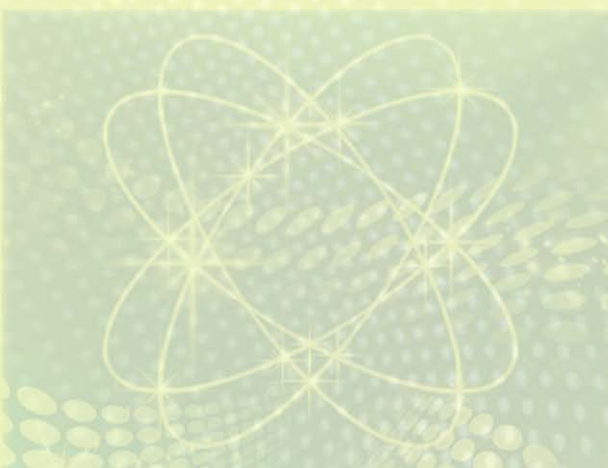
高等数学

张少杰　石岚　杨爱云　主编



西北大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张少杰,石岚,杨爱云主编.—西安:西北大学出版社,2012.9
(高等职业教育系列规划教材·数学平台课)
ISBN 978-7-5604-3113-0

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①张…　②石…　③杨…　Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅵ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 212696 号

高等数学　　张少杰　石岚　杨爱云　主编

出版发行	西北大学出版社	**社　址**	西安市太白北路 229 号
电　话	029—88303313	**经　销**	新华书店经销
印　刷	陕西奇彩印务有限责任公司	**开　本**	787mm×1092mm　1/16
版　次	2012 年 9 月第 1 版	**印　次**	2013 年 9 月第 2 次印刷
字　数	353 千字	**印　张**	14.5
书　号	ISBN 978-7-5604-3113-0	**定　价**	25.00 元

前　言

高等数学是高等职业院校各专业必修的一门重要的文化基础课。它对于培养提高高职学生的思维素质、创新能力、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。

众所周知，一本好教材对于教师的教和学生的学都有着重要的指导意义，所以教材建设一直是高职数学课程建设和教学改革中的一个重要方面。本书根据教育部制定的《高等职业教育专业人才培养目标及规格》和《高等职业教育高等数学课程教学基本要求》，在认真研究我国当前高等职业教育大众化发展趋势下的教育现状，充分听取各方面的建议，吸取多年来高职高等数学课程教学改革经验的基础上编写而成。

本书的编写力图体现以下几个原则和特色：

1.以实用够用为度，精选教学内容；

2.联系学生的实际，注重高等数学与初等数学知识的衔接；

3.借助实例引入概念，利用几何直观图形解释定理；

4.通过充实的案例提供，体现高等数学课程的专业实用性；

5.明确学习目标及要求，提供学法指导；

6.例题、习题选择顾及学生的个性需求。

全书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，常微分方程，多元函数微积分简介，线性代数初步，概率论初步，拉普拉斯变换和无穷级数共十一章。本教材既建有课程学习网站，又有配套的教学课件、学习辅导、习题、试题库，为师生提供了丰富的教学资源。

本书可作为高等职业院校和本科院校的二级职业技术学院各专业的高等数学教材，也可作为工程技术人员学习高等数学知识的更新教材。

参加本书编写的人员有：杨爱云（第一章）、石岚（第二、三章）、赵刚（第四章）、马书红（第五章）、梁萌（第六章）、钟若丹（第七章）、张少杰（第八、九章）、成均孝（第十章）、张琳娜（第十一章）。本书的审稿工作由西安航空职业技术学院李陆军教授承担。

由于时间仓促、编者水平有限，错误与疏漏在所难免，衷心希望从事职业教育的各位专家、老师以及广大读者给予批评指正！

编　者

2012 年 8 月 25 日

目　录

第一章 函数、极限与连续

初等数学研究的主要是常量及其运算，而高等数学所研究的主要是变量及变量之间的关系．函数正是这种关系的体现．极限是研究变量的变化趋势的基本工具，是微积分的基本概念，例如，导数、定积分和级数等概念都是用极限来定义的．本章将在复习和加深函数有关知识的基础上，讨论函数的极限和函数的连续性等问题．

学习目标

• 理解函数的概念和性质，掌握复合函数的复合与分解过程；

• 理解数列极限、函数极限的概念；

• 掌握求函数极限的基本方法；

• 了解无穷小与无穷大的概念，理解无穷小的性质，会比较无穷小的阶，会用等价无穷小的替换计算极限；

• 理解函数在一点连续的概念，了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质，能指出函数的间断点．

§1—1　函　　数

一、函数的概念

1．区间与邻域

(1) 区间

设 a 和 b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b).

类似地，数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$. 数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为半开半闭区间，分别记作 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

以上这些区间都称为有限区间，其中 a 和 b 分别称为区间的左端点和右端点，数 $b-a$ 称为区间的长度．这些区间在数轴上的几何表示为长度有限的线段(如图 1—1).

图 1—1

除以上谈到的有限区间外，还有无限区间，引进记号“$+\infty$”（读作正无穷大）和“$-\infty$”（读作负无穷大），则数集$\{x \mid x > a\}$、$\{x \mid x \geqslant a\}$、$\{x \mid x < b\}$和$\{x \mid x \leqslant b\}$称为半开或半闭无限区间，分别记作$(a, +\infty)$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, b)$和$(-\infty, b]$.

全体实数的集合 **R** 也可写成区间形式$(-\infty, +\infty)$.

（2）邻域

设δ和a是两个实数，且$\delta > 0$，则数集$\{x \mid |x - a| < \delta\}$称为点$a$的$\delta$邻域，记作$U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\}$$

其中点a称为邻域$U(a,\delta)$的中心，δ称为邻域$U(a,\delta)$的半径.

因为$|x - a| < \delta$相当于$-\delta < x - a < \delta$，即$a - \delta < x < a + \delta$，所以邻域$U(a,\delta)$也就相当于开区间$(a - \delta, a + \delta)$，该区间以点$a$为中心，长度为$2\delta$（如图 1－2）.

若去掉邻域中心，则称此邻域为去心邻域，记作$U(\hat{a},\delta)$，即$U(\hat{a},\delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$.

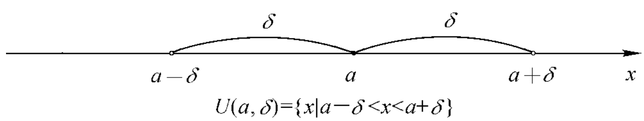


图 1－2

通常将开区间$(a - \delta, a)$称为点a的左邻域，开区间$(a, a + \delta)$称为点a的右邻域.

2．**函数的定义**

定义 1　设x和y是两个变量，D是实数集 **R** 的某个子集．如果对任何的$x \in D$，按照某种对应法则，变量y总有确定的值与之对应，则称变量y为定义在D上变量x的函数，记作$y = f(x)$．称D为该函数的定义域，称x为自变量、y为因变量.

当自变量x取数值$x_0 \in D$时，与x_0对应的因变量y的值称为函数$y = f(x)$在点x_0处的函数值，记为$f(x_0)$，或$y|_{x=x_0}$，当x取遍D的各个数值时，对应的变量y取值的全体组成的数集称为这个函数的值域.

如果自变量在定义域内任取一个值时，对应的函数值只有一个，这种函数称为单值函数，否则称为多值函数.

例如，$y = 3x + 1$是单值函数，由方程$x^2 + y^2 = 1$确定的函数$y = \pm\sqrt{1 - x^2}$就是多值函数.

以后凡没有特别说明，本书所讨论的函数都是指单值函数.

在函数的定义中，并没有规定用什么方法来表示函数．为了能很好地研究函数关系，就应该采用适当的方法把它表示出来．函数的表示法通常有三

种，即表格法、图示法和公式法．

例 1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$

(2) $y=\dfrac{1}{x-3}+\ln(x-2)$

解 (1) 要使 y 有意义，必须有 $4-x^2\geqslant 0$，

解得，$-2\leqslant x\leqslant 2$.

所以，函数的定义域为 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$，用区间表示为 $[-2,2]$.

(2) 要使 y 有意义，必须有 $x-3\neq 0$，且 $x-2>0$，

解得，$x>2$ 且 $x\neq 3$.

所以，函数的定义域为 $\{x\mid x>2$ 且 $x\neq 3\}$，用区间表示为 $(2,3)\cup(3,+\infty)$.

例 2 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ x^2-1, & x<0\end{cases}$，求 $f(0),f(-1),f(2)$.

解 $f(0)=0$，

$f(-1)=(-1)^2-1=0$，

$f(2)=2^2+1=5$.

例 2 中的函数我们称之为分段函数．分段函数是指在自变量的不同取值范围内，用不同的函数关系式来表示的函数．

注意 (1) 分段函数是定义域上的一个函数而不是几个函数；

(2) 分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集；

(3) 分段函数求值要分段来求．

3．函数的两个基本要素

由函数的定义知，函数的两个基本要素是定义域和对应法则．也就是说，两个函数只有当它们的定义域和对应法则完全相同时，两个函数才是相同的．

例 3 讨论 $y=x-1$ 和 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 是否相同？

解 函数 $y=x-1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

所以，函数 $y=x-1$ 和函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 是两个不同的函数．

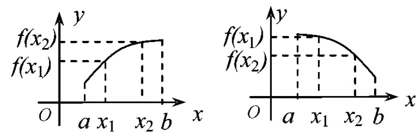
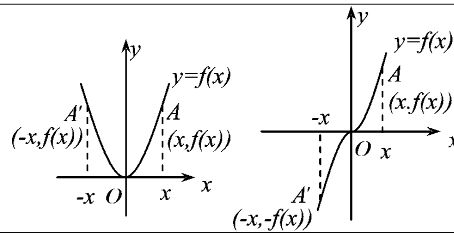
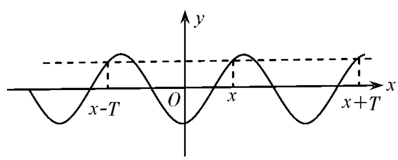
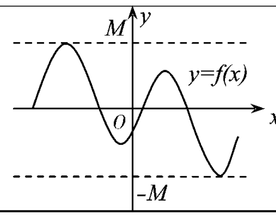
4．函数的几种特性

为了便于大家学习和理解，我们将函数的四个特性：单调性、奇偶性、周期性和有界性的定义和几何意义简单列出(见表 1－1，其中 D 为函数 $y=f(x)$ 的定义域)．在函数部分的知识学习过程中，希望大家能将函数的性质与几何意义结合起来，数形结合是一种直观而且有效的方法，掌握这种方法，便于知识的理解和记忆．例如，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加，那么在该区间上函数图像从左到右呈上升趋势，反之呈下降趋势．

记 录 区

记录区

表 1－1

性质	定义	几何意义
单调性	设区间 $(a,b) \subset D$. 若对于任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），那么函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上单调增加（或单调减少）. 区间 (a,b) 称为单调增区间（或单调减区间）.	
奇偶性	设 D 是关于原点对称的，若对于任意的 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，那么 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意的 $x \in D$，有 $f(-x) = -f(x)$，那么 $f(x)$ 为奇函数.	
周期性	若存在常数 $T \neq 0$，使得对于任意 $x \in D$ 均有 $x+T \in D$，且 $f(x+T) = f(x)$ 成立，那么 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期. 通常说的周期是指最小正周期.	
有界性	设区间 $I \subset D$，若存在正数 M，使得对于任意的 $x \in I$，都有不等式 $\lvert f(x) \rvert \leqslant M$ 成立，那么 $f(x)$ 在 I 上有界，如果这样的 M 不存在，则 $f(x)$ 在 I 上无界.	

二、基本初等函数

基本初等函数是最常见、最基本的函数类．基本初等函数包括常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数．这些函数的定义域、值域、图像和简单性质见附录二.

三、复合函数

先考察一个例子，设 $y = \ln u$，而 $u = 2^x$，用 2^x 代替第一个式子中的 u，得 $y = \ln 2^x$，可以认为，函数 $y = \ln 2^x$ 是由 $y = \ln u$ 及 $u = 2^x$ 复合而组成的函数，这样的函数称为复合函数.

定义 2 设 y 是 u 的函数，$y = f(u)$，$u \in I$，而 u 是 x 的函数，$u = \varphi(x)$，$x \in D$ 并且 $\varphi(x)$ 的值域包含于或部分包含于 $f(u)$ 的定义域，则 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，称此函数是由 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记作 $y = f[\varphi(x)]$，并称 x 为自变量，称 u 为中间变量.

对于给定的复合函数，分析清楚它的复合过程（即会将复合函数进行分

解)，会给将来求导数和积分的运算带来许多方便．

例 4 指出下列复合函数的复合过程：

(1)$y=e^{x^2}$ (2)$y=\ln(1+x^2)$

(3)$y=\cos^2 x$

解 (1)$y=e^{x^2}$ 是由 $y=e^u, u=x^2$ 复合而成．

(2)$y=\ln(1+x^2)$ 是由 $y=\ln u, u=1+x^2$ 复合而成．

(3)$y=\cos^2 x$ 是由 $y=u^2, u=\cos x$ 复合而成．

应该指出，不是任何两个函数都可组成一个复合函数．例如，$y=\sqrt{u}$ 和 $u=-3-x^2$ 就不能组成复合函数．原因是 $u=-3-x^2$ 的值域 $(-\infty,-3]$ 和 $y=\sqrt{u}$ 的定义域 $[0,+\infty)$ 无公共部分，对于函数 $u=-3-x^2$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 中的任何 x 值，形式上的复合函数 $y=\sqrt{-3-x^2}$ 均无意义．

因此，函数 $y=f(u), u=\varphi(x)$ 可以构成复合函数的条件是 $f(u)$ 的定义域和 $\varphi(x)$ 的值域有公共部分．

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成．例如：$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由 $y=e^u, u=\sin v, v=\frac{1}{x}$ 复合而成．

四、初等函数

定义 3 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合过程构成的、并能用一个解析式子表示的函数，称为初等函数．

例如：
$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0),$$
$$y=(x^2+1)e^{\sqrt{x}}+\sin(\ln x)$$
都是初等函数．

而 $y=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(|x|\geqslant 1, n\in\mathbf{N})$,
$$y=\begin{cases} x-1, & x\leqslant 0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$$
都不是初等函数．

习题 1－1

A 组

1. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{x-3}$ (2)$y=\sqrt{4-x^2}+\ln x$

2. 设函数 $f(x)=x^3-2x+3$，求：$f(1), f(-a), f(t^2)$．

3. 设 $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\leqslant -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x\leqslant 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$，求 $f(-2), f(0), f(2)$．

4. 判断下列每组中的两个函数是否是同一个函数：

(1)$y=\ln x^2$ $y=2\ln x$

(2)$y=\sqrt{x^2}$　　$y=|x|$

5. 指出下列函数的周期：

(1)$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$　　(2)$y=2\tan x$

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x^2\sin x$　　(2)$f(x)=\ln|x|$

(3)$f(x)=e^x+e^{-x}$　　(4)$f(x)=x^4+x^2+1$

7. 写出下列函数的复合过程：

(1)$y=5(x+2)^2$　(2)$y=\sin x^2$　(3)$y=\ln^2 x$　(4)$y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$

8. 用分段函数表示函数 $f(x)=5-|2-x|$，并作出函数的图像．

B 组

1. 求下列函数的定义域：

(1)$y=\frac{1}{(x-1)(x+2)}$　　(2)$y=\arcsin\frac{x}{3}$

2. 设函数 $f(x)$ 的定义域为(0,1)，求 $f(2x+1)$ 的定义域．

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos(x^2), & -\infty<x\leqslant 0\\ 1, & 0<x\leqslant 2\end{cases}$，求其定义域，并计算 $f(0)$，$f(\pi/2)$，$f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

4. 已知 $f(x+1)=x(x-1)(x+1)$，求 $f(x)$.

5. 试判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性．

6. 某停车场的收费规定是：第一个小时内收费 5 元，一个小时后每小时收费 2 元，每天最多收费 20 元．试用函数表示该停车厂收费与停车时间的关系．

§1－2　极限的概念

极限的概念是继函数概念之后，高等数学中又一个最重要、最基本的概念，极限的方法是高等数学中研究函数的基本方法，正确树立极限的思想对今后的学习具有十分重要的意义．有关极限的思想早在公元三世纪就产生了，当时，我国数学家刘徽利用圆的内接正多边形面积来推算圆的面积——割圆术，把圆的面积定义为圆的内接正多边形面积当边数无限增多时的极限，这是极限思想在几何学上的典型应用．

我们来看一个具体例子：

设有一根 1 米长的木棒，每天截去它的一半，把每天截后剩下部分的长度记录如下：

第一天剩下$\frac{1}{2}$，第二天剩下$\frac{1}{2^2}$，第三天剩下$\frac{1}{2^3}$，…，第 n 天剩下$\frac{1}{2^n}$，…．这样就得到了一个数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…

显而易见，如果这样的过程无限地记下去，剩下部分的长度会逐渐接近于零.

这个例子实际上是研究关于数列的变化趋势的问题，对于数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，当项数

n 无限增大时，它的通项 x_n 就能无限接近于零．以常数 0 作为自己的变化趋势，常数 0 就称为这个数列的极限．

一、数列的极限

看下面的例子：

(1) $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$

(3) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$

(4) $1,2,3,\cdots,n,\cdots$

可以看出，随着数列项数 n 的无限增大，各数列的变化趋势有以下两种情况．第一种情形：当 n 无限增大，通项 x_n 无限地趋近于某一常数．例如，在 (1) 中，随着 n 的无限增大，通项 $x_n=\frac{1}{n}$ 无限地趋近于零；在 (2) 中，随着 n 的无限增大，通项 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1．第二种情形：当 n 无限增大时，通项 x_n 不趋近于任何常数．例如，在 (3) 中，数列通项 $x_n=(-1)^{n-1}$ 总是在 -1 和 1 之间摆动；在 (4) 中，随着 n 的增大，其通项 $x_n=n$ 无限增大，它们都不趋近于任何常数．

对于数列 (1) 和 (2) 所表现出来的特性，有：

定义 1 如果无穷数列 $\{x_n\}$ 的项数 n 无限增大时，x_n 无限地趋近于某个确定的常数 A，那么 A 就称为无穷数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

或

$$当\ n\to\infty\ 时，x_n\to A.$$

当数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限时，称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，此时称数列 $\{x_n\}$ 为收敛数列；如果数列 $\{x_n\}$ 不趋近于任何常数，即 $\{x_n\}$ 没有极限，则称数列 $\{x_n\}$ 发散．例如 (3)，(4) 就是发散数列．

例 1 判断下列无穷数列的极限：

(1) $\{x_n\}=\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$ (2) $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{2n+1}\right\}$

(3) $\{x_n\}=\{3\}$ (4) $\{x_n\}=\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$

解 (1) 通过观察，当 n 无限增大时，数列通项 $x_n=\frac{n+2}{n+3}$ 无限趋近于常数 1，所以 1 是数列 $\left\{\frac{n+2}{n+3}\right\}$ 的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}=1.$$

(2) 通过观察，当 n 无限增大时，数列通项 $x_n=\frac{n}{2n+1}$ 无限趋近于常数

记

录

区

$\dfrac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

（3）通过观察，当 n 无限增大时，数列通项 x_n 总等于 3，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}3=3.$$

（4）数列 $\{x_n\}=\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 按项数展开应该是 $\sin\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\pi$，$\sin\dfrac{3\pi}{2}$，…，$\sin\dfrac{n\pi}{2}$，… 即 1，0，−1，0，… 显然，当 n 无限增大时，x_n 摆动于 1，0，−1，0 四数之间，并不趋近于某一个确定的常数，所以数列 $\{x_n\}=\left\{\sin\dfrac{n\pi}{2}\right\}$ 没有极限．

二、函数的极限

对于函数的极限，根据自变量变化的情况，分两种情形讨论．

1．当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

在数列的极限中，记号 $n\to\infty$ 是指数列的项数按照自然数的顺序无限增大，而函数的自变量 $x\to\infty$ 是指 x 的绝对值无限增大．

例 2　当 $x\to\infty$，讨论 $y=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势．

解　作出 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图像，由图 1－3 可见，当 $|x|$ 无限增大时，$\dfrac{1}{x}$ 的值无限地趋近于零，即当 $x\to\infty$，$\dfrac{1}{x}\to 0$.

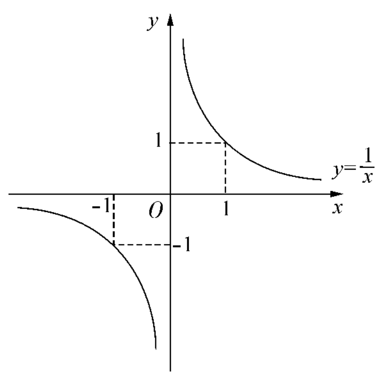


图 1－3

类似于数列的极限，我们可以给出函数极限的定义．

定义 2　当 $|x|$ 无限增大（$x\to\infty$）时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么常数 A 就称为当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

或

$$\text{当 } x\to\infty \text{ 时，} f(x)\to A.$$

例 2 中，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$ 便可记作

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

在上面的函数极限定义中，$x\to\infty$，即自变量 x 的绝对值无限增大，指的是 x 既可以取正值无限增大，也可以取负值而绝对值无限增大．

有时 x 的变化趋势仅取正值而无限增大，记作 $x\to+\infty$；有时 x 的变化趋

势仅取负值而绝对值无限增大，记作 $x \to -\infty$. 这时有如下极限定义：

定义 3　当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时，如果函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A，那么常数 A 就称为当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时函数 $f(x)$ 的极限，记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A（或 \lim_{x \to -\infty} f(x) = A）.$$

或　　　　当 $x \to +\infty$（或 $x \to -\infty$）时，$f(x) \to A$.

例 3　观察函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 $y = 2^x$ 的图像，并判断下列极限结果.

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{2})^x$　　　　(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x$

解　由图 1－4 可以看出：

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$　　　　(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$

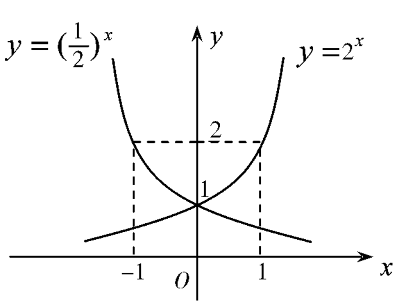


图 1－4

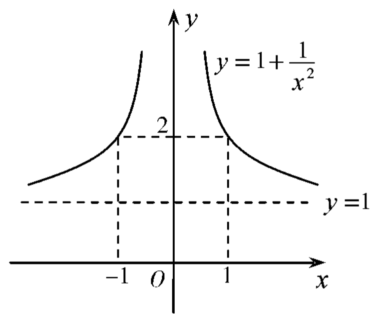


图 1－5

函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限与当 $x \to +\infty$，$x \to -\infty$ 时的极限有如下关系：

定理 1　$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

由定理 1 知：当 $x \to \infty$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 和 2^x 极限不存在.

例 4　作出函数 $y = 1 + \frac{1}{x^2}$ 的图像，并判断极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$，$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$，$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ 是否存在.

解　作出函数 $y = 1 + \frac{1}{x^2}$ 的图像（如图 1－5），不难看出：

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1,$$

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x^2}) = 1.$$

2. 当 $x \to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

先看两个例子：

例 5　讨论当 $x \to 1$ 时，函数 $y = x + 1$ 的变化趋势.

记录区

解　作出函数 $y=x+1$ 的图像(如图 1－6). 可以看出,当 $x\to 1$ 时,$y=x+1$ 无限趋近于 2.

例 6　讨论当 $x\to 1$ 时,函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的变化趋势.

解　作出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的图像(如图 1－7). 可以看出,当 x 无限趋近于 1 时,$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 也无限趋近于 2. 但此函数在 $x=1$ 处无定义.

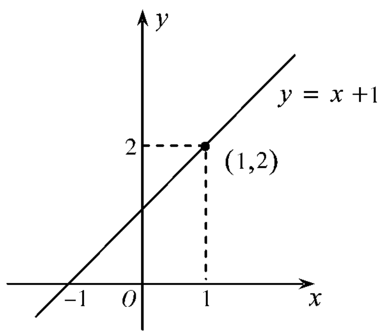


图 1－6

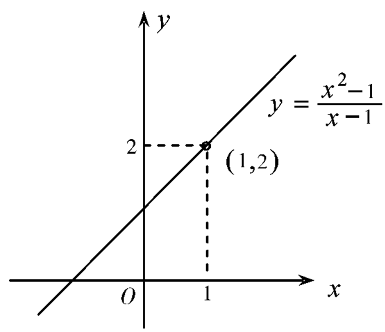


图 1－7

由 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1(x\neq 1)$ 与 $y=x+1$ 比较可知:函数在 $x=1$ 处是否有定义,并不影响函数此时的极限.

定义 4　当 $x\to x_0(x\neq x_0)$ 时,若函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数 A,那么常数 A 就称为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

或　　当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$.

前面我们讨论了当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限,在那里 x 是以任意方式(大于 x_0 或小于 x_0)趋近于 x_0 的,但是,有时我们还需要知道 x 仅从小于 x_0(即 x_0 的左侧)的方向或仅从大于 x_0(即 x_0 的右侧)的方向趋近于 x_0 时,$f(x)$ 的变化趋势,为此我们定义左右极限.

定义 5　当 x 从 x_0 的左侧趋近于 x_0,记作 $x\to x_0^-$(或 x 从 x_0 的右侧趋近于 x_0,记作 $x\to x_0^+$)时,函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,那么常数 A 就称为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左极限(或右极限),记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A).$$

左极限和右极限统称函数的单侧极限.

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

例 7　设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x-2, & x\geqslant 0\end{cases}$,试讨论当 $x\to 0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

解　作出函数 $f(x)$ 的图像(如图 1－8),观察图像可得:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-2) = -2,$$

于是
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

由定理 2 知：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在．

例 8　已知 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 1 \\ 1, & x<1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解　作出函数 $f(x)$ 的图像(如图 1－9).

$\because$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1$　$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$

由定理 2 知：$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

由极限的定义可知，若函数 $f(x)$ 的极限存在，则极限是唯一的．

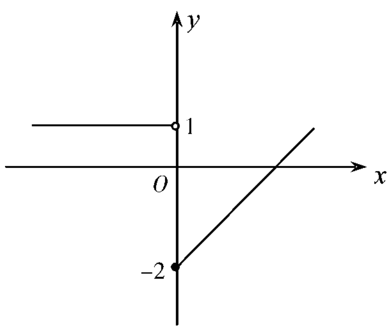


图 1－8

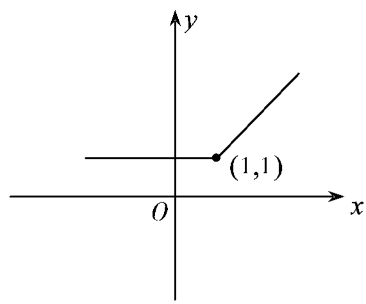


图 1－9

习题 1－2

A 组

1．当数列项数无限增大时，观察下列各数列的变化趋势：

(1) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots$　　(2) $3,-3,3,-3,\cdots$

2．作图判断下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(3x+1)$　(2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$　(3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\sin x$　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x$

3．作图并说明函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ 1, & x=1 \\ -1, & x>1 \end{cases}$ 当 $x\to 1$ 时极限是否存在．

B 组

1．下列极限是否存在？若存在，求出其数值．

(1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(x-2)}{x^2}$

2．求函数 $f(x)=\frac{x}{x}$，$\varphi(x)=\frac{|x|}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的左右极限，并说明它们当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

记录区

记录区

§1—3 极限的运算

一、极限的四则运算法则

下面的定理仅就函数极限的情形给出，所得的结论对数列极限也成立.

定理 1 设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$ 都存在，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

其中，自变量 x 的变化趋势可以是 $x\to x_0$，$x\to\infty$ 等情况，但对上述各式必须是自变量的同一变化过程. 结论(1)和(2)还可以推广到有限个函数的代数和或乘积的极限形式. 结论(2)还有如下常用的推论：

推论 设 $\lim f(x)$ 存在，则对于常数 C，有 $\lim(Cf(x))=C\lim f(x)$.

利用极限的四则运算法则，可以求出一些比较复杂的函数的极限.

注意 应用法则时，要特别注意条件 $\lim f(x)$，$\lim g(x)$ 存在，否则法则不能用.

例如：$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=(\lim\limits_{x\to 0}x)\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$ 是错误的，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3n+1}{3n^2-n}$.

解 分式的分子、分母同除以 n^2，得

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{3-\dfrac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{5+0+0}{3-0}=\frac{5}{3}.$$

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^3-2x^2+3)$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}(3x^3)-\lim\limits_{x\to 1}(2x^2)+\lim\limits_{x\to 1}3=3\times 1^3-2\times 1^2+3=4$.

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x+2}{2x+1}$.

解
$$原式=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x+2}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}$$
$$=\frac{2\times 2^2-2+2}{2\times 2+1}=\frac{8}{5}.$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$.

解 由于有理分式 $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ 的分母当 $x\to -1$ 时极限为 0，因此不能直接利用定理 1 的(3). 因为 $x\to -1$，x 不会等于 -1，所以约去非零因式 $(x+1)$.