



高等医药院校规划教材

医用高等数学

第 3 版

Yiyong gaodeng shuxue

● 主编 赵清波



第四军医大学出版社

医用高等数学

(第3版)

主 编 赵清波

副主编 刘 烁 吴克坚

徐清华 梁锐华

图书在版编目 (CIP) 数据

医用高等数学/赵清波主编. —3 版. —西安: 第四军医大学出版社, 2014. 9

ISBN 978 - 7 - 5662 - 0385 - 4

I. ① 医… II. ① 赵… III. ① 医用数学 - 医学院校 - 教材 IV. ① R311

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 128398 号

yiyong gaodeng shuxue

医用高等数学

出版人: 富 明 责任编辑: 杨耀锦

出版发行: 第四军医大学出版社

地址: 西安市长乐西路 17 号 邮编: 710032

电话: 029 - 84776765 传真: 029 - 84776764

网址: <http://press.fmmu.edu.cn>

制版: 新纪元文化传播

印刷: 西安力顺彩印有限责任公司

版次: 2014 年 9 月第 3 版 2014 年 9 月第 4 次印刷

开本: 787 × 1092 1/16 印张: 14 字数: 280 千字

书号: ISBN 978 - 7 - 5662 - 0385 - 4 / R · 1202

定价: 35.00 元

版权所有 侵权必究

购买本社图书, 凡有缺、倒、脱页者, 本社负责调换

内容提要

本书是根据卫生部《五年制高等医学院校教学计划》而编写的医用高等数学教材. 全书共 7 章, 内容有: 函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程、多元函数微积分、概率论及模糊数学. 本书在注重基本理论、基本计算的前提下, 在思想性和趣味性上做了尝试, 突出了数学知识的广度, 具有比较鲜明的医学教育特色, 加强了基础学科与医学学科相结合的特点, 融入了大量医学实例.

本书可作为高等医科院校相关专业的本科生教材或参考书, 也可供广大医务工作者和自学者阅读参考.

前言

自然科学的发展总要经历由定性研究到定量研究的过程,生命科学的发展亦是如此.马克思对此也早有表述:“一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步”.

为提高大学生数学素质,根据《医用高等数学教学大纲》,并结合多年的教学经验,我们编写了这本《医用高等数学》教材.本书对高等数学的内容进行了大量的优化及调整,其特点体现在:

1. **扩充知识面** 在保证理论体系完整的前提下,对一元函数微积分及微分方程做了适当压缩,扩充了多元函数微积分的内容,对概率论、模糊数学等内容作了简要介绍,以扩大学生的数学知识面.

2. **体现医学特色** 增加了大量的生物及医学方面的例题、习题以及完整的医学数学模型,突出了利用数学理论知识解决医学问题的思想,强调实用原则.

3. **增强思想性和趣味性** 通过每章的概述、附文以及数学史、数学故事、数学家简介等,阐述数学在人类文明发展史上的作用.

本书共有7章,前5章为基本内容,约需42~52学时,后2章为简介内容,约需10~14学时,可根据教学实际适当取舍,部分讲授.附文内容可作为学生的阅读材料,也可安排专题讲座,如数学史、人物传记、医学数学模型等专题.

本书在编写和出版过程中得到了第四军医大学教务处以及出版社的大力支持和帮助,在此表示衷心的感谢!

本书在编写过程中,参考了许多同类及相关的中外文书刊,在此深表感谢!

限于我们的水平,难免有疏误和不妥之处,恳请使用本教材的师生们不吝赐教,多提宝贵意见.

编者

目 录

第一章 函数与极限	1
第一节 函 数	1
一、函数的概念	1
二、初等函数	2
三、几种特殊函数	6
第二节 函数的极限	8
一、函数极限的定义	9
二、无穷小量及其性质	12
三、极限的四则运算	13
四、两个重要极限	15
五、应用等价无穷小求极限	16
第三节 函数的连续性	19
一、函数连续的概念	19
二、函数的间断点	21
三、闭区间上连续函数的性质	22
生物学、生命科学、医学中的数学	26
第二章 一元函数微分学	28
第一节 导数的概念	29
一、两个变化率问题	29
二、导数的定义	30
三、有关导数的几个问题	30
四、几个基本初等函数的导数	31
第二节 导数的运算	33
一、函数四则运算的求导法则	33
二、反函数的求导法则	34
三、复合函数的求导法则	35
四、隐函数的求导法则	36
五、初等函数的导数	37
六、高阶导数	38
第三节 函数的微分	40
一、微分的概念	40

二、微分与导数的关系	41
三、微分的几何意义	42
四、复合函数的微分法则	43
五、微分在近似计算中的应用	43
第四节 导数的应用	46
一、中值定理	46
二、洛必达法则	48
三、函数的单调性和极值	50
四、函数的凹凸性及拐点	53
五、函数图形的描绘	55
六、函数的最大值与最小值,最小二乘法	58
肿瘤生长的数学模型	63
人物传记——牛顿(1643—1727)	65
第三章 一元函数积分学	67
第一节 不定积分的概念与性质	68
一、原函数与不定积分的概念	68
二、不定积分的性质与基本公式	69
第二节 不定积分的计算	72
一、换元积分法	72
二、分部积分法	76
第三节 定积分的概念与性质	78
一、问题的提出	78
二、定积分的概念	80
三、定积分的性质	83
第四节 微积分基本公式(牛顿—莱布尼兹公式)	86
一、积分上限函数及其导数	86
二、牛顿—莱布尼兹公式	88
第五节 定积分的换元积分法和分部积分法	90
一、定积分的换元积分法	90
二、定积分的分部积分法	92
第六节 广义积分	93
一、无穷区间上的广义积分	93
二、无界函数的广义积分	95
第七节 定积分的应用	97
一、微元法(元素法)	97
二、求平面图形的面积	98
三、求旋转体的体积	100

四、变力做功的问题	102
五、定积分在医学中的应用	103
人物传记——莱布尼兹(1646—1716)	106
第四章 微分方程	108
第一节 微分方程的基本概念	109
第二节 一阶微分方程	111
一、可分离变量的微分方程	111
二、齐次方程	113
三、一阶线性微分方程	114
四、伯努利方程	117
第三节 二阶微分方程	120
一、可降阶的二阶微分方程	120
二、二阶常系数线性齐次微分方程	122
微分方程数学模型	126
人物传记——柯西	127
第五章 多元函数微积分学	129
第一节 多元函数	129
一、空间直角坐标系	129
二、多元函数的概念	131
三、二元函数的极限与连续	133
第二节 偏导数与全微分	134
一、偏导数的概念	134
二、二元函数偏导数的几何意义	135
三、多元复合函数的求导法则	136
四、高阶偏导数	136
五、全微分	137
第三节 多元函数的极值与最值	138
第四节 二重积分	140
一、引例	141
二、二重积分的定义	142
三、二重积分的性质	143
四、二重积分的计算	144
五、二重积分的应用	147
医学测量中的线性回归模型及最小二乘法	150
由悖论引起的三次数学危机	151

第六章 概率论	153
第一节 随机事件及其概率	154
一、随机试验及随机事件	154
二、事件的关系与运算	154
三、随机事件的概率	155
第二节 概率的基本公式	157
一、概率的加法公式	157
二、概率的乘法公式	158
三、全概率公式和贝叶斯公式	159
四、伯努利概型	162
第三节 随机变量及其概率分布	163
一、随机变量及其分布函数	163
二、离散型随机变量	164
三、连续型随机变量	166
第四节 随机变量的数字特征	170
一、数学期望	170
二、方差	171
三、大数定律	172
人物传记——贝叶斯(1702—1763)	173
第七章 模糊数学	175
第一节 概述	175
第二节 模糊集合的概念	176
一、模糊集合定义	177
二、模糊集的截集	179
第三节 模糊聚类分析	180
一、普通关系	181
二、模糊关系	182
三、模糊聚类分析	183
神奇的莫比乌斯带	191
习题参考答案	192
参考文献	202
附录	203
附表1 积分表	203
附表2 标准正态分布表	212
附表3 泊松分布表	213

第1章 函数与极限

Functions and Limits

数学和一些有特定研究对象的学科不同,它几乎是任何学科所不可缺少的.没有任何一门学科能像数学那样渗透到每一种学科之中.第一是它高度的抽象性.数学是以简单和谐的形式去表达事物的最深层的规律,它保留了量的关系和空间形式,而舍弃了其他一切,是对事物中共同的本质属性的把握,是数学被广泛应用的基础.第二是它的精确性,也就是逻辑的严谨性.它追求一种确定的、客观的、严密的、可靠的知识.它不仅研究外部世界,也研究自己本身.它表现在定义的完备性、推理和计算的逻辑严格性以及数学结论的确定无疑与无可争辩性.第三是应用的广泛性.“宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,日用之繁,无处不用数学.”(引华罗庚)

数学的表现形式为抽象化、符号化、公理化、最优化、模型化.数学最根本的特点是:它表达了一种对精神世界的探索魅力,数学使我们成为更深刻、更丰富、更有力量的人.

概述 函数是用数学术语来描述现实世界的主要工具.许多函数由于它们所描述的性态而具有特殊的重要性.三角函数描述循环重复的活动;指数、对数和 Logistic 函数描述了增长和衰减现象;多项式函数可用来近似这些函数或其他函数.极限的概念是微积分的理论基础,有了它,人们才能够以高于初等数学的观点和技术来研究函数,从而实现从常量数学到变量数学的飞跃.

第一节 函 数

一、函数的概念

我们在讨论问题或研究某一变化过程时,常会遇到两种不同的量:一种是可以取不同数值的量,称为**变量**(variable);另一种是保持同一数值的量,称为**常量**(constant).

在许多实际问题中,往往同时有几个变量在变化着,这几个变量相互联系、相互制约并遵循着某种变化规律.

定义 1 设 x, y 是同一变化过程中的两个变量,如果对于变量 x 所能取的每一个值,变量 y 按一定的法则总有唯一确定的值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的**函数**(function). x 称为**自变量**(independent variable), y 称为**因变量**(dependent variable). 记为

$$y = f(x).$$

如果对于 x 的某一个值 x_0 , 函数有确定的值与之对应,则称函数在 x_0 处有定义,使函数有定义的一切 x 值叫做函数的**定义域**(domain of definition). 对应的函数值的全体叫做函数的**值域**(range).

从函数的定义可知,函数的定义域和对应法则是确定函数的主要因素,当它们确定以后,函数的值域也就相应的确定了.

函数的定义域在实际中是由问题的实际意义确定的,在不考虑函数的实际意义时,其定义域是使函数的解析表达式有意义的一切实数所构成的数集.

例 1 求函数 $y = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}$ 的定义域.

解 由 $\sin x \geq 0$, 得 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

由 $16 - x^2 \geq 0$, 得 $-4 \leq x \leq 4$. 故定义域为 $[-4, -\pi]$ 和 $[0, \pi]$.

在以后的讨论中,我们还会遇到与区间有关的**邻域**(neighborhood)的概念,下面给出其定义.

定义 2 设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$, 满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的 x 的全体叫做点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$. 点 a 叫做此邻域的中心, δ 叫做此邻域的半径,用区间表示为 $(a - \delta, a + \delta)$.

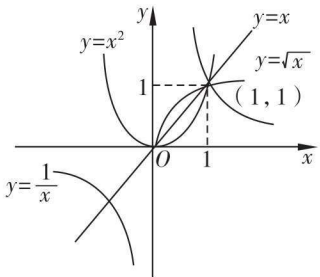
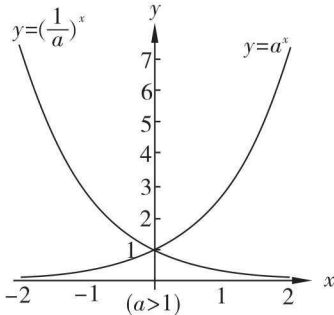
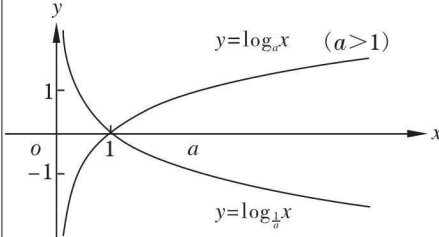
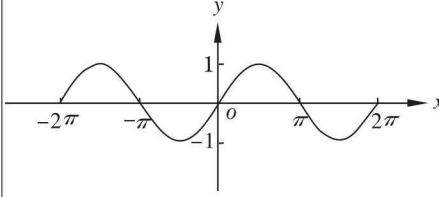
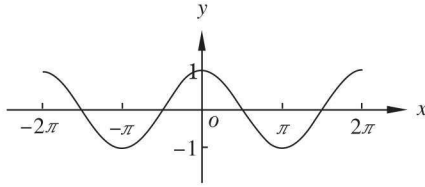
把满足不等式 $0 < |x - a| < \delta$ 的点的集合称为 a 的去心邻域,记为 $U^0(a, \delta)$.

二、初等函数

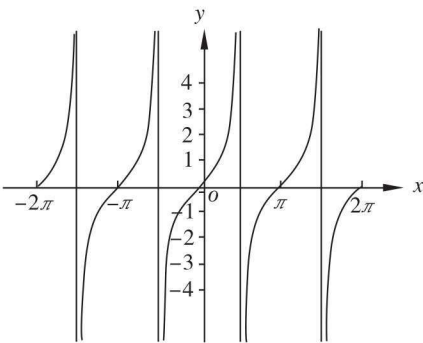
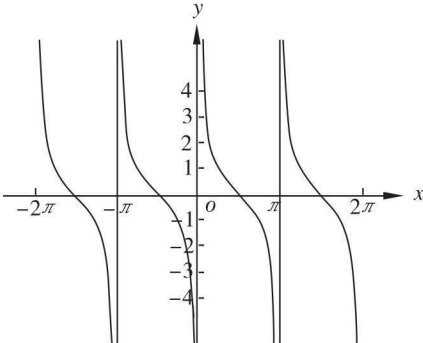
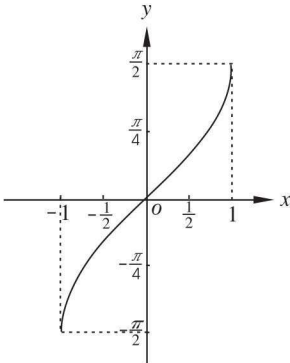
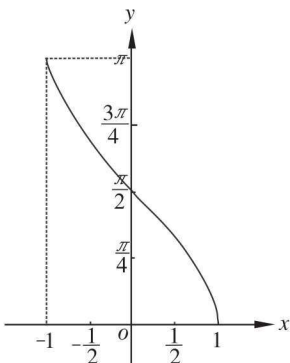
1. 基本初等函数

通常把**幂函数**(power function)、**指数函数**(exponential function)、**对数函数**(logarithmic function)、**三角函数**(trigonometric function)和**反三角函数**(inverse trigonometric function)泛称为**基本初等函数**(basic elementary function),见表 1-1.

表 1-1 基本初等函数表

名称	表达式	定义域	图形	特性
幂函数	$y = x^a$ ($a \neq 0$)	随 a 的不同, 函数的定义域不同,但 在 $(0, +\infty)$ 内都有定义		过 $(1, 1)$ 点, 在第一象限内, 当 $a > 0$ 时为增函数; 当 $a < 0$ 时为减函数
指数函数	$y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)	$(-\infty, +\infty)$		图像在 x 轴上方, 且过点 $(0, 1)$, 当 $0 < a < 1$ 时为减函数; 当 $a > 1$ 时为增函数
对数函数	$y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)	$(0, +\infty)$		图像在 y 轴右侧, 且过点 $(1, 0)$, 当 $0 < a < 1$ 时为减函数; 当 $a > 1$ 时为增函数
三角函数	正弦函数 $y = \sin x$	$(-\infty, +\infty)$		以 2π 为周期, 为奇函数, $ \sin x \leq 1$
	余弦函数 $y = \cos x$	$(-\infty, +\infty)$		以 2π 为周期, 为偶函数, $ \cos x \leq 1$

续表

名称	表达式	定义域	图形	特性
三角函数	正切函数 $y = \tan x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		以 π 为周期, 为奇函数, $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内为减函数
	余切函数 $y = \cot x$	$x \neq k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)		以 π 为周期, 为奇函数, $(0, \pi)$ 内为减函数
反三角函数	反正弦函数 $y = \arcsin x$	$[-1, 1]$		单调增加, 奇函数, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
	反余弦函数 $y = \arccos x$	$[-1, 1]$		单调减少, 值域为 $[0, \pi]$

续表

名称	表达式	定义域	图形	特性
反三角函数	反正切函数 $y = \arctan x$	$(-\infty, +\infty)$		单调增加, 奇函数, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
	反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$	$(-\infty, \infty)$		单调减少, 值域为 $(0, \pi)$

2. 函数的有界性

函数有几种特性: 奇偶性、单调性、周期性、有界性. 前三种特性高中已经学过, 下面简单介绍函数有界性的概念.

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 如果存在一个正整数 M , 使对所有的 $x \in (a, b)$, 恒有 $|f(x)| \leq M$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是有界的; 如果不存在这样的正数 M , 则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内是无界的.

例如, $\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的; $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内是有界的, 但在 $(0, 1)$ 内是无界的. 因此一个函数有界还是无界, 必须指明所考虑的区间.

3. 复合函数

定义 3 设变量 y 是变量 u 的函数, 变量 u 又是变量 x 的函数, 即

$$y = f(u), u = \varphi(x).$$

且 $\varphi(x)$ 的值域全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内, 则称 y 是 x 的复合函数 (compound function), 记为

$$y = f[\varphi(x)]$$

变量 u 称为中间变量. 复合函数的概念可以推广到多个函数构成情况, 此时函数是通过多个中间变量的传递而形成.

例 2 求由 $y = e^u$, $u = v + \sin v$, $v = 1 - 2x$ 构成的复合函数.

解 u 是 y 的中间变量, v 是 u 的中间变量, 依次代入可得 $y = e^{1-2x+\sin(1-2x)}$.

如果由两个函数复合而成的函数的定义域为空集, 则此复合函数无意义 (或称他们不能复合). 例如, 由 $y = \arcsin u$, $u = 2 + x^2$ 复合而成的函数 $y = \arcsin(2 + x^2)$ 是无意

义的.

4. 初等函数

定义 4 由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限的函数复合步骤所构成的并可用一个解析式表达的函数,称为初等函数.例如: $y = \ln(1+x^2)$, $y = \sqrt{ax+1}$, $y = x \tan x + \sin(1-e^x)$ 等都是初等函数.微积分主要是以初等函数为研究对象.

三、几种特殊函数

1. 取整函数

设 x 为任意实数, y 为不超过 x 的最大整数,记为

$$y = [x].$$

如图 1-1.

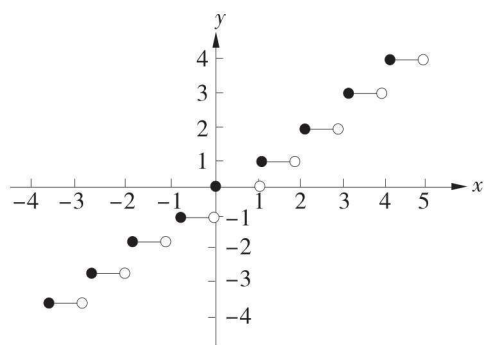


图 1-1

例如, $[\pi] = 3$, $[\frac{1}{3}] = 0$, $[-\frac{2}{5}] = -1$.

2. 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

如图 1-2.

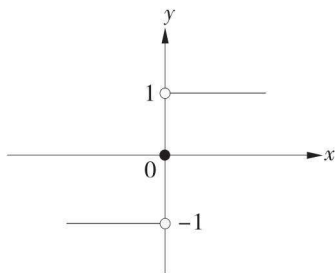


图 1-2

3. Logistic 函数

$$y = \frac{A}{1 + Be^{-rt}},$$

其中 A, B, r 是常数, 如图 1-3.

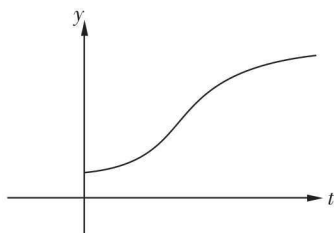


图 1-3

Logistic 函数是一种常见的 S 形函数, 该函数在生物、医药学中应用非常广泛. 函数图形的特点是, 开始增长缓慢, 而在以后的某一范围内迅速增长, 达到某限度后, 增长又缓慢下来.

如果问题的基本数量特征是: 在开始的某一时段内, 呈指数型增长, 而当时间 t 增大到一定程度时, 增长速度下降, 且越来越接近于一个确定的值, 这类问题就可以用 Logistic 函数加以解决, 如人口预测、疾病传播、细菌的繁殖等, 其他领域如销售预测、产量增长等.

例 3 根据历年人口普查数据(表 1-2), 我们可用该函数描述人口的增长趋势并进行预测.

表 1-2 1949—1990 年中国人口数

t (年份)	实际数(百万)	预测数(百万)	误差(%)
0 (1949)	549	547	0
4 (1953)	602	602	0
8 (1957)	657	657	0
29 (1978)	975	958	1.74
33 (1982)	1031	1041	1.65
41 (1990)	1134	1118	1.41

$$N(t) = \frac{1628}{1 + 1.965e^{-0.03563t}}$$

由此可算出 2000 年中国人口为 12.44 亿. (2000 年人口普查数为 12.65 亿).

4. 分段函数

在实际问题中, 有时需要对一个函数在自变量的不同范围内用不同的解析式表示, 这样的函数称为**分段函数**(piecewise function).

例 4 设某药物的每天剂量为 y (单位: mg), 对于 16 岁以上的成年人用药剂量是一常数, 设为 2mg, 而对于 16 岁以下的未成年人, 每天的用药剂量 y 与年龄 x 成正比, 比例

常数为 0.125mg/岁 . 其函数关系为

$$y = \begin{cases} 0.125x, & 0 < x < 16 \\ 2, & x \geq 16 \end{cases}$$

这里要注意的是,分段函数是一个函数,而不是几个函数,分段函数一般不属于初等函数.

习题 1-1

1. 用区间表示下列不等式.

$$(1) 2 \leq x < 6; \quad (2) x < -1; \quad (3) x \geq 0; \quad (4) |x-4| \leq 4.$$

2. 求下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{1}{x-1}; \quad (2) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right);$$

$$(3) y = \tan(x+1); \quad (4) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2};$$

$$(5) y = \left(\arcsin \frac{x-1}{5}\right) + \sqrt{25-x^2}; \quad (6) y = \arcsin\left[\lg \frac{x-1}{x-10}\right].$$

$$3. \text{ 设 } \varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3} \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{ 求 } \varphi\left(\frac{\pi}{6}\right), \varphi(-2), \text{ 并作出 } y = \varphi(x) \text{ 的图形.}$$

4. 下列函数是不是复合函数? 如果是, 指出是由哪些简单的函数复合而成.

$$(1) y = e^{x^2+1}; \quad (2) y = \sqrt{\sin^3(x+2)};$$

$$(3) y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}; \quad (4) y = \cos \ln \sqrt[3]{3x^2+2};$$

$$(5) y = e^{\arcsin 3x}; \quad (6) y = \lg[\tan(x^2 + \arcsin x)].$$

5. 已知 $f(e^x+1) = e^{2x} + e^x + 1$, 求 $f(x)$ 的表达式.

6. 已知 $f\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right) = \tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 3, x \neq \frac{k\pi}{2} (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 求 $f(x)$

的表达式.

7. 某药物的每天剂量 y (单位: 克) 与使用者的年龄 x (岁数) 之间有关系:

$$y = \begin{cases} 0.125x, & 0 < x < 16 \\ 2, & x \geq 16 \end{cases}, \text{ 求 3 岁、10 岁、19 岁患者每天所用剂量.}$$

第二节 函数的极限

对函数 $y = f(x)$, 当自变量按一定趋势变化时, 函数的变化趋势如何, 这就是函数的极限概念所要描述和解答的问题. 在给出定义前, 我们先来看一个例子.