+3y'+y=0, y=e^{x}-e^{-x}$.

3. 验证 $y=Cx^3$ 是方程 $3y-xy'=0$ 的通解（C 为任意常数），并求满足初始条件 $y|_{x=1}=\dfrac{1}{3}$ 的特解.

4. 在下列各题中，对给定的曲线簇求出所对应的微分方程：

(1) $y=x^2-Cx$；　　(2) $y=C_1x+C_2x^2$.

9.2　一阶微分方程

在 9.1 节的两个例题中，我们通过对方程两边积分求出了它的通解. 但是并不是所有的微分方程都可以用这种方法求解. 例如方程

$$\frac{dy}{dx}=2xy^2,$$

用对方程两边积分的方法就不能求出它的解. 这是因为它的右端含有未知函数 y，而积分 $\int 2xy^2\,dx$ 求不出来. 这一节讨论一阶微分方程中的两个重要类型 —— 可分离变量的微分方程和一阶线性微分方程的解法.

一阶微分方程的一般形式为

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{9-2-1}$$

或

$$P(x,y)dx=Q(x,y)dy. \tag{9-2-2}$$

9.2.1　可分离变量的微分方程

若一阶微分方程(9-2-1) 或(9-2-2) 能表示成

$$g(y)dy=f(x)dx \tag{9-2-3}$$

的形式，则称该微分方程为可分离变量的微分方程.

为求微分方程的解，将方程(9-2-3) 两边分别对 y、x 进行不定积分，即

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx.$$

若函数 $F(x)$，$G(y)$ 分别为 $f(x)$，$g(y)$ 的原函数，则得

$$G(y)=F(x)+C. \tag{9-2-4}$$

可以证得由式(9-2-4) 确定的隐函数是可分离变量的微分方程的解，由于它一定带有一个任意常数 C，所以它是微分方程的通解. 但是这个通解隐含在式(9-2-4) 中，有时不易求出，故通常直接称式(9-2-4) 为可分离变量微分方程的隐式通解.

需要注意的是:求解可分离变量的微分方程时,先要将两个变量分离在方程的两边,即变成 $g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$ 的形式,然后两端再分别对 y、x 积分.

将方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ 两边同时乘以$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x$(当 $y \neq 0$ 时),得

$$\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x,$$

这时变量 x 和 y 就分离在方程的两端了,两边积分后得

$$y = \frac{-1}{x^2 + C} \quad (\text{其中 } C \text{ 为任意常数}).$$

可以验证,函数 $y = \frac{-1}{x^2 + C}$ 是微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy^2$ 的通解.

【例 3】　求解微分方程$(x + xy^2)\mathrm{d}x + (y - x^2y)\mathrm{d}y = 0$.

【解】　将原方程变形为

$$x(1 + y^2)\mathrm{d}x = y(x^2 - 1)\mathrm{d}y,$$

当 $x^2 - 1 \neq 0$ 时,有

$$\frac{y}{1 + y^2}\mathrm{d}y = \frac{x}{x^2 - 1}\mathrm{d}x,$$

所以,原方程为可分离变量的微分方程.

上式两边积分,即

$$\int \frac{y}{1 + y^2}\mathrm{d}y = \int \frac{x}{x^2 - 1}\mathrm{d}x,$$

得

$$\frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = \frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + \frac{1}{2}\ln|C|,$$

整理,得

$$\frac{y^2 + 1}{x^2 - 1} = C \quad (C \text{ 为非零的任意常数}),$$

此式为原方程的隐式通解.

当 $x^2 - 1 = 0$ 时,$x = \pm 1$,将其代入原方程中满足原方程,可知 $x = \pm 1$ 是原方程的两个特解,它们不包含在通解中.

【例 4】　1999 年我国的国民生产总值(GDP) 为 80 423 亿元.如果我国能保持每年 8% 的相对增长率,问到达 2015 年我国的 GDP 是多少?

【解】　(1) 建立微分方程.

设 $t = 0$ 代表 1999 年,并设第 t 年我国的 GDP 为 $P(t)$.由题意可知,从 1999 年起,$P(t)$ 的相对增长率为 8%,即