

九
數
通
考

九數通考卷十一

虞山屈曾發省園氏輯

三角形法

三角說

凡三角形立於圓界之一半者爲直角卽句股過圓界之一半者爲銳角不及圓界之一半者爲鈍角

此過不及指兩角所立之底而言

然不

拘銳角鈍角自一角至底邊作垂線卽分爲兩直角是仍不離乎句股也兩腰等者垂線卽當底之一半而兩腰不等者所分底界則有大小不同故和較相比之法因之而生蓋和求較較求和要必歸於句股相求之理由句股而得垂線則凡面積及

內容方圓等形皆無不可得矣

設如有等邊三角形每邊十尺求中垂線及積幾何答曰中垂

線八尺六寸六分○三毫有餘積四十三尺三十寸十分有

餘法以底邊

十尺折半得

五尺為句

如乙任以兩腰之一邊

為弦

如甲

用句弦求股法得股

如甲

即中垂線



也乃以中垂線

八尺六寸六分○二毫

與半底

五尺相乘即

得積

又法以底邊折半得

五尺

自乘得

二十尺

如句自乘數三因之得

七十尺

如股自乘數開方得股即中垂線乃以中垂線與底邊

十尺相乘折半即得積蓋弦比句大一倍則弦自乘數比句自

乘數大四倍。為連比例隔一位相加之比例。於弦自乘數四倍內減句自乘

數一倍餘三倍。即股自乘數。故將句自乘數三因。即得股自

乘數。開方而得股也。既得股為中垂線。則以底邊十尺乘之

而折半。與前法以半底五丈乘之。其求積之理一也。

設如有銳角三角形。大腰一百二十二尺。小腰一百一十二尺。

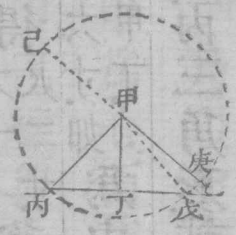
底一百五十尺。求中垂線及積幾何。答曰。中垂線八十九尺。

六寸。積六千七百二十尺。法以底一百五十尺為一率。如乙丙

和以兩腰相加得二百三十尺為二率。如乙己為兩

腰相減餘十尺為三率。如庚乙為求得四率十五尺六

寸。如乙戊與底一百五十尺相減餘一百三十尺折半



得六十七尺二寸為句如丁以小腰一百一十二尺為弦如甲求得股八十九尺

六寸如為中垂線乃以中垂線與底相乘折半得積蓋甲乙

甲丁丙三角形試以甲為心丙為界作一圓截大腰於庚截底於

戊又將大腰引長至己作甲己線與甲丙小腰相等則以乙

丙底邊和與乙己兩腰和為比即同於乙庚兩腰較與乙戊

底邊較為比為轉比例四率也既得四率則於乙丙底內減

去乙戊餘戊丙折半得丁丙為句甲丙為弦求得股為中垂

線也其求積之法與前同

又法以大腰自乘得一萬四千八百八十四尺小腰自乘得一萬二千五百四十四尺

兩數相減餘二百四十尺以底一百一十五尺除之亦得底邊較十五尺六寸

寸。既得底邊較，照前法算之，亦得。其鈍角求積法同。

設如有斜立鈍角三角形，大腰二十一尺，小腰十七尺，底十尺。

求形外垂線及形內積幾何。答曰：形外垂線十六尺八寸，形

內積八十四尺。法以底十尺為一率，如乙丙為底邊較，兩腰相減，餘

四尺為二率，如庚乙為兩腰較，兩腰相加，得三十尺為三率，如乙己為兩腰和，求

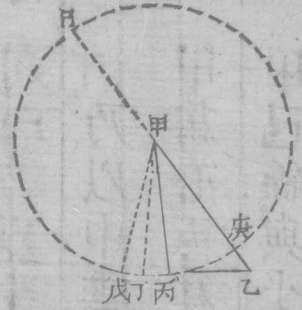
得四率，十五尺二寸，如乙戊為底邊和，內減去底十尺，餘五尺二寸，折半得二尺六寸，為

句，如丙丁，以小腰十七尺為弦，如甲丙，求得股十六尺八寸，為中垂線，如甲丁。

乃以中垂線與半底五尺相乘，得積，如甲乙丙三角形，試以

甲為心，丙為界，作一圓，截大腰於庚，又將大腰引長至己，作

甲己線，與小腰等，復將底引長至戊，作乙戊線，則成甲乙戊



三角形凡自圓外一點至圓內所作兩線之比
 例同於圓外兩段轉相比之比例則圓外兩段
 之比例亦必同於兩全線轉相比之比例故乙
 丙與乙庚之比同於乙己與乙戊之比為轉比

例四率既得乙戊則減乙丙餘丙戊折半得丙丁為句甲丙
 為弦求得股為甲丁即形外垂線也求積法同前

又法以大腰自乘得四百四十一尺小腰自乘得二百八十九尺兩數相減

餘一百五十二尺以底十尺除之亦得底邊和十五尺既得底邊和照

前法算之亦得蓋前題兩法為和求較此題兩法為較求和

其理一也

形內容之正方形矣。故壬癸乙之乙癸底與甲丁方邊之比

同於甲乙丙之乙丙底與戊己方邊之比也。

設如有銳角三角形大腰三百三十八尺小腰三百尺底四百一十八尺求內容圓徑幾何。答曰一百九十尺。法先用求

中垂線法求得中垂線

二百四十尺如甲丁與底四百十八尺如

乙相乘得

十萬○三百二十尺如甲乙丙乙丙三長方積

併大腰小

腰底三邊數共

一千○五十六尺為三長方之長

除之得

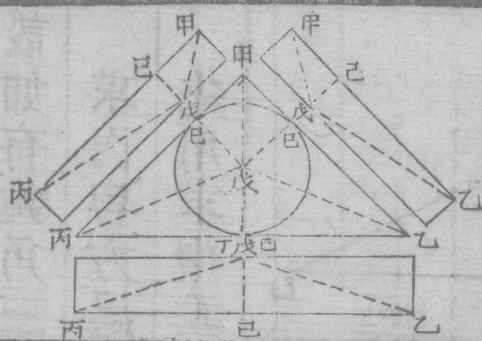
九十五尺

為三長方之闊

即內容圓半徑倍之得全徑如圖試自

圓之中心至甲乙丙三角各作戊甲戊乙戊丙

三線遂分甲戊乙甲戊丙乙戊丙三三角形其



三邊皆為三形之底而戊己半徑皆為三形之垂線今乙丙
底與甲丁中垂線相乘所得之長方積原比甲乙丙三角形
積大一倍即如將三形之垂線各乘其底所得之長方積合
為一大長方也三長方之長雖不同而闊則一故各以長除
積而得闊即半徑者即如合三角形之三邊除三角形之倍積
而得半徑也

設如有鈍角三角形大腰十七尺小腰十尺底二十一尺求外
切圓徑幾何答曰三十一尺二寸五分法先用求中垂線

法求得中垂線

八尺如甲丁

為一率小腰

十尺如甲乙

為二率大腰

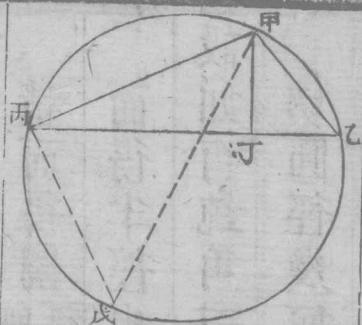
十七

尺如甲丙

為三率求得四率

如甲戊

即外切圓徑如圖甲乙丙三角



形作切三角一圓自甲角至圓對界作甲戊全徑線又自丙角至戊作丙戊線則甲丙戊之丙角立於圓界之一半必為直角與甲丁垂線所分甲丁乙之丁角等而戊角與乙角皆對甲丙弧其度又等故甲丙戊與甲丁乙兩形為同式而甲丁與甲乙之比同於甲丙與甲戊之比也

設如三角形底二丈八尺小腰與中垂線之較二尺大腰與中垂線之較六尺問兩腰各幾何答曰小腰二十六尺大腰三十尺

十尺法借一差為中垂線則小腰為一多二尺小腰與中垂線

之和為二多二尺與小腰較二尺相乘得四多四尺為小分底自乘

方積大腰為

差一多

大腰與中垂線之和為

差二多

尺與大腰

較尺六相乘得

差十二多

六尺三十

為大分底自乘方積以兩方積相

較則大分底方為小分底方之

倍三多

四尺二十乃以

底二十自乘得

七百八十四尺

內減所多之

四尺二十餘百

六十為小分底自乘四正方小分底乘大分底

二長方積折半得

三百八十尺

為小分底自乘二正

方小分底乘大分底一長方積共成一大長方

底二十為長闊之較用帶縱較數開方法算之

得闊

尺十為小分底自乘得

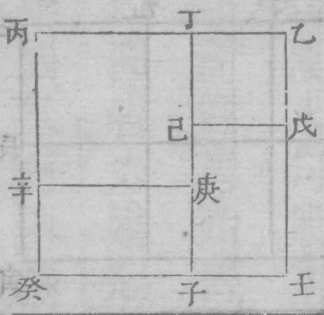
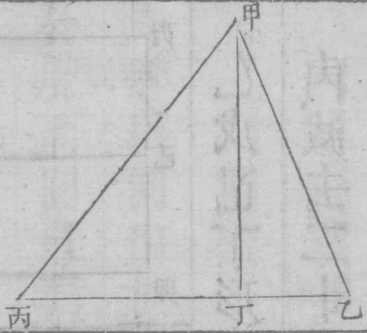
尺一百

以小腰較

之得

尺五十為小腰與中垂線之和內加較

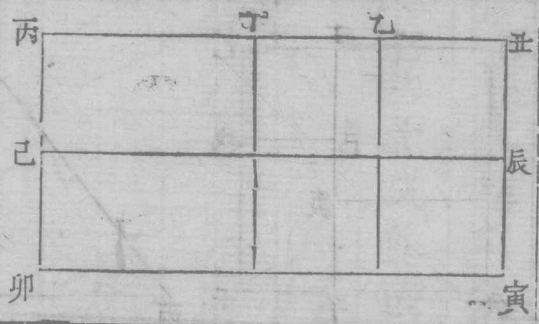
尺二折



求外切圓徑

六

續



半得二十即小腰又以兩腰較四尺與小腰相加

得三十尺即大腰如圖甲乙丙三角形作甲丁垂

線遂分兩句股形以甲乙甲丁股弦和與股弦

較相乘則得乙丁句自乘之乙戊己丁正方形

以甲丙甲丁股弦和與股弦較相乘則得丁丙

句自乘之丁庚辛丙正方形丁庚辛丙形既為

乙戊己丁形之三倍多二十四尺故於乙壬癸丙大正方形

內減去二十四尺餘與三乙戊己丁形等是共得乙戊己丁

類四正方形戊壬子己類大分底乘小分底形二長方共成丑寅卯丙大

長方折半得丑辰己丙長方形乙丙即長闊之較故用帶縱

較數開平方法算之得闊爲乙丁小句自乘以股弦較除之
得股弦和故加較折半得甲乙爲弦也既得甲乙而甲丙亦
可推而得矣

割圓說

周髀曰圓出於方方出於矩矩者所謂直角卽句股也蓋因方
易度而圓難測方有盡而圓無盡故古人用割圓之法內弦外
切屢求句股爲無數多邊形以切近圓界使弧線直線漸合爲
一而圓周始得是則推圓者以方推方者以矩矣劉宋祖沖之
以圓容六邊起算元趙友欽以圓容四邊起算自明末西法入
中國又有八線六宗三要等說而圓度內外諸線相求之法始

備要之圓內六邊起算者。圓徑折半。卽圓內六邊之一。乃用屢求句股法。自六邊而十二邊。自十二邊而二十四邊。自二十四邊而四十八邊。如是累至億萬邊。設徑爲一而周得三一四一五九二六五三有餘。圓內四邊起算者。則以圓徑爲內容正方形之斜弦。自乘折半。開方而得四邊之一。亦用屢求句股法。自四邊而八邊。自八邊而十六邊。自十六邊而三十二邊。如是累至億萬邊。設徑爲一而周亦得三一四一五九二六五三有餘。圓外四邊起算者。圓徑卽四邊之一。圓徑自乘。倍之開方。卽圓外正方形之斜弦。減去圓徑。卽圓外兩角之餘。又卽圓外八邊之一。以八邊之一折半爲句。半徑爲股。求得弦與半徑相減。餘卽股。

弦較又卽小同式形之句乃以八邊之一折半之句爲一率半
徑之股爲二率小同式形之句爲三率推得四率爲小同式形
之股倍之卽十六邊之一如是累至億萬邊設徑爲一而周亦
得三一四一五九二六五三有餘圓外六邊起算者圓徑爲弦
半徑爲句求得股倍之卽圓外三邊之一取其三分之一爲圓
外六邊之一以六邊之一折半爲句半徑爲股求得弦與半徑
相減餘卽股弦較又卽小同式形之句乃以六邊之一折半之
句爲一率半徑之股爲二率小同式形之句爲三率推得四率
爲小同式形之股倍之卽十二邊之一如是累至億萬邊設徑
爲一而周亦得三一四一五九二六五三有餘此兩法者或自

圓內容形之邊爲句股法使無數句股小弦逼近圓周將與圓周合而爲一或自圓外切形之邊爲句股法使無數句股小股逼近圓周亦將與圓周合而爲一二法旣立故凡圓周圍徑諸法皆可以互相比例矣割圓八線則將圓周分爲三百六十度先求弧度通弦折半爲正弦旣得正弦而圓內之正矢圓外之正切正割由之而生至於餘弦餘矢餘切餘割則又由正而得名三百六十度平分四象限每一象限九十度九十度之中得其正角爲正餘角爲餘是以正餘相對而割圓八線之表以立一象限中成句股形者五千四百故凡句股三角測量諸法皆可以互相比例矣自圓內容形屢求句股而得無數多邊自圓