高等数学

下册

GAODENG SHUXUE

敬晓龙　谢小凤　贾堰林 / 主　编
郑志静　王　璐　柴英明 / 副主编

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等数学

（下册）

敬晓龙　谢小凤　贾堰林　主　编
郑志静　王　璐　柴英明　副主编

重庆大学出版社

内容提要

本书共分为5章,内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、多元函数的极值及其求法、曲线积分与曲面积分、无穷级数等。以上各章之后配有一定数量的习题,书后附有习题参考答案。

本书可作为高等院校非数学专业类高等数学的教材,也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/敬晓龙,谢小凤,贾堰林主编.
—重庆:重庆大学出版社,2016.1
ISBN 978-7-5624-9615-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①敬…②谢…③贾… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第005161号

高等数学
(下册)
敬晓龙 谢小凤 贾堰林 主 编
郑志静 王 璐 柴英明 副主编
责任编辑:李定群 版式设计:李定群
责任校对:关德强 责任印制:邱 瑶
*
重庆大学出版社出版发行
出版人:易树平
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号
邮编:401331
电话:(023) 88617190 88617185(中小学)
传真:(023) 88617186 88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)
全国新华书店经销
万州日报印刷厂印刷
*
开本:720×960 1/16 印张:17.75 字数:272千
2016年1月第1版 2016年1月第1次印刷
印数:1—2 000
ISBN 978-7-5624-9615-1 定价:37.50元

前 言

高等数学是高等院校理工科专业的一门非常重要的公共基础课,它不仅为后继课程提供了大量的理论依据,而且对学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、自主学习能力、创新能力等综合素质的培养起着极其重要的作用。随着科学技术的迅速发展,数学正日益渗透各行各业中,已成为人们学习和研究专业知识的工具。此外,高等数学也是理工科院校硕士研究生入学考试的必考科目。因此,高等数学的学习,不仅关系学生本科期间、研究生期间的学习水平,还关系学生科学思维方法、解决问题能力以及个人文化素质修养的培养。

本书是以 TOPCARES-CDIO 教学理念为指导思想,结合各专业需求,充分吸收了编者们多年来的教学实践经验与教学改革成果所编写的一本教材。在编写过程中,首先,本书充分考虑了高等数学课程的特点,力求浅显易懂,适合学生自学;其次,在基本理论的叙述上重新调整了结构,使其更便于学生理解;最后,在习题的处理上,考虑了各个层次学生的不同需求,分别设计了基础题与提高题。本书可作为高等院校理工类各专业的本科教材,也可作为其他相关专业的教材或教学参考书。

本书主要为高等数学下册内容,其中第 6 章由王璐编写,第 7 章由郑志静编写,第 8 章由贾堰林编写,第 9 章由谢小凤编写,第 10 章由敬晓龙编写,最后由柴英明、蒙立、何曦统审。

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请专家、读者批评指正。

编　者

2015 年 12 月

目　录

第 6 章　空间解析几何与向量代数

§6.1　向量及其线性运算

6.1.1　向量的概念

在现实生活中,我们会遇到很多量,其中一些量在取定单位后用一个实数就可表示出来,如长度、质量等.还有一些量,如我们在物理中所学习的位移,是一个既有大小又有方向的量,这种量就是本章所要研究的向量.向量是数学中的重要概念之一,向量和数一样也能进行运算,而且用向量的有关知识还能有效地解决数学、物理等学科中的很多问题,在这一章,我们将学习向量的概念、运算及其简单应用.

定义 1　既有大小,又有方向的量称为**向量**,也可称**矢量**.

可将向量形象化地表示为带箭头的线段:箭头的指向,代表向量的方向;线段的长度,代表向量的大小,又称向量的模.如图 6.1 所示,以 A 为起点、B 为终点的有向线段表示向量 $\overrightarrow{AB}$.我们约定用黑体小写字母表示向量,如 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$;为了以示区别,书写时,在小写字母头上加上箭头来表示向量,如 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.当然,向量既可以是平面上的向量,也可以是空间中的向量,我们将在后面专门研究.

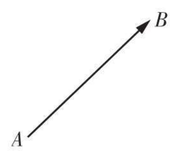

图 6.1

在学习过程中,同学们还会遇到以下的一些概念:

向量的模:向量的大小称为向量的模.例如,向量 $\boldsymbol{a}$,$\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}$ 的模分别记为

$|\boldsymbol{a}|, |\vec{a}|, |\overrightarrow{AB}|$.

单位向量:模等于 1 的向量称为单位向量.

零向量:模等于 0 的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点与终点重合,它的方向可看作任意的.

向量的平行:两个非零向量如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 零向量认为是与任何向量都平行.

当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共的起点在一条直线上. 因此,两向量平行又称两向量共线. 类似还有共面的概念. 设有 $k(k \geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

数学上在研究向量的时候,并不关心向量的起点位置,只关心向量的大小和方向,称这种与起点无关的向量为自由向量. 因此,如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相同,则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 相等的向量经过平移后可以完全重合.

6.1.2 向量的线性运算

类似于普通的量,向量也可以定义出一些基本的运算.

1) 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

三角形法则:上述作出两向量之和的方法称为向量加法的三角形法则(见图 6.2(a)).

平行四边形法则:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合,以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形,从公共起点到对角的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(见图 6.2(b)).

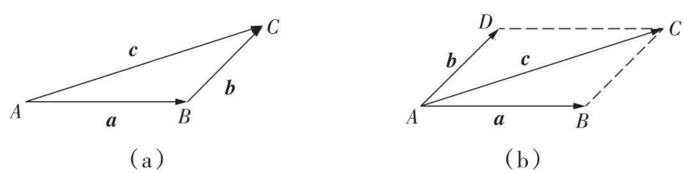

图 6.2

向量的加法的运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并按向量相加的三角形法则，可得 n 个向量相加的法则如下：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和.

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{a}$.

我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$，即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上，便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$(见图 6.3). 特别的，当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

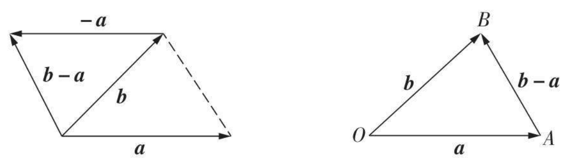

图 6.3

显然，任给向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$. 因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量 $\overrightarrow{AB}$ 便是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中，等号在 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向时成立.

2) 向量与数的乘法 $\lambda\boldsymbol{a}$

设 λ 是一个数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 规定为：

(1) $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$.

(2) $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

(3) $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$.

其满足的运算规律有：结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mu\boldsymbol{a}$、分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. 设 $\boldsymbol{a}^0$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，那么，

$\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

定理1 设向量 $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b} = \lambda\boldsymbol{a}$.

例1 在平行四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$,这里 M 是平行四边形对角线的交点(见图6.4).

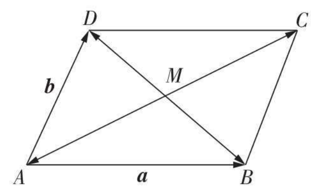

图6.4

解 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$,

于是

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

由于 $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$,于是

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

又由于 $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD}$,于是

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

由于 $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$,于是

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}).$$

6.1.3 空间直角坐标系及向量的坐标

在空间取定一点 O 和3个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$,就确定了3条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴. 它们构成一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 坐标系(见图6.5).

注意:

(1)通常3个数轴应具有相同的长度单位.

(2)通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上,而 z 轴则是铅垂线.

(3)数轴的正向通常符合右手规则.

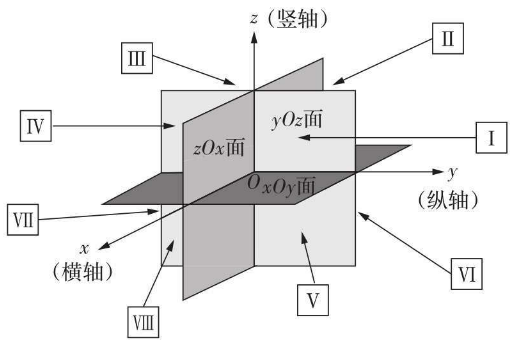

图 6.5

坐标面：

在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴可以确定一个平面，这种平面称为坐标面，x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面，另两个坐标面是 yOz 面和 zOx 面.

卦限：

3 个坐标面把空间分成 8 个部分，每一部分称为卦限，含有 3 个正半轴的卦限称为第一卦限，它位于 xOy 面的上方. 在 xOy 面的上方，按逆时针方向排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限. 在 xOy 面的下方，与第一卦限对应的是第五卦限，按逆时针方向还排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限. 8 个卦限分别用字母 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ 表示.

向量的坐标分解式：

任给向量 $\boldsymbol{r}$，对应有点 M，使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，以 OM 为对角线、3 条坐标轴为棱作长方体（见图 6.6），有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

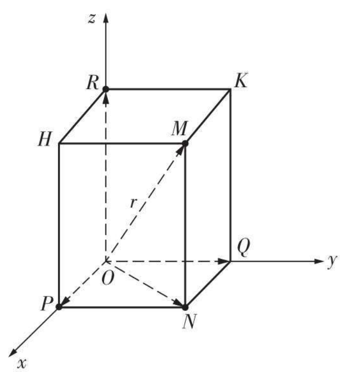

图 6.6

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 3 个坐标轴方向的分向量. 显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}$

$=z\boldsymbol{k}$ 3个分向量，进而确定了 x,y,z 3个有序数；反之，给定3个有序数 x,y,z 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M. 于是，点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与3个有序 x,y,z 之间有一一对应的关系

$$M\leftrightarrow \boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z).$$

据此，定义有序数 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{r}$（在坐标系 $Oxyz$）中的坐标，记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$；有序数 x,y,z 也称为点 M（在坐标系 $Oxyz$）的坐标，记为 $M(x,y,z)$. 向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径. 上述定义表明，一个点与该点的向径有相同的坐标. 记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$.

坐标面上和坐标轴上的点，其坐标各有一定的特征. 例如，点 M 在 yOz 面上，则 $x=0$；同样，在 zOx 面上的点，$y=0$；在 xOy 面上的点，$z=0$；如果点 M 在 x 轴上，则 $y=z=0$；同样，在 y 轴上，有 $z=x=0$；在 z 轴上的点，有 $x=y=0$；如果点 M 为原点，则 $x=y=z=0$.

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，则：

加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$

减法：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$

数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$

或

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)v$$

例2 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases}5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}\\3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}\end{cases}$，其中，$\boldsymbol{a}=(2,1,2)$，$\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$.

解 如同解二元一次线性方程组，可得 $\boldsymbol{x}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{y}=3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$.

以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的坐标表示式代入，即得

$$\boldsymbol{x}=2(2,1,2)-3(-1,1,-2)=(7,-1,10),$$
$$\boldsymbol{y}=3(2,1,2)-5(-1,1,-2)=(11,-2,16).$$

例3 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$，在直线 AB 上求一点 M，使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 解法1：由于

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM},$$

因此

$$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}),$$

从而

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\right),$$

这就是点 M 的坐标.

解法 2：设所求点为 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),\overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

依题意有 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$，即

$$(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=\lambda(x_2-x,y_2-y,z_2-z)$$

$$(x,y,z)-(x_1,y_1,z_1)=\lambda(x_2,y_2,z_2)-\lambda(x,y,z),$$

$$(x,y,z)=\frac{1}{1+\lambda}(x_1+\lambda x_2,y_1+\lambda y_2,z_1+\lambda z_2),$$

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 当 $\lambda=1$，点 M 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的中点，其坐标为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},y=\frac{y_1+y_2}{2},z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

6.1.4　向量的模、方向余弦、投影

1) 向量的模与两点间的距离公式

设向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

按勾股定理可得

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|OP|^2+|OQ|^2+|OR|^2},$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，有

$$|\overrightarrow{OP}|=|x|,|\overrightarrow{OQ}|=|y|,|\overrightarrow{OR}|=|z|,$$

于是，得向量模的坐标表示式为