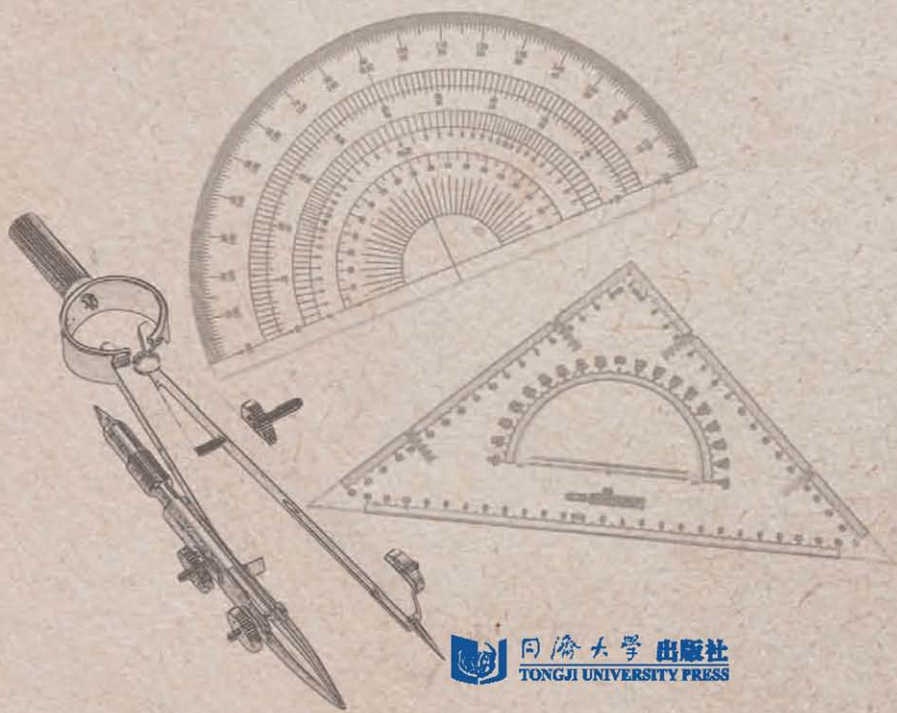


TANTAN GUANYU JIAODE DENG FEN WEN TI

谈谈关于角的等分问题

徐振声 著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

谈谈关于角的等分问题

徐振声 著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

谈谈关于角的等分问题 / 徐振声著. -- 上海:
同济大学出版社, 2015. 2

ISBN 978-7-5608-5768-8

I. ①谈… II. ①徐… III. ①几何—研究 IV. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 024790 号

谈谈关于角的等分问题

徐振声 著

责任编辑 陈佳蔚

责任校对 徐春莲

封面设计 潘向秦

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092

电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 上海当纳利印刷有限公司

开 本 880 mm×1 230 mm 1/32

印 张 2.875

字 数 77 000

版 次 2015 年 2 月第 1 版 2015 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5768-8

定 价 22.00 元

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

徐振声,男,汉族,1922年3月出生,浙江省兰溪人.1948年秋毕业于国立浙江大学机械工程系,历任浙江省科学技术普及协会秘书长,中央燃烧工业部苏州电力学校教务科副科长,中央燃料工业部上海动力学校工程热力学教研组组长、锅炉专业科主任、教务副校长、代理校长,上海电力专科学校教务副校长、代校长,高级工程师.著有《关于若干教学环节的实施意见》、《关于积极开展课外活动的若干意见》、《关于贯彻执行党的教育方针的若干意见》、《高等函授教育是教育领域的一支盛开不衰的鲜花》、《关于培养提高大学生智能问题的若干意见》等.

自序

人们说,离退休后很容易产生失落感,而失落感对老年人的健康来说是十分不利的,为了排除这种可能,于是离休后我很想到各地跑跑,欣赏祖国的锦绣河山、文明古迹和风俗民情,但囊中羞涩,只跑了几个较近的地域聊以自慰,而对其他许多地域就只好望景而兴叹了.至若唱歌跳舞、棋奕之类,又素无因缘,于是就选定搞数学游戏,作为晚年消遣.

搞数学游戏,不需要什么试验器材,只需一纸一笔行矣.但对我这个不是学数学专业的人来说,又谈何容易?于是就自己选定一个题目,叫“谈谈关于角的等分问题”,这里包含着青年学子们意欲解决而又一时无法解决的几个难题.我想,如果我能解决这些难题,也算是给青年学子们帮了一个忙;如果不能解决这些难题,谁也不会责怪我.而对我来说,探究一个未知领域,无论如何,总不失为一场乐趣,于是就着

手写了一篇极其粗陋的文稿,请教于我的老战友、老同学和老同事,他们都是我国数学界、教育界很有名望的人,他们都晓得我不是学数学专业的,所以并不见笑我的那篇拙文,却为成全我的“数学游戏”而提供了十分有益的信息^[注 I]. 这些信息如让我独自到图书资料室去找,即使花很长的时间,也不一定就能找到;而现在经他们提供,我就在很短的时间内,不费吹灰之力,全都得到了. 我深深感到:提供给我的,不仅仅是信息,更是同志间的深厚情谊.

但是这些信息对我来说,都是素不相识的,可正因为这样,既激发了我的兴趣,又为我做数学游戏而提供了绝好的题材. 于是我静下心来,仔细揣摩、反复领悟每一信息的含义,又搜索枯肠,运用所学知识,或阐述或考证每一信息的原理,而对未曾提供的信息,我又自作主张,予以应有的补充,真是一头扎了进去. 写写停停,又停停写写,历时三年,五次突破难题^[注 II],才终于写成了现在这样的其名仍旧、其内容已大为充实、其质量也大有提高的文稿. 相信青年学子们看后,在角的等分问题上,不但可以彻底走出“缘木求鱼、徒劳无益”的困境,而且人人都可成为等分角度的“能手”. 而我在这一过程中,虽已离休,却仍在干我的教育工作,竟不知“失落感”为何物! 虽未能爬山越岭,畅游祖国,却在斗室之中爬格

子,亦有“快哉,数学游戏!美哉,数学!”的良好享受.

我完成“谈谈关于角的等分问题”之后,就又联想起几何史上的三大难题了.一探究,原来这三个难题,虽具体内容各不相同,但都同属于尺规作图不能问题.用尺规去解决这三个难题,自然是过去不能解决、现在也不能解决、将来也还是不能解决的问题了.而若采用别的什么工具和方法,又都立马成为可以各自解决的问题了.这次探索花的精力不多,却自感收获不少,于是就又写了一点文字作为这本小册子的最后一章,于是这本小册子也就成了这本《谈谈关于角的等分问题》了.而几何史上的三大难题,是一个曾长期困扰过人们,而且直到今天,有时也还会继续困扰着人们的问题.如果由于本书的出版,能对现在还被这三个难题困扰着的人们有所帮助或解脱,则我的意图也就达到了.然而本人系非数学专业人员,行文及论述过程欠缺甚或错误在所难免,尚希广大读者,不吝指教.是为序.

徐振声

于2015年1月

【注 I】 他们提供给我的信息是

(1) 能否实现用尺规作图的问题,可以化为问题可否用二次根式求解的问题;而判断一个代数方程是否可以用二次根式求解,数学上由 Galois 理论进行讨论.

(2) 如下形式的数,叫费尔玛特(Fermat)数:

$$m_F = 2^{2^n} + 1.$$

用尺规可对特定角 $\frac{\pi}{2}$ 作 m_F 次等分,但 m_F 必须同时是素数者,亦即 n 限定 0, 1, 2, 3, 4 五个数. 因为当 $n=5$ 时, m_F 就不再是素数而是合数了.

(3) 如果用尺规可以对特定角 $\frac{\pi}{2}$ 作 m' 次等分,也可以作 m'' 次等分,且 $(m', m'')=1$, 则用尺规也可以对特定角 $\frac{\pi}{2}$ 作 $m' \cdot m''$ 次等分.

(4) 如果用尺规可以对任意角作 $m_1 = 2^{n_1}$ 次等分, $n_1 = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$. 对特定角 $\frac{\pi}{2}$ 可以作 $m_2 = 2^{2^{n_2}} + 1$ 次等分, n_2 限定 0, 1, 2, 3, 4 五个数中的一个, 则用尺规亦可以对 $\frac{n}{m_1}$ 倍的直角

$\frac{\pi}{2}$ 作 $m_3 = m_1 \prod_{i=1}^{n_3} m_{2^{\sigma(i-1)}}$ 次等分, n_3 取 0, 1, 2, 3, 4, 5 六个数中

的一个.

因此,可用尺规等分角度的情况,可归纳为以下二类:

(1) 对任意角而言,可作 $m_1 = 2^{n_1}$ 次等分.

(2) 对 $\frac{n}{m_1}$ 倍的直角 $\frac{\pi}{2}$ 而言,可作 $m_3 = m_1 \prod_{i=1}^{n_3} m_{2^{\sigma(i-1)}}$ 次等

分.

【注 II】 五道难题是指:

(1) 关于尺规能否等分角度的判别定理.

(2) 关于高次方程 $\frac{\cos 17\alpha}{\cos \alpha} = 0$ 的求解问题.

(3) 用尺规也可以对 $\frac{n}{m_1}$ 倍的直角作 $m_3 = m_1 \prod_{i=1}^{n_3} m_{2^{\sigma(i-1)}}$ 次

等分.

(4) 关于任意角的三等分仪.

(5) 关于万能分角仪.

目 录

自 序

引 言	1
-----------	---

第 1 章 关于尺规能否等分角度的判别定理	3
-----------------------------	---

1.1 任意角任意等分的普遍关系式	6
-------------------------	---

1.2 尺规对数的表述功能	9
---------------------	---

1. 尺规对数的直接表述功能	9
----------------------	---

2. 尺规对数的间接表述功能	9
----------------------	---

1.3 尺规能否等分角度的判别式定理	20
--------------------------	----

第 2 章 尺规等分角度的功能问题	23
-------------------------	----

2.1 能用尺规等分角度的情况之一	25
-------------------------	----

2.2 能用尺规等分角度的情况之二	29
-------------------------	----

2.3 能用尺规等分角度的情况之三	40
第3章 如何等分不能用尺规所能等分的角度	57
3.1 不能用尺规等分角度的情况之一	
——关于任意角的三等分问题	59
1. 用尺规三等分任意角是徒劳的	59
2. 用任意角的三等分仪可以三等分任意角	61
3.2 不能用尺规等分角度的情况之二	
——关于任意角的任意等分问题	67
1. 用尺规对任意角作任意次等分亦是徒劳的	67
2. 用万能角分仪可以对任意角作任意次等分	68
第4章 我是怎样解决几何史上三大难题的	75

引 言

先从角的等分问题说起

青年们,你要用尺规等分角度吗?那你就得:首先鉴别清楚“何者能等分,何者又不能等分”这个首要的问题,不然,你用尺规去等分用尺规所不能等分的角度,那就不自觉地干了“蠢事”了;而你若事先就学好“尺规能否等分角度的判别定理”,那你就会自觉地不干那个“蠢事”了.

对等分角度来说,人们本以为可以信赖的尺规,却原来是一副“蹩脚货”呢!对于绝大多数情况来说,它们都是无能为力的.而对它们能等分的情况来说,看似功能不小,实际上也派不了多少用处.

可是,你不必由此而沮丧,等分角度有着好工具呢!你用“三等分仪”就可方便地对任意角作出三等分;而你用“万能分角仪”,就又可方便地对任意角作出任意等分.

联想起几何史上的三大难题,虽具体内容各不相同,但都同属于“尺规作图不能”问题,用它们来解决这三个问题,自然是:过去不能解决,现在也不能解决,将来也还是不能解决.而若采用别的工具和方法,那它们又立马成为可各自解决的问题了.又何难之有哉?

第 1 章

关于尺规能否等分角度的判别定理

本章将鉴别清楚“何者能等分,何者又不能等分”这个首要的问题.

在讲解关于尺规能否等分角度的判别定理之前,我想先讲一下为什么要建立这个极为重要的定理.

众所周知,直尺和圆规是制图仪器中的基本元件,人们用它来绘制各种图形,也用它来等分各种角度,可哪里晓得,当用它来等分角度时,却暗藏着两类截然不同的情况,一类是能用尺规等分的,而另一类是不能用尺规等分的.如果用尺规去等分用尺规所能等分的角度,那自然有取得成功的希望;而如果用尺规去等分用尺规所不能等分的角度,那就如同缘木求鱼,永无取得成功的可能.然而,人们在很长的一段历史时期内,却一直不知晓这个情况,于是竟有不少学者为此而白白浪费了许多宝贵的精力和时间而终一无所获.据说直到 19 世纪末,有了 Galois 理论的出现,人们才弄清了这个问题.然而 Galois 理论深奥难懂,不能为刚开始学数学的青年人所能理解和接受,所以即使在 Galois 理论已问世一百多年后的今天,这个问题也还时不时地困扰着现代的青年学生们.所以,用一个通俗易懂的办法来说明尺规何者能等分角度、何者不能等分角度就成为一个首要的问题了.

如何解决这个首要问题呢?我们必须把角的几何等分问题转化为代数方程的求解问题.如果该代数方程的解能用

尺规的几何作图表示出来,那么我们就说,这个角可以用尺规来等分;而如果该代数方程的解,不能用尺规的几何作图表达出来的,那么我们就说,这个角就不可以用尺规来等分.这样一来,一个关于尺规能否等分角度的判别定理就可由此建立起来了.

所以要建立一个关于尺规能否等分角度的判别定理,我们就必须:

首先,把等分角度的几何问题转化为任意角任意等分的普遍关系式的代数求解问题.

其次,必须全面考察尺规对数的表述功能.

最后,再来谈关于尺规能否等分角度的判别定理.

下面就分别谈谈上述三方面的问题.

1.1

任意角任意等分的普遍关系式

由棣莫佛定理,我们知道:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^m = \cos m\alpha + i \sin m\alpha. \quad (1.1)$$

由二项式定理,我们又知道:

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^m &= C_m^0 \cos^m \alpha + i C_m^1 \cos^{m-1} \alpha \cdot \sin \alpha + \\ &\quad i^2 C_m^2 \cos^{m-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \\ &\quad i^3 C_m^3 \cos^{m-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \\ &\quad i^4 C_m^4 \cos^{m-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \cdots \\ &= C_m^0 \cos^m \alpha - C_m^2 \cos^{m-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \\ &\quad C_m^4 \cos^{m-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \cdots + \\ &\quad i(C_m^1 \cos^{m-1} \alpha \cdot \sin \alpha - \\ &\quad C_m^3 \cos^{m-3} \alpha \cdot \sin^3 \alpha + \cdots). \quad (1.2) \end{aligned}$$

比较式(1.1)和式(1.2),使实部等于实部,虚部等于虚