数学分析习题集

（下　　册）

吉林师范大学函授教育处

数学分析习题集

吉林师范大学数学函授教材

数学分析习题集

（下 册）

数学分析教研室
数学分析教学小組編

吉林师范大学函授教育处

1960·10·長春

第二十一章　多元函数微分法

1°　二元函数的极限。

設函数 $u=f(x,\ y)$ 定义在某一个平面区域 D 上，又設 $P(a,\ b)$ 为 D 内一个定点，而 $P'(x,\ y)$ 为 D 的另一点，令　　$\rho=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$，即 ρ 为点 P 与 P' 間的距离。

設 A 为常数，如果不論給定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，总存在 $\delta>0$，当 $0<\rho(P,\ P')<\delta$ 时，恒有

$$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon,$$

則称函数 $f(x,\ y)$ 在点 $P(a,\ b)$ 以常数 A 为极限，并記作　$\lim\limits_{\rho\to 0} f(x,\ y)=A$　或　$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,\ y)=A$。

有时我們对二元函数极限的定义也用下述形式給出：

如果不論給定的 $\varepsilon>0$ 怎样小，总存在 $\delta>0$，当 $|x-a|<\delta$ 及 $|y-b|<\delta$ 时〔点 $(x,\ y)$ 異于 $(a,\ b)$〕，恒有

$$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon,$$

則称 $f(x,\ y)$ 在点 $P(a,\ b)$ 以 A 为极限，記作

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,\ y)=A.$$

2°　連續性。

若 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,\ y)=f(a,\ b)$，

则称 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 連續。

若 $f(x, y)$ 在区域 D 内的每一点都連續，则称 $f(x, y)$ 在此区域 D 内連續的。

一致連續性若不論 $\varepsilon>0$ 怎样小，总存在 $\delta>0$，对于区域 D 内任二点 $P'(x', y')$ 与 $P''(x'', y'')$

只要是 $\rho(P', P'')<\delta$,

恒有 $|f(x', y')-f(x'', y'')|<\varepsilon$,

则称 $f(x, y)$ 在区域 D 内是一致連續的。

例 1. 求极限

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{x^2+y^2}{x+y-1}, \qquad (a+b\neq 1)$$

应用极限运算定理，直接可得：

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{x^2+y^2}{x+y-1}=\frac{a^2+b^2}{a+b-1}.$$

例 2. 研究极限

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

首先，当 a 与 b 不同时为零时，应用极限运算定理，则有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} \frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$

其次，如果 $a=b=0$，此时极限是不存在的，这是因为当 $x=y\to 0$ 与 $x=0$，$y\to 0$ 时，分别有

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}\to 1 \text{ 与 } \frac{2xy}{x^2+y^2}\to 0.$$

所以，当$\begin{cases}x\to 0\\ y\to 0\end{cases}$时，$\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$不能趋向一个常数。

例 3. 函数 $f(x, y)=xy$ 在整个平面上連續.

因为 对任何点 (a, b) 都有

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} xy=ab.$$

所以 $f(x, y)=xy$ 在整个平面上是連續的.

例 4. 試証，若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 內对变数 x 是連續的，而关于 x 对变数 y 是一致連續的，則 $f(x, y)$ 在 D 內是連續的.

証：設 (x, y) 为 D 內任一点，那末

$$\begin{aligned}|f(x+h, y+k)-f(x, y)| &= |f(x+h, y+k)-\\ &\quad -f(x+h, y)+f(x+h, y)-f(x, y)|\leqslant\\ &\leqslant |f(x+h, y+k)-f(x+h, y)|+|f(x+h, y)-\\ &\quad -f(x, y)|\end{aligned}$$

由題設，存在 $\delta_1>0$，当 $|h|<\delta_1$ 时，对任何 h，都有

$$|f(x+h, y+k)-f(x+h, y)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

又存在 $\delta_2>0$，当 $|h|<\delta_2$ 时，使

$$|f(x+h, y)-f(x, y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

令 δ 为 δ_1 与 δ_2 中的小者

于是当 $|h|<\delta$，$|h|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x+h, y+k)-f(x, y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

証完

习　　题

1. 确定并画出下列函数的定义域:

(1) $u=x+\sqrt{y}$;

(2) $u=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(3) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;

(4) $u=\ln(-x-y)$.

2. 解下列各题:

(1) 若 $f(x,\ y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,

求 $f\left(1,\ \dfrac{y}{x}\right)$;

(2) 若 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$, $(x>0)$.

求 $f(x)$;

(3) 若 $u=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$,

当 $y=1$ 时, $u=x$, 求函数 f 和 u.

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$;

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}}\dfrac{\sin xy}{x}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to\infty}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4. 求下列函数的不連續点:

（1）$u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; √

（2）$u=\frac{xy}{x+y}$; √

（3）$u=\sin\frac{1}{xy}$; √

（4）$u=\ln(1-x^2-y^2)$. √

5. 証明：若在区域 D 内函数 $f(x, y)$ 对变数 x 是連續的，对变数 y 滿足里普什茲条件，即

$$|f(x, y')-f(x, y'')|\leqslant L|y'-y''|.$$

其中 (x, y') 与 (x, y'') 都属于 D，而 L 为常数. 則函数 $f(x, y)$ 在 D 内是連續的. √

3° 偏导数与高級偏导数.

对二元函数 $f(x, y)$，固定其中的一个变数 $y=y_0$. 那末，一元函数 $\varphi(x)=f(x, y_0)$ 在点 x_0 的导数 $\varphi'(x_0)$ 就叫做 $f(x, y)$ 关于 x 的偏导数，并記作 $f'_x(x_0, y_0)$；类似地，可以定义 $f'_y(x_0, y_0)$. 偏导数 f'_x 与 f'_y 本身也都是 x，y 的函数，对它們再求偏导数，我們就得了二級偏导数，如此类推，可得一般的高級偏导数.

4° 全微分.

$f(x, y)$ 在点 (x, y) 叫做可微的，假如:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).$$

其中 A 与 B 为常数，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$.

此时称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的全微分，記作 $du=A\Delta x+B\Delta y$.

5° 复合函数的微分法.

若 $u=f(x,y)$；$x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$，且 f，φ，ψ 都是可微的。那末复合函数 $u=f[\varphi(s,t),\psi(s,t)]$ 的偏导数可按下列公式求出：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial s}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}\\ \frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.\end{aligned}\right\}$$

例1. $f(x,y)=x^3\sin y+y^4$，求 f'_x 与 f'_y。

$f'_x=3x^2\sin y$；

$f'_y=x^3\cos y+4y^3$。

例2. $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$，求 f'_x，f''_{x^2} 与 f'''_{x^2y}。

$$f'_x=\frac{2x}{x^2+y^2};$$

$$f''_{x^2}=2\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2};$$

$$y'''_{x^2y}=2\frac{2y(x^2+y^2)^2-(y^2-x^2)4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$=\frac{4(3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^3}.$$

例3. $u=f(x,y)=\sin\frac{x}{y}$；$x=e^t$，$y=t^2$。求 $\frac{du}{dt}$。

$$\frac{du}{dt}=\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}e^t-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}2t=$$

$$=\left(\frac{e^t}{y}-\frac{2tx}{y^2}\right)\cos\frac{x}{y}=\frac{x}{y}\left(1-\frac{2t}{y}\right)\cos\frac{x}{y}=$$

$$=\frac{e^t}{t^2}\left(1-\frac{2}{t}\right)\cos\frac{e^t}{t^2}.$$

例 4. $w=f(u, v)$; $u=x$, $v=\frac{x}{y}$, 求 w'_x 与 w'_y;

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial w}{\partial v};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\ \frac{\partial w}{\partial v}.$$

例 5. 設 $u=u(x, y)$ 为可微函数，且当 $y=x^2$ 时有:

$$u(x, y)=1.$$

及 $$\frac{\partial u}{\partial x}=x.$$

求当 $y=x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解: 由 $u(x, x^2)=1$，可有

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{dy}{dx}=0.$$

即 $$x+2x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}.$$

例 6. 試証 $f(x, y)$ 等于常数的充要条件是 $f'_x=0$ 与 $f'_y=0$。

証: 充分性:

若 $f(x, y)=c$，　则显然有 $f'_x=f'_y=0$。

必要性: 只須証 $f(x, y)-f(a, b)=0$ 即可。

$$f(x, y)-f(a, b)=[f(x, y)-f(x, b)]+$$
$$+[f(x, b)-f(a, b)]=f'_y(x, y')(y-b)+$$
$$+f'_x(x', b)(x-a)=0.$$

其 y' 在 y 与 b 之間，x' 在 x 与 a 之間。

习　　题

6. 求下列函数的一阶与二阶偏导数：

（1）$u=x^4+y^4-4x^2y^2$；

（2）$u=xy+\dfrac{x}{y}$；

（3）$u=\dfrac{x}{y^2}$；

（4）$u=x\sin(x+y)$；

（5）$u=\dfrac{\cos x^2}{y}$。

7. 求下列复合函数的，一阶与二阶导数：

（1）$u=f(x^2+y^2+z^2)$；

（2）$u=f(x,\ xy,\ xyz)$，求u''_{yz}；

（3）$u=f(x+y,\ xy)$，求u''_{xy}；

（4）$u=f(xy,\ zx)$，求u''_{xy}。

8. 解下列各题：

（1）設函数$u=u(x,\ y)$滿足

1）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

2）$u(x,\ 2x)=x$，$u'_x(x,\ 2x)=x^2$；

求 $u''_{x^2}(x,\ 2x)$，$u''_{xy}(x,\ 2x)$ 及$u''_{y^2}(x,\ 2x)$。

（2）求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$$

的滿足条件$z(x,\ x^2)=1$的解；

（3）求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$$

的满足条件$z(x,0)=1$，$z_y'(x,0)=x$的解$z(x,y)$。

9．試証，在区域D内有有界的偏导数的函数$f(x,y)$在D内一致連續。

10．試証，若函数$f(x,y)$对x是連續，对y有有界的偏导数，則$f(x,y)$对x，y的整体是連續的。

11．試討論下列諸概念間的相互关系，并說明其理由：

連續，有偏导数，可微。

6° 台劳公式。

若函数$f(x,y)$在点(a,b)的某隣域內有直到$n+1$阶的連續偏导数，則在此隣域內下列公式成立；

$$f(x,y)=f(a,b)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a,b)+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[a+\theta(x-a),$$

$$b+\theta(y-b)].$$

其中$0<\theta<1$。

7° 极值。

若函数$f(x,y)$在点$P_0(a,b)$的某隣域內有定义，且当$0<\rho(P,P_0)<\delta$时，$P(x,y)$屬于該隣域，有

$f(a,b)<f(x,y)$或$f(a,b)>f(x,y)$，則說函数$f(x,y)$在点$P_0(a,b)$有极值（相应地为极小值或极大值）。

可微函数有极值的必要条件是它在极值点的偏导数等于零。

有极值的充分条件。

設 $f(x, y)$ 有可微的二阶偏导数。令 $A=f''_{x^2}$，$B=f''_{xy}$，$C=f''_{y^2}$。$\Delta=AC-B^2$，那末，

1）$\Delta>0$，$A>0$ 时有极小值，

2）$\Delta>0$，$A<0$ 时，有极大值，

3）$\Delta<0$ 时不取极值。

例1. 写出函数

$f(x, y)=x^y$ 在点 (1, 1) 的

到含二次項的台劳公式。

解：为此我們只要算出 x^y 的一阶和二阶偏导数在 (1,1) 的值就行了，

$$
\begin{array}{ll}
f(x, y)=x^y, & f(1, 1)=1; \\
f'_x=yx^{y-1}, & f'_x(1, 1)=1; \\
f'=x^y\ln x, & f'_y(1, 1)=0; \\
f''_{y^2}=y(y-1)x^{y-2}, & f''_{x^2}(1, 1)=0; \\
f''_{xy}=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x, & f''_{xy}(1, 1)=1; \\
f''_{y^2}=x^y\ln^2 x, & f''_{y^2}(1, 1)=0.
\end{array}
$$

把算得的結果代入公式

$$f(x, y)=f(1, 1)+\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]f(1, 1)+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(1, 1)+o(\rho^2),$$

整理得到

$$x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o(\rho^2).$$

例2. 求周長一定，有最大面积的三角形。

解：設 x, y, z 为三角形的三边，定長为 $2p$，于是

$$x+y+z=2p.$$

面积$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}=$

$$=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}.$$

$$(0\leqslant x\leqslant p,\ 0\leqslant y\leqslant p,\ p\leqslant x+y)$$

显然在一点A，S^2取极值，当然在点A，S也取极值。

$$f(x,\ y)=S^2=p(p-x)(p-y)(x+y-p).$$

函数$f(x,\ y)$在x，y所在的闭区域上是連續的，所以它一定有最大值，也就是說，我們要求的最大面积是存在的。

解方程組

$$\left.\begin{aligned} f'_x&=-p(p-y)(x+y-p)+p(p-x)(p-y)=0\\ f'_y&=-p(p-x)(x+y-p)+(p-x)(p-y)=0\end{aligned}\right\}$$

得稳定点为：

$$\left(\frac{2p}{3},\ \frac{2p}{3}\right),\ (p,\ p),\ (p,\ 0),\ (0,\ p).$$

后三个稳定点都不在x，y变化区域的內部，所以应該删掉，但由于S必存在最大值，而最大值又不能在边界上取到从而$\left(\frac{2p}{3},\ \frac{2p}{3}\right)$必为极大点。

当 $x=\frac{2p}{3}$，$y=\frac{2p}{3}$时，$z=\frac{2p}{3}$；

因此，周長一定，有最大面积的三角形是等边三角形。

习　　題

12． 根据台劳公式展开下列函数：

（1）在点$(1,-2)$的鄰域內展开函数：

$$f(x,\ y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5;$$

（2）在点$(1,\ 1,\ 1)$的鄰域內展开函数

$$f(x,\ y,\ z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

13． 求下列函数的极值：

（1） $u=x^2+(y-1)^2$;

（2） $u=x^2-xy+y^2-2x+y$;

（3） $u=x^2y^3(6-x-y)$;

（4） $u=x^3+y^3-3xy$.

14. 解下列各題:

（1）已知容积为V的長方浴盆，当其尺寸怎样时，有最小表面积?

（2）横断为半圓的圓柱形开口浴盆，其表面积为S。当其尺寸怎样时，此盆有最大容积?

（3）在半徑为R的半球內嵌入有最大体积的直角平行六面体.

（4）在已知的直圓錐內嵌入有最大体积的直角平行六面体.

第二十二章 隐 函 数

1° **存在定理：** 假若函数$F(xy)$在点(x_0, y_0)的某个隣域R内

i. 連續；

ii. 有連續偏导数；

iii. $F(x_0, y_0)=0$；

iv. $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$。

則在点x_0的某一隣域$\varDelta$内存在隐函数$y=f(x)$

i. 唯一；

ii. 連續；

iii. $y_0=f(x_0)$，且$F[x, f(x)]=0$；

iv. 有連續导数。

导数公式：若方程$F(x, y)=0$，确定唯一可微的函数$y=f(x)$，其y'从下面公式中可求出：

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

例1. 判断方程

$$F(x, y)=x^2+2xy-y^2-a^2=0 \qquad (a\neq 0)$$

在点(a)的某隣域能否确定唯一可微分函数$y=f(x)$？如果能确定，求$f'(x)$。

解：$\because F(x, y)=x^2+2xy-y^2-a^2$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2y,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2x-2y,$$

在 xOy 面上都連續，且 $F(a, 0)=0$,

$$F'_y(a, 0)=2a\neq 0.$$

$\therefore$ 根据隐函数存在定理知在 $(a, 0)$ 点某鄰域內存在唯一的可微分的函数 $y=f(x)$，其导数由公式得：

$$f'(x)=\frac{x+y}{y-x}.$$

例2. 設方程

$$F(x, y)=0,$$

如果 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某鄰域滿足隐函数定理所有条件，且具有一切連續的二級偏导数，証明它所确定的隐函数 $y=f(x)$ 存在連續的二級导数 $y''=f''(x)$，并求出 y''.

証：因 $F(x, y)$ 滿足隐函数定理条件故有

$$y'=-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

由定理条件知分子分母对 x，y 都有連續偏导数，而 y 看成是 x 的函数 $y=f(x)$ 对 x 亦有連續导数，故等号右側的分式可以对 x 求导数。（根据复合函数及商函数求导数定理推得）有：

$$y''=-\frac{F'_y[F''_{xx}+F''_{xy}y']-F'_x[F''_{yx}+F''_{yy}y']}{F'^2_y}.$$

將 $y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$ 代入上式整理之得：

$$y''=\frac{F'_xF'_yF''_{xy}-F'^2_yF''_{xx}-F'^2_xF''_{yy}+F'_xF'_yF''_{yx}}{F'^3_y}.$$