

全国部分高等院校研究生

高等数学试题解答

上 册

湖 北 人 民 出 版 社

高等数学试题解答

下 册

王益姝 胡源福

王仁德 李培生 欧阳家之

湖 北 人 民 大 学 出 版 社

全国部分高等院校研究生
高等数学试题解答
上 册

王益姝 胡源福

王仁德 李培生 欧阳家之

湖北人民出版社出版、发行
湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 12印张 256,000字
1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷
印数：1—83,000

统一书号：7106·1584 定价：1.25元

全国部分高等院校研究生
高等数学试题解答
下 册

王益姝 胡福源

王仁德 李培生 欧阳家之

湖北人民出版社出版、发行
湖北省新华印刷厂印刷

787×1092毫米32开本 10.875印张 231,000字
1981年5月第1版 1981年5月第1次印刷
印数：1—83,000

统一书号：7106·1591 定价：1.13元

前 言

这本全国部分高等院校研究生《高等数学试题解答》，是根据收集到的 1979 年度全国百余所高等学校招收研究生的高等数学试题及 1978 年度、1980 年度部分高校招收研究生的试题、一机部出国留学生的试题编写的。编排顺序以校名首字笔划为序。由于试题的选取基本上包括了全国工科院校的各专业，从试题的深度和广度，可以看出工科院校研究生对高等数学的基本要求。因此对准备报考研究生的读者有直接的参考作用。又因研究生的试题，大部分有一定的难度，并形式多样（有基本概念、基本理论和基本运算技巧方面的大量问题；有富有启发性的典型问题；还有各种综合题、证明题和应用问题），故对各类学校正在学习高等数学的读者亦有复习、巩固和提高了的辅导作用。还由于试题的鲜明典型性，对从事高等数学教学的同志也有一定的参考价值。总之，我们编写这本研究生试题解答，力求满足广大读者对学习高等数学各方面的不同要求，使之成为一本适合以上读者需要的参考资料。

我们在编写这本研究生试题解答过程中，陈祯福等同学曾做过一定的工作，完稿后承副教授王传法、吴修珉审查校阅，并对某些问题的证明或解法提供了许多宝贵意见。同时，得到了我院各级领导的鼓励与支持。此外，我院数学教研室戴莉芬、蔡宏才、张小柔等许多同志都给了很大的帮

助，谨向他们表示感谢。

由于编写工作仓猝，错误之处，请读者指正。

最后向提供试题的兄弟院校和单位，谨致谢意。

编 者

于武汉工学院

1981 年元月

目 录

上 册

一机部出国进修生(1978年度)	1
一机部出国进修生数学专业(1978年度)	7
上海工业大学(1979年度)	18
上海化工学院(1979年度)	28
上海师范大学(1979年度)	35
上海交通大学(1979年度)	43
上海机械学院(1979年度)	49
上海海运学院(1979年度)	58
上海纺织工学院(1979年度)	67
上海科技大学(1979年度)	72
上海铁道学院(1979年度)	80
山东工学院(1979年度)	88
大连铁道学院(1979年度)	95
大连海运学院(1979年度)	103
大连工学院(1979年度)	109
广西大学(1979年度)	116
中山大学哲学系自然辩证法专业(1979年度)	123
中国人民解放军国防科技大学(一)(1979年度)	128
中国人民解放军国防科技大学(二)(1979年度)	134

中国科学技术大学化学专业 (1979 年度).....	138
中国矿业学院 (1979 年度).....	143
中南矿冶学院 (1979 年度).....	150
太原机械学院 (1979 年度).....	156
太原工学院 (1979 年度).....	162
天津大学 (1979 年度).....	171
天津纺织工学院 (1979 年度).....	176
无锡轻工业学院 (1979 年度).....	183
北方交通大学 (1979 年度).....	190
北京工业大学 (1979 年度).....	198
北京工业学院 (1979 年度).....	202
北京化工学院 (1979 年度).....	206
北京邮电学院 (1979 年度).....	211
北京钢铁学院 工科类型 (1979 年度).....	218
北京钢铁学院 理科类型 (1979 年度).....	223
北京航空学院 (1979 年度).....	224
四川大学(一) (1979 年度).....	231
四川大学(二) (1979 年度).....	236
四川大学(三) (1979 年度).....	239
四川大学(四) (1979 年度).....	244
兰州铁道学院 (1979 年度).....	247
华中工学院 (1979 年度).....	254
华北电力学院 (1979 年度).....	264
华北水利水电学院 (1979 年度).....	271
华东工程学院 (1979 年度).....	279
华东水利学院 (1979 年度).....	288

华东石油学院 (1979 年度).....	296
华南工学院 (1979 年度).....	302
长沙铁道学院 (1979 年度).....	308
长春光机学院 (1979 年度).....	315
东北重型机械学院 (1979 年度).....	322
西北工业大学 (1979 年度).....	326
西北农学院 (1979 年度).....	332
西北电讯工程学院 (1979 年度).....	340
西安公路学院 (1979 年度).....	350
西安交通大学 (1979 年度).....	364
西安冶金建筑学院 (1979 年度).....	372

目 录

下 册

成都电讯工程学院 (1979 年度)	377
成都地质学院 (一) 地质类 (1979 年度)	381
成都地质学院 (二) 工程地质类 (1979 年度)	385
成都地质学院 (三) 核子地球物理勘探类 (1979 年度)	391
成都科学技术大学 (1979 年度)	398
同济大学 (一) 工科类 (1979 年度)	405
同济大学 (二) 理科类 (1979 年度)	410
合肥工业大学 (1979 年度)	417
吉林工业大学 (1979 年度)	423
沈阳机电学院 (1979 年度)	427
武汉工学院 (1980 年度)	433
武汉工学院 (1979 年度)	438
武汉水利电力学院 (1979 年度)	445
武汉测绘学院 (1980 年度)	450
武汉测绘学院 (1979 年度)	456
武汉钢铁学院 (1979 年度)	465
武汉地质学院 (一) 北京研究生部岩浆岩专业 (1979 年度)	471

武汉地质学院(二)钻探工程专业 (1979 年度)	475
武汉地质学院(三)磁法勘探专业 (1979 年度)	480
河北工学院 (1979 年度)	486
哈尔滨电工学院 (1979 年度)	494
南开大学物理专业 (1979 年度)	498
南京工学院 (1979 年度)	503
南京化工学院 (1979 年度)	510
南京林产学院 (1979 年度)	517
陕西机械学院 (1979 年度)	524
清华大学 (1979 年度)	529
浙江大学 (1979 年度)	535
湖北建筑材料工业学院(甲组) (1979 年度)	544
湖北建筑材料工业学院(乙组) (1979 年度)	549
湖南大学 (1979 年度)	556
福州大学 (1979 年度)	564
镇江农业机械学院 (1979 年度)	570
上海机械学院 (1978 年度)	576
太原工学院 (1978 年度)	582
中南矿冶学院 (1978 年度)	591
北京工业大学 (1978 年度)	594
西北轻工业学院(一) (1978 年度)	600
西北轻工业学院(二) (1978 年度)	606
西安交通大学(一) (1978 年度)	612
西安交通大学(二) (1978 年度)	620
西安交通大学(三) (1978 年度)	627
华中工学院 (1978 年度)	632

华东工程学院(一) (1978 年度)	636
华东工程学院(二) (1978 年度)	643
华东水利学院 (1978 年度)	651
华东石油学院(一) (1978 年度)	656
华东石油学院(二) (1978 年度)	663
长沙铁道学院 (1978 年度)	665
长春光机学院 (1978 年度)	670
成都电讯工程学院 (1978 年度)	680
吉林工业大学 (1978 年度)	684
南京邮电学院 (1978 年度)	690
湖北建筑材料工业学院 (1978 年度)	697
湖南大学 (1978 年度)	706
福州大学 (1978 年度)	711

成都电讯工程学院

(1979 年度)

一、(10 分), 试讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 的可导性.

证明: 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{1 - e^{\frac{1}{x}} - xe^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2}}{(1 - e^{\frac{1}{x}})^2} = \frac{1 - e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}}{(1 - e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

在 $x=0$ 点, 有 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$, 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续. 由导数定义

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Big|_{x=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x}{1 - e^{\frac{1}{\Delta x}}} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{\Delta x}}}, \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 1.$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.

二、(15 分) 设 u 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + ku = 0$, k 为常数,

1. 若 $u = \varphi(r)$, 而 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 试导出函数 $\varphi(r)$ 所满足的方程.

2. 若 $u = \psi(r, \theta)$, 而 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 试导出函数 $\psi(r, \theta)$ 所满足的方程.

解: 1.
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

同理有,
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

将(1), (2)代入所给方程即得 $\varphi(r)$ 所满足的方程为

$$\frac{d^2 \varphi(r)}{dr^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{d\varphi(r)}{dr} + k\varphi(r) = 0.$$

2. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right]$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} - \left[-\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right]$$

$$+ \frac{y}{x^2 + y^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \Bigg]$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$- \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

将上两式代入所给方程得 $\psi(r, \theta)$ 所满足的方程为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{\partial \psi}{\partial r} + k\psi = 0.$$

三、(15分) 计算曲线积分 $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 $ABCD$ 为以 A

$(1, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-1, 0)$ 及 $D(0, -1)$ 为顶点的正方形围线.

解: 原式 = $\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$

$$= \int_1^0 \frac{dx - dx}{x + 1 - x} \\ + \int_0^{-1} \frac{dx + dx}{-x + 1 + x} \\ + \int_{-1}^0 \frac{dx - dx}{-x + x + 1} \\ + \int_0^1 \frac{dx + dx}{x + 1 - x}$$

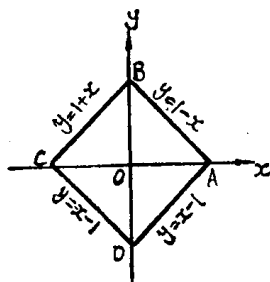


图 72

$$= 2 \int_0^{-1} dx + 2 \int_0^1 dx = 0.$$

四、(15分) 计算曲面积分 $\iint_s (x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy)$,

其中 s 为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面.

解: 请见上海铁道学院—(5)

五、(15分) 求以下级数之和, 并指出适用于该和式的 x 的范围,

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \cdots$$

解: 请见天津大学 1979 年度第七题

六、(15分) 试证明: 当 $0 < x < \pi$ 时,

$$\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x.$$

证明: 将 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x$ 进行偶式延拓有 $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x \right) dx = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x \right) \cos nx dx$$

$$= \begin{cases} 0 & n = 1, 3, 5 \cdots \\ \frac{1}{(n-1)(n+1)} & n = 2, 4, 6 \cdots \end{cases}$$

则将 $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x$ 展开为富里哀级数为

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$= \frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \cdots \quad (0 < x < \pi)$$

七、(15分) 求解方程 $y = xy' + y' - y'^2$.

解: $p = y'$; 则有 $y = xp + p - p^2$.

两边对 x 求导, 有

$$y' = p + xp' + p' - 2pp'.$$

所以 $[(x+1) - 2p]p' = 0$.

分两种情况讨论:

(1) $p' = 0$, 有 $p = c$, 则方程的通解为

$$y = c_1x + c_2.$$

(2) $(x+1) - 2p = 0$, 有 $x = 2p - 1$, (1)

而由题意有 $y = (x+1)p - p^2$. (2)

(1), (2) 联立消去 p , 得

$$y = \frac{(x+1)^2}{4}.$$

这解满足方程, 但不能从通解中任取 c 的值而得到, 因此它是一个奇解.

成都地质学院(一)

地 质 类

(1979 年 度)

一、(12分) 计算下列极限

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} - 1}.$$