極大極小問題

王邦珍編

學藝叢書

13

中華學藝社出版

極大極小問題

王 邦 珍 編

編輯大意

1. 本書以日本林鶴一博士所著之初等幾何學極大極小問題爲根據,並參他書,略有增減.

2. 本書比原書略去緒論一章.因此章純爲理論,似非十分必要.

3. 本書一題只示一種解法,以簡明淺現爲主,不附別解,以省篇幅.

4. 本書所集問題約三百五十零題,分爲十三章.前十二章爲平面部,最後一章爲立體部.

5. 極大極小問題欲深究之,須藉微積學.惟是本書程度囿於初等,不敢涉入高深數理,以便中等學生參考之用.

6. 本書成於短時間,錯誤之處,自知不免,閱者諸君,幸賜教焉.

目　錄

第一章　線分……1
第二章　線分之和差……34
第三章　線分之比……83
第四章　角……90
第五章　矩形面積.線分乘積……104
第六章　三角形之面積……121
第七章　三角形之周圍……150
第八章　四邊形之面積.三角形之和差……161
第九章　平方之和差.矩形之和差……185
第十章　四邊形之周圍……198
第十一章　多邊形之面積及周圍……202
第十二章　圓與平面形之面積及周圍……213
第十三章　屬於立體幾何學問題……219

極大極小問題

第一章　線分

1.　過定圓內定點引弦,求其極大或極小.

解　P 爲定點,O 爲定圓中心,作 PO 直徑交圓周於 A, B, 過 P 引 AB 垂直弦 CD, 則 AB 爲所求之極大弦,CD 爲極小弦.

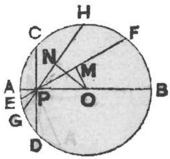

圖　1.

AB 與 O 之距爲零,故爲極大弦.

次過 O 任引數弦 EF, GH, 由 O 引 OM, ON 垂直之.

OP 爲直角 $\triangle OMP, ONP$ 之弦.

$$\therefore \qquad OP > OM,\ \ OP > ON.$$

故 CD 弦爲過 P 諸弦中距 O 最遠者,故爲極小弦.

2.　由定線上一點引定圓切線,求其極小者.

解　由定線上一點 P 至定圓 O 引切線 PT, 則

$$PT^2 = PO^2 - OT^2$$

然 OT 爲定圓半徑有定長，故 PT 極小必 PO 極小。

由 O 至定線上所引諸線分中以垂線爲極小.

故由圓心 O 至定線引垂線其足爲 P，由 P 引定圓切線卽所求之極小切線.

3. 由定點至定圓周引直線，求其極大，極小。

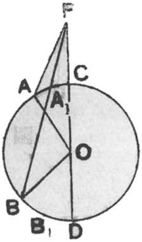

圖 2.

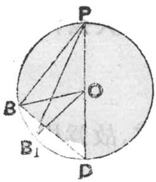

圖 3.

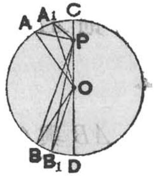

圖 4.

解 P 爲定點，O 爲定圓中心，結 PO 交圓周於 C, D，則 PC 爲極小線，PD 爲極大線.

在圓周上除 C, D 外任取 A, B 各點，卽

$$-OA+OP<PA,\quad PO+OB>PB.$$

卽 $$-OC+OP<PA,\quad PO+OD>PB.$$

即　　$PC<PA$,　　$PD>PB$.

故 PC 爲極小, PD 爲極大.

在 C, A 間任取 A_1 點, B, D 間任取 B_1 點,則 $\triangle AOP$, BOP 與 $\triangle A_1OP$, B_1OP 有二邊互相等,而夾角

$$A\hat{O}P>A_1\hat{O}P,\quad B\hat{O}P<B_1\hat{O}P.$$

$\therefore$　　$PA>PA_1$,　　$PB<PB_1$.

4. 由定圓周上一定點引諸弦中,求其最大者.

5. 求定圓內之極大弦.

6. 不相會二定圓周上各取一點聯直線,求此諸線中之極大或極小.

解 茲以一圓全在他圓之外爲例,則一圓全在之內不難推知.

二定圓之中心爲 O,O',其聯心線交圓周於 A,B,則 AB 爲極小線.

PQ 爲二圓間任一線分則

$$OP+PQ+QO'>OO'.$$

即　　$OP+PQ+QO'>OA+AB+BO'$

$\therefore \qquad PQ > AB.$

又 OO' 延長之交圓周於 C, D,則 CD 爲極大線

RS 爲二圓間任一線分則

$$RS < RO + OO' + O'S,$$

卽 $\qquad RS < CO + OO' + C'D,$

$\therefore \qquad RS < CD.$

7. 相切二定圓周間作直線求其極大者.

8. 相會二定圓周間作直線求其極大者.

9. 由一定圓周上各點至他定圓引切線,求其極大或極小.

10. 不相交二圓周間引定向直線,求其極大或極小.

解 O, O' 爲定圓,其半徑爲 r, r'.

I. 設 O' 圓比 O 圓大且 O 圓在 O' 圓之內.

設小圓 O 引定向二切線 AA', BB', 交大圓 O' 於 A, A', B, B',過中心 O 亦引定向直線 LL'. 次以 O' 爲心以 $r+r'$, $r'-r$ 爲半徑作二圓周,交 LL' 於 O_1, O_2, O_1', O_2' 四點. 以 O_1, O_2 爲心,r 爲半徑規圓,此圓必內切或外切於 O' 圓,過其切

點 P_1, P_2，引定向直線交 O 圓於 Q_1，Q_2. 則 P_1Q_1 爲所求之極小線，P_2Q_2 爲所求之極大線.

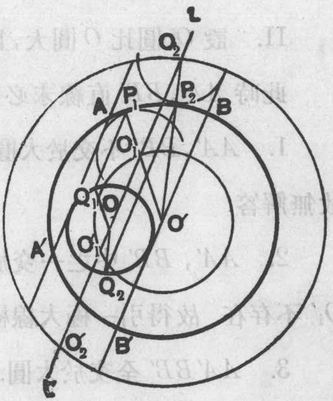

圖 5.

在弧 AB 上任取一點 P. 過 P 引定向直線交圓 O, O_1, O_2 於 Q_1', Q_2', P_1', P_2'. 因圓 O_1 內切於 O' 圓，故 P_1' 在 O' 圓內；圓 O_2 外切於 O' 圓，故 P_2' 在 O' 圓外.

$\therefore \quad PQ_1' > P_1'Q_1', \quad PQ_2' < P_2'Q_2'.$

但 $\quad P_1'Q_1' = O_1O = P_1Q_1, \quad P_2'Q_2' = O_2O = P_2Q_2.$

$\therefore \quad PQ_1' > P_1Q_1, \quad PQ_2' < P_2Q_2.$

同樣，以 O_1'，O_2' 爲心，r 爲半徑規圓，亦可得一對之極小線，極大線.

又 P_1Q_1 與 $O'O$ 之交點乃外分 $O'O$ 爲比 $r':r$ 之分點，即二圓之相似外心. P_2Q_2 與 $O'O$ 之交點爲二圓之相似內心.

故過二定圓之相似中心，引定向直線，其夾兩周間之線分，即所求之直線.

II. 設 O' 圓比 O 圓大，且 O 圓全在 O' 圓之外.

此時 AA'，BB' 直線未必交 O' 圓，故分次之三種：

1. AA'，BB' 不交於大圓. 此時 O_1，O_2，O_1'，O_2' 不存在. 故無解答.

2. AA'，BB' 中之一交於大圓. 此時 O_2，O_2' 存在，O_1，O_1' 不存在. 故得引一極大線極小線.

3. $AA'BB'$ 全交於大圓. 此時與 I 同.

III. 兩圓相等，且一圓全在他圓之外.

1. AA'，BB' 不交 O' 圓. 此時無解答.

2. AA'，BB' 之一交 O' 圓，則與 II 之 2 同.

3. AA'，BB' 爲二圓之公切線. 此時聯心線在兩周間之部分卽所求之極小線. 聯心線延線在兩周間之部分卽所求之極大線.

11. 四邊形一邊有定長有定位，相鄰二邊有定長，對邊有定向，求此邊之極大或極小.

12. 過相交二定圓交點之一引二重弦中，求其極大者.

解 引任意二重弦 PAQ，又引 $OM, O'N \perp PQ, O'B \parallel PQ$.

則

$$O'B = MN = \tfrac{1}{2}PQ$$

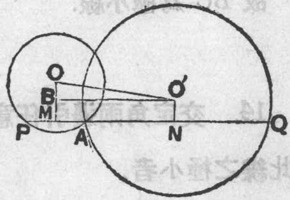

圖 6.

故 $O'B$ 極大時 PQ 亦極大,而 $O'B$ 除與 OO' 相合外常小 OO',故 $O'B$ 與 OO' 合時爲極大.

故 PQ 平行 OO' 時爲極大.

13. 過定角二等分線上定點引極小直線.

解 BAC 爲定角, P 爲二等分線 AP 上定點, 過 P 引 AP 之垂線 BC,則 BC 爲極小線.

何則: 過 P 引他直線 DE 則 PD, PE 不相等,於 PD 上截 PG 等 PE,則 $\triangle PCE \equiv PBG$

∴ $\triangle ABC < ADE$

引 $AF \perp DE$

則 $AP \cdot BC < AF \cdot DE$

然 $AP > AF$

∴ $BC < DE$

故 BC 爲極小線.

14. 交定角兩邊引任意直線其所成三角形面積有定值,求此線之極小者.

解 $\triangle ABC$ 等所設面積,引

$$BD \perp AC$$

則 $BC^2 = AB^2 + AC^2 \mp 2AC \cdot AD$

$$= AB^2 + AC^2 \mp 2AB \cdot AC \cdot \frac{AD}{AB}$$

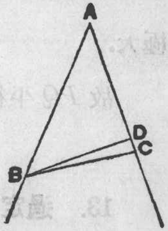

圖 7.

$\triangle ABC$ 角 A 有定大,面積有定值,故 $AD:AB$ 爲定比,$AB \cdot AC$ 爲定值.

故 $AB^2 + AC^2$ 極小時 BC 亦極小.

然 $AB^2 + AC^2 = 2AB \cdot AC + (AB \sim AC)^2$

故必 $AB \sim AC$ 極小,BC 方極小,卽 AB 等 AC 時,BC 爲極小.

15. 以最短直線平分所設三角形.

解 ABC 爲所設三角形,D 爲 AC 中點.

則 $\triangle ABD = \frac{1}{2} ABC =$ 定值

故由前問得求極小線 EF.

惟是 $\triangle ABD = AEF$

$\therefore\ AB \cdot AD = AE \cdot AF = AE^2$.

故 AE 比 AB, AD 中之小者大.

故 AB 若小 AD 則 E 在 AB 延線上,卽 AB 若小於 AC 之半則 $\triangle AEF$ 有一部分在 $\triangle ABC$ 外.

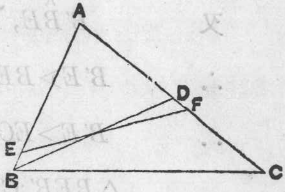

圖 8.

又 A, B, C 三角中小角之極小線小於大角之極小線.

故求本問之最短線應以下列各條件爲標準:

I. 角以小爲要.

II. 夾邊中小者應大於大者之半.

16. 以最短直線分所設三角形爲與比.

17. 有所設之高及頂角三角形中求底邊之極小.

解 A 爲頂角;以 A 爲心,所設之高爲半徑畫弧,適於條件三角形之底邊皆爲此圓周之切線.

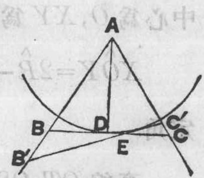

圖 9.

ABC 爲二等邊三角形, $AB'C'$ 爲他

三角形，BC，$B'C'$ 之交點爲 E，而 E 在 D, C 之間，則

$$BE>EC$$

又 $$B'\hat{B}E,\ E\hat{C'}C>\hat{R}$$

∴ $$B'E>BE,\ EC>EC'$$

∴ $$B'E>EC'$$

$$\triangle BEB':CEC'=EB\cdot EB':EC\cdot EC'$$

然 $$EB\cdot EB'>EC\cdot EC'$$

∴ $$\triangle BEB'>CEC'$$

∴ $$\triangle ABC>AB'C'$$

∴ $$BC<B'C'$$

18.　切二定線之定圓，求引此圓之第三切線，其夾兩定線間部分爲極小.

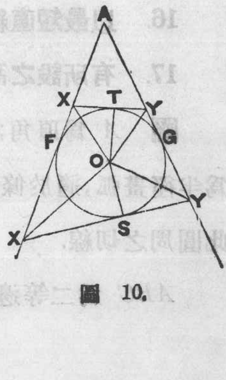

圖 10.

解　切二定線 AX，AY 之定圓中心爲 O，XY 爲第三切線.

$X\hat{O}Y=2\hat{R}-\frac{1}{2}(F\hat{X}Y+G\hat{Y}X)=$ 定角.

高線 OT，OS 有定長.

故由前問 $\triangle XOY$ 爲二等邊，則 XY 爲極小.

故切點 S, T 爲 X, Y 中點，卽 S, T 在 AO 線上.

19.　交所設 $\triangle ABC$ 二邊 AB, AC 於 X, Y，引直線 XY 使 $BX+CY=XY$，求 XY 之極小者.

解　取 $AP=AQ=\frac{1}{2}(AB+AC)$

過 P, Q 作圓切 AB, AC，則 O 爲定圓.

PB 等 QC，XY 切圓 O，則

$$XY=PX+QY=BX+CY$$

故由前問得求本題之極小線.

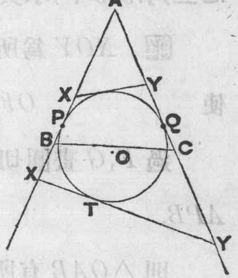

圖 11.

20.　有同一頂角等周三角形中，求極小之底邊.

解　XOY 爲所設之頂角，於其夾邊 OX, OY 上取 F, G 點使

$$OF=OG=\frac{1}{2}\text{定周.}$$

過 F, G 畫圓切於 OX, OY，又在 $\triangle OFG$ 內引第三切線 APB.

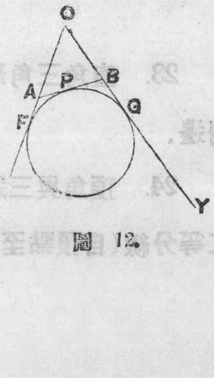

圖 12.

則 $\triangle OAB$ 有所設頂角及周圍,故切點 P 爲 AB 中點時,則 AB 爲極小之底邊.

21. **直角三角形周圍有定長,求極小之斜邊.**

22. **有同一頂角及夾此角二邊之和與底邊之差有定長之三角形形中,求其底邊極小者.**

解 XOY 爲所設頂角,於其夾邊 OX, OY 上取 F, G 點使

$$OF = OG = \frac{1}{2} \text{定長}.$$

過 F, G 畫圓切於 OX, OY, 又在 $\triangle OFG$ 外作第三切線 APB.

則 $\triangle OAB$ 有所設頂角,及

$$OA + OB - AB = \text{定長}.$$

故切點 P 爲 AB 中點時,則 AB 爲極小之底邊.

23. **直角三角形二邊之和與斜邊之差有定值,求極小之斜邊.**

24. **頂角與三邊和爲已知之三角形中,求其極大之頂角二等分線(自頂點至底邊之長).**

解 三角形一角有定大，周圍有定長，則在此角內之傍切圓有定大有定位，因之此角之二等分線有定位.

又定角之對邊常爲此定圓之切線.

故過二等分線與傍切圓之交點引切線爲底邊，則得極大之二等分線.

25. 定周直角三角形中，求直角二等分線之極大者.

26. 頂角及二邊和與底邊之差有定値之三角形中，求其頂角二等分線極小者.

解 三角形頂角有定大，鄰邊和與底邊之差有定值，則其內切圓有定大，有定位，因此二等分線爲定線.

又底邊常爲此定圓之切線.

故過二等分線與內切圓交點引切線爲底邊，則得極小之二等分線.

27. A, B, C, D 爲定圓周上順列四定點，P 爲周上動點，PB, PC 交 AD 於 X, Y，求 XY 爲極大之 P 點.

解 過 C 引 CE 弦平行 AD，則 E 爲定點.