新世纪高等学校公共课重点建设教材

微积分

CALCULUS

（下）

王海敏　主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

微积分（下）

王海敏 主编

浙江工商大学出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下 / 王海敏主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-5178-1237-1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 192703 号

微积分(下)

王海敏 主编

责任编辑	吴岳婷　刘　韵
封面设计	鲍　涵
责任印制	包建辉
出版发行	浙江工商大学出版社 (杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012) (E-mail:zjgsupress@163.com) (网址:http://www.zjgsupress.com) 电话:0571-88904980,88831806(传真)
排　　版	杭州朝曦图文设计有限公司
印　　刷	杭州五象印务有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	13.25
字　　数	274 千
版 印 次	2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5178-1237-1
定　　价	30.00 元

前　　言

微积分是经济类和管理类专业本科生的一门数学基础课程。通过这门课的学习，不仅能为今后学习各类后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的连续量、离散量和随机变量方面的数学基础，还能得到抽象思维和逻辑思维能力的培养。

本教材是在多年教学实践基础上按照经济管理类本科数学基础课程教学的基本内容和要求来编写的。全书共分8章，分别介绍了一元函数微积分及其应用、多元函数微积分及其应用、无穷级数、常微分方程与差分方程初步等方面的基本概念、基本理论和基本方法。

在内容编写上，我们试图将严谨的理论推导和扎实的技巧训练结合在一起，并在使这两者之间达成合理的均衡方面做了些尝试。作为演绎学科论述微积分时，我们不忽视它对实际问题的应用。记住这样一点是十分重要的：微积分根深于实际问题，而且正是从种种应用中显示出它的力与美。在阐述每个重要的新概念之前，我们都会追溯由早期的直观概念到精确的数学描述的发展过程。这就把那些前人的努力和在本学科上最有贡献的人所取得的成就一一介绍给了读者。因此，读者在概念的发展中成了主动参与者，而不仅仅是结论的被动旁观者。我们对很多重要定理的证明常常以几何的或直观的讨论为前导，以使读者领会这些证明为什么要采取特定的形式。虽然这样的直观讨论已能满足那些对详细证明不感兴趣的读者，但对那些要求更严密表达方式的读者，我们也给出了完全的证明。

本教材的大纲和体系由集体讨论而定。第1、7章由袁中扬执笔，第2、4、5、8章由王海敏执笔，第3、6章由韩兆秀执笔，全书由王海敏统稿定稿。

本教材编写过程中参考了大量的国内外教材；浙江工商大学出版社对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是吴岳婷、刘韵老师在本书的编辑和出版过程中付出

了大量心血;浙江工商大学统计与数学学院自始至终对本书的出版给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中一定存在不妥之处,恳请专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2015年6月于浙江工商大学

目　录
Contents

第 5 章　定积分及其应用

两千年前，当希腊人试图用他们所说的穷竭法确定面积时，诞生了积分学. 这个方法的基本思想十分简单，可简要地叙述为：给定一个要确定面积的区域，在这个区域内接一个多边形，使多边形区域近似于这个给定的区域，并且容易计算其面积. 然后，选择另一个给出更好近似的多边形区域，并且继续这个过程. 同时将多边形的边取得愈来愈多，试图穷尽这个给定的区域. 这种方法可以用图 5-1 中的半圆形区域来说明，它被阿基米德(Archimedes，前 287—前 212)成功地用来求圆以及其他几个特殊图形面积的精确公式.

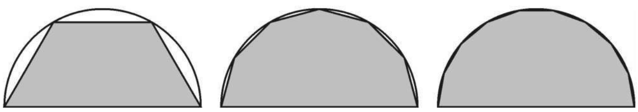

图 5-1　应用于半圆形区域的穷竭法

在阿基米德给出穷竭法之后，几乎停顿了 18 个世纪，直到代数符号和技巧的使用成为数学的标准部分时，才使穷竭法得到了发展. 穷竭法被逐渐地转移到现在称为积分学的课题上. 这是一种有着大量应用的新的强有力的学科. 这种应用不仅与面积和体积的几何问题有关，而且与其他学科中的问题有关. 保留穷竭法的若干原始特征的这个数学分支，在 17 世纪获得了最大进展，这主要归功于牛顿(Newton，1642—1727)和莱布尼茨(Leibniz，1646—1716)的努力，而且它的发展一直延续到 19 世纪，直到柯西(Cauchy，1789—1857)、黎曼(Riemann，1826—1866)等人奠定了它稳固的数学基础. 这一理论在现代数学中仍在获得进一步改进和扩展.

本章先从几何与运动问题出发引进定积分的定义，然后讨论它的性质、计算方法及应用.

第 1 节　定积分的概念与性质

一、定积分问题举例

1. 曲边梯形的面积

在初等数学中，我们会计算三角形的面积，由此可以将多边形的面积用若干个三角

形的面积和(图 5-2)来计算它.但我们不会计算一个由曲线围成的平面图形(图5-3)的面积.

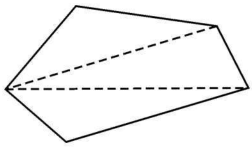

图 5-2

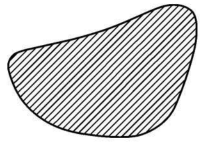

图 5-3

从几何直观上来看,由曲线围成的图形的面积,往往可以化为两个曲边梯形的面积的差.所谓**曲边梯形**,是指这样的图形:它有三条边是直线段,其中两条互相平行,第三条与前两条垂直,叫作底边,第四条是一条曲线段,叫作**曲边**,任意一条垂直于底边的直线与这条曲边至多只交于一点.例如,图 5-4 中由曲线围成的图形的面积 S 可以化为曲边梯形的面积 S_1 和 S_2 的差,即 $S = S_1 - S_2$.

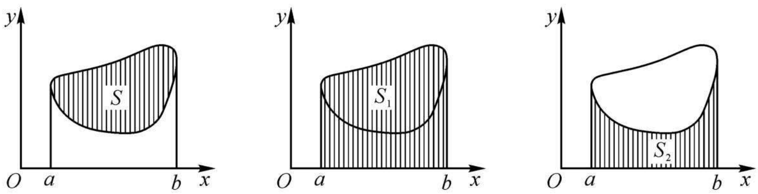

图 5-4

那么,如何计算曲边梯形的面积呢?退一步,先求近似值.例如,将曲边梯形分成一个个小的曲边梯形,而每一个小曲边梯形都可以近似看作一个小矩形(图 5-5),而曲边梯形的面积也就近似地看作若干个小矩形的面积之和.换句话说,这些小矩形的面积和就是所要求的曲边梯形面积的近似值.可以想象,如果分割得越多,近似程度就越高.这种方法就是阿基米德用过的穷竭法.

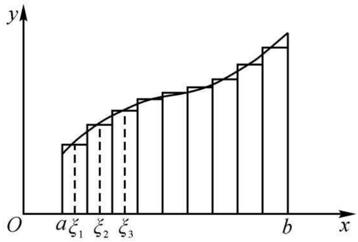

图 5-5

下面我们来讨论如何定义曲边梯形的面积以及它的计算法.

设曲边梯形是由连续曲线 $y = f(x)$($f(x) \geqslant 0$),x 轴与两条直线 $x = a$,$x = b$ 所围成的(图 5-6).

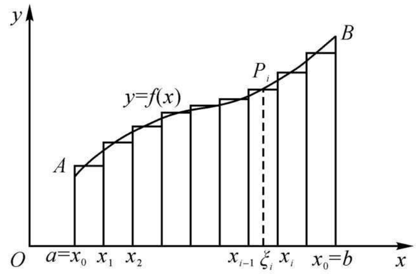

图 5-6

(1)**划分**　在区间 $[a, b]$ 中任意插入若干个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

它们的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

过每个分点 $x_i(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ 作 x 轴的垂线,把曲边梯形 $AabB$ 分成 n 个小曲边梯形.用 A 表示曲边梯形 $AabB$ 的面积,ΔA_i 表示第 i 个小曲边梯形的面积,则有

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots + \Delta A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i.$$

(2)**近似**　在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i](i = 1, 2, \cdots, n)$ 内任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$,过点 ξ_i 作 x 轴的垂线与曲边交点 $P_i(\xi_i, f(\xi_i))$,以 Δx_i 为底、$f(\xi_i)$ 为高作矩形,取这个矩形的面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 作为 ΔA_i 的近似值,即

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i(i = 1, 2, \cdots, n).$$

(3)**求和**　将这样得到的 n 个小矩形的面积之和作为所求曲边梯形 A 的近似值,即

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

(4)**逼近**　为了把区间 $[a, b]$ 无限细分,我们要求小区间长度中的最大值趋于零,如记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$,则上述条件可表为 $\lambda \to 0$. 当 $\lambda \to 0$ 时,上述和式的极限就定义为曲边梯形的面积,即

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2. 变速直线运动的路程

设某物体作直线运动,已知速度 $v = v(t)$ 是时间间隔 $[T_1, T_2]$ 上 t 的一个连续函数,且 $v(t) \geqslant 0$,要计算在这段时间内物体所经过的路程.

我们知道,对于等速直线运动,有公式:路程=速度×时间.但是,在变速直线运动问

题中,速度不是常量而是随时间变化的变量,因此,所求路程 s 不能直接按等速直线运动的路程公式来计算.物体运动的速度 $v=v(t)$ 是连续变化的,在很短一段时间内,速度的变化很小,近似于等速,并且当时间间隔无限缩短时,速度的变化也无限减小.因此,如果把时间间隔分小,在小段时间内,以等速运动代替变速运动,那么,就可算出部分路程的近似值;再求和,得到整个路程的近似值;最后,通过对时间间隔无限细分的极限过程,就可以求得变速直线运动的路程的精确值.

具体计算步骤如下:

(1)**划分** 在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内任意插入若干个分点

$$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=T_2,$$

把 $[T_1, T_2]$ 分成 n 个小段

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \cdots, [t_{n-1}, t_n],$$

各小段时间的长依次为

$$\Delta t_1=t_1-t_0, \Delta t_2=t_2-t_1, \cdots, \Delta t_n=t_n-t_{n-1}.$$

相应地,在各段时间内物体经过的路程依次为

$$\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n.$$

(2)**近似** 在时间间隔 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任取一个时刻 $\tau_i(t_{i-1}\leqslant\tau_i\leqslant t_i)$,以 τ_i 时的速度 $v(\tau_i)$ 来代替 $[t_{i-1}, t_i]$ 上各个时刻的速度,得到部分路程 Δs_i 的近似值,即

$$\Delta s_i\approx v(\tau_i)\Delta t_i(i=1, 2, \cdots, n).$$

(3)**求和** 将这样得到的 n 段部分路程的近似值之和作为所求变速直线运动的路程 s 的近似值,即

$$s\approx v(\tau_1)\Delta t_1+v(\tau_2)\Delta t_2+\cdots+v(\tau_n)\Delta t_n=\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i.$$

(4)**逼近** 记 $\lambda=\max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n\}$,当 $\lambda\to 0$ 时,取上述和式的极限,即得变速直线运动的路程

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}v(\tau_i)\Delta t_i.$$

二、定积分定义

从上面两个例子可以看到,虽然它们的实际背景不同,但最后都归结为具有相同结构的一种特定和的极限.因此,有必要对这一问题在抽象的形式下进行研究.这样就引出了定积分的概念.

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的函数,用分点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

把 $[a, b]$ 分成 n 个小区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n],$$

各个小区间的长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \cdots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，作和式

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，若当 $\lambda \to 0$ 时，和式极限存在，且此极限值不依赖于 ξ_i 的选择，也不依赖于对 $[a, b]$ 的分法，就称此极限值为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**定积分**(简称**积分**)，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $f(x)$ 叫作**被积函数**，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫作**被积表达式**，x 叫作**积分变量**，a 叫作**积分下限**，b 叫作**积分上限**，$[a, b]$ 叫作**积分区间**.

和式 σ 称为 $f(x)$ 的**积分和数**，因为在历史上是黎曼首先在一般形式给出这一定义，所以也称为**黎曼和数**. 在上述意义下的定积分，也叫**黎曼积分**.

如果 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的定积分存在，我们就说 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上**可积**(**黎曼可积**).

注意　(1)如果积分和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 的极限存在，则此极限值是个常数，它只与被积函数 $f(x)$ 以及积分区间 $[a, b]$ 有关. 积分变量在积分的定义中不起本质的作用，如果把积分变量 x 改写成其他字母，例如 t 或 u，这时和的极限不变，也就是定积分的值不变，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

所以，也就说定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量用什么符号表示无关.

(2)从定义可以得出以下的推断：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必定有界. 这是因为若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上无界，则这个函数至少会在其中某个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上无界. 因此，可在其上选取一点 ξ_i，而使 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 大于预先给定的数，随之可使和数 σ 也如此，从而和式 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 就不可能有有限的极限. 这就是说，在上述的黎曼积分意义下，无界函数一定不可积. 在本章第 4 节中，我们将讨论无界函数的积分，在那里，积分是“反常”的黎曼积分.

什么样的函数才可积呢？在通常的微积分中，我们往往只考察连续函数的可积性. 其实，黎曼积分就其本质来说，是对连续函数而言的. 可以证明，黎曼可积的充要条件是函数有界并且它的不连续点不能“太多”. 这个问题我们不作深入讨论，而只给出以下两

个充分条件.

定理 1 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

定理 2 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点(这种函数称为**分段连续函数**),则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

利用定积分的定义,前面所讨论的两个实际问题可以分别表述如下:

曲边 $y = f(x)(f(x) \geqslant 0)$,$x$ 轴及两条直线 $x = a$,$x = b$ 所围成的曲边梯形的面积 A 等于函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的定积分,即

$$A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

物体以变速 $v = v(t)(v(t) \geqslant 0)$ 作直线运动,从时刻 $t = T_1$ 到时刻 $t = T_2$,这物体经过的路程 s 等于函数 $v(t)$ 在区间 $[T_1, T_2]$ 上的定积分,即

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\mathrm{d}t.$$

下面我们再来看一下定积分的几何意义.

在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$ 时,定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $f(x)$,两条直线 $x = a$,$x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积;在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leqslant 0$ 时,由曲线 $f(x)$,两条直线 $x = a$,$x = b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形位于 x 轴下方,定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示上述曲边梯形面积的负值;在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 既取得正值又取得负值时,函数 $f(x)$ 的图形某些部分在 x 轴上方,而其他部分在 x 轴下方(图 5-7).定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 x 轴上方图形面积之和减去 x 轴下方图形面积之和.

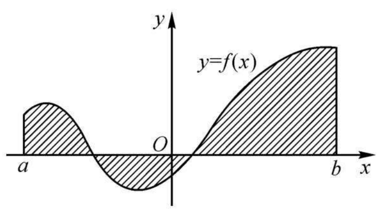

图 5-7

三、定积分的性质

为了以后计算及应用方便起见,对定积分作以下两点补充规定:

(1)当 $a > b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

迄今，当使用符号 $\int_a^b$ 时，是认为下限 a 小于上限 b 的. 稍微扩展思想：考虑下限大于上限的积分是方便的. 于是就有了上面的规定. 由上式可知，交换定积分的上下限时，定积分的绝对值不变而符号相反.

(2) $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

在规定(1)中令 $a = b$ 就可得到(2)这个结果.

下面讨论定积分的性质. 定积分各性质中积分上下限的大小，如不特别指明，均不加限制，并假定各性质中所列出的定积分都是存在的.

性质 1　$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证　函数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ 在积分区间 $[a,\ b]$ 上的积分和数为

$$\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)]\Delta x_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

根据极限运算的性质，有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\xi_i) + \beta g(\xi_i)]\Delta x_i = \alpha\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i,$$

即

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

这一性质表明，定积分关于被积函数具有线性性质. 利用数学归纳法，线性性质能推广到有限多个函数的代数和的情形.

性质 2　设 $a < c < b$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

证　因为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上可积，所以不论把 $[a,\ b]$ 怎样分，积分和的极限总是不变的. 因此，我们在划分区间时，可以使 c 永远是个分点. 于是，$f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的积分和数等于 $[a,\ c]$ 上的积分和数加 $[c,\ b]$ 上的积分和数，记为

$$\sum_{[a,\ b]} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{[a,\ c]}{}' f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{[c,\ b]}{}'' f(\xi_i)\Delta x_i.$$

令 $\lambda \to 0$，上式两端同时取极限就得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个性质表明定积分对于积分区间具有可加性.

按定积分的补充规定，不论 a, b, c 的相对位置如何，总有等式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

成立. 例如，当 $a < b < c$ 时，由于

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x,$$

于是得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质 3 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \equiv 1$，则 $\int_a^b 1\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

证 $\int_a^b \mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \lim\limits_{\lambda\to 0}(b-a) = b - a$.

性质 4 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geqslant 0$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.

证 因为 $f(x) \geqslant 0$，所以

$$f(\xi_i) \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n).$$

又由于 $\Delta x_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，因此

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0,$$

令 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\} \to 0$，由极限保号性就得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

推论 1 如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \leqslant g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

证 因为 $g(x) - f(x) \geqslant 0$，由性质 4 得

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

再利用性质 1,便得要证的不等式.

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x (a < b)$.

证 因为

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

所以由推论 1 及性质 1 可得

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

推论 3 设 M 及 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值及最小值,则

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

证　因为 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，所以由性质 4 推论 1，得

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x.$$

再由性质 1 及性质 3，即得所要证的不等式.

这个推论说明，由被积函数在积分区间上的最大值与最小值可以估计积分值的大致范围. 例如定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，它的被积函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在积分区间 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$ 上是单调递增的，于是有最小值 $m=f(0)=1$，最大值 $M=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 由性质 4 推论 3，得

$$1\times\left(\frac{1}{2}-0\right) \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}-0\right),$$

即

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

性质 5(定积分中值定理)　如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,\ b]$ 上连续，则在 $[a,\ b]$ 上至少存在一点 ξ，使下式成立：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b).$$

这个公式叫作**积分中值公式**.

证　因为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上必能取到最小值 m 与最大值 M. 因此，当 $x\in[a,\ b]$ 时，有

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

利用性质 4 推论 3，有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

即

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} \leqslant M.$$

这表明，确定的数值 $\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$ 介于函数 $f(x)$ 的最小值 m 与最大值 M 之间. 根据闭区间连续函数的介值定理，在 $[a,\ b]$ 上至少存在着一点 ξ，使得有

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi),$$

两端各乘以 $b-a$，就得到所要证的等式.

积分中值公式的几何解释是:在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得以区间 $[a, b]$ 为底边，以曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积等于同一底边而高为 $f(\xi)$ 的一个矩形的面积(图 5-8).

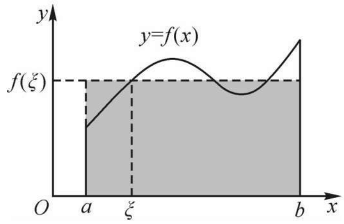

图 5-8

通常称 $\dfrac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的**平均值**，它是有限个数的平均值概念的拓广.

在科学工作中经常需要在相似条件下作若干次测量，然后计算平均值或中数，以便概括描述数据.有许多实用的平均值形式，最普通的是算术平均.如果 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个实数，它们的算术平均 $\bar{a}$ 由公式

$$\bar{a}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$$

定义.如果数 a_i 是函数 $f(x)$ 在 n 个不同点处的值，比方说 $a_i=f(x_i)$，那么

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$$

是函数值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)$ 的算术平均.可以推广这一概念，以便不仅能计算 $f(x)$ 有限个值的平均值，而且能计算 $f(x)$ 当 x 取遍一个区间的所有值的平均值.

我们把区间 $[a, b]$ n 等分，分点是

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

每个子区间的长度为 $\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$，每一个分点 x_i 上的函数值是 $f(x_i)(i=1,2,\cdots,n)$，则对应的 n 个函数值 $y_i=f(x_i)$ 的算术平均值为

$$\bar{y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}.$$

显然，随着分点增密，$\bar{y}_n$ 就表示函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上更多个点处函数值的平均值.令 $n\to\infty$，那么 $\bar{y}_n$ 的极限值自然就定义为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的平均值 $\bar{y}$，即