



新华传媒
XINHUA MEDIA



读交大之星 圆名校之梦

初中名校入学数学检测

全解与精练

顾志良 编 著



上外附中 上海市实验学校 西南位育 延平 华育 华师大一附中 复兴 浦东上外 致远中学 竹园中学 浦东模范 建平实验 立达中学 培佳 兰生复旦 存志 杨浦实验中学 向明初级 西南模范 位育 徐汇 明珠中学 东延安 市三 新世纪 西延安 市西 整教附中 世界外国语学校



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS



全解与精练系列

初中名校入学数学 检测全解与精练

顾志良 编著

内容提要

本书作者积数十年教学实践经验,对重点初中入学考题及小学中、高年级奥数竞赛题有深入细微的研究。精评各类典型题例的构思,解法中的种种得失、利弊。对小学生顺利升入自己理想初中,或在新校优化分班学习中一定有所帮助,特别对于学有余力的学生有实际指导意义,有较好的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

初中名校入学数学检测全解与精练 /顾志良编著. —上海:
上海交通大学出版社,2014
ISBN 978—7—313—10805—0

I. ①初… II. ①顾… III. ①小学数学课—题解 IV. ①G624. 505

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014)第 015773 号

初中名校入学数学检测全解与精练

编 著: 顾志良	
出版发行: 上海交通大学出版社	地 址: 上海市番禺路 951 号
邮政编码: 200030	电 话: 021—64071208
出 版 人: 韩建民	
印 制: 上海交大印务有限公司	经 销: 全国新华书店
开 本: 787 mm×1092 mm 1/16	印 张: 6.5
字 数: 151 千字	
版 次: 2014 年 2 月第 1 版	印 次: 2014 年 2 月第 1 次印刷
书 号: ISBN 978—7—313—10805—0 /G	
定 价: 20.00 元	

版权所有 侵权必究
告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系
联系电话: 021—54742979

前 言

一段时间以来,社会上对于学生参与数学奥林匹克学习和竞赛有着种种误读与误解。其实,奥数本身具有趣味、开放、探索、实践的特性。它有利于培养学生的综合素质,有利于拓展学生的思维,有利于发展学生的个性。教师、学生、家长和社会各界如何正确地、有利有节地去认识,去参与奥数的学习或竞赛活动,有合理的把握度,这才是人们应有的理性思考,而不是一味地、不加分析地赞同或反对。多年来,我国学生在数学、物理、化学等学科的国际多项竞赛中取得的优异成绩,非一朝一夕的努力而得到的。一些学有余力的学生在多个领域里如鱼得水,学得生龙活虎,都是有目共睹的。所以本书就数学解题中的解题技巧以及思维方法作一些初步探索,其中涉及小学中、高年级奥数竞赛题以及重点初中入学考题的命题得失或对于解题技巧的评估研讨。本书以中、高年级学生为主要阅读对象,以期拓宽学生的知识视野,帮助学生掌握解题技巧,从而拓展学生思维、提高解题能力。限于作者水平,书中存在的疏漏,谨请读者及行家指正。本书在编写中曾得到谭露华、龚颖、李琪慧、韩雄诸位老师提供相关资料,在此一并感谢。

目 录

第一章	计算技巧探索(一).....	1
第二章	计算技巧探索(二).....	5
第三章	数学解题中的辅助手段(一)	10
第四章	数学解题中的辅助手段(二)	15
第五章	一题多解与多题同解(一)	20
第六章	一题多解与多题同解(二) ——由鸡兔共笼问题说起	25
第七章	图形计算中的解题技巧(一)	31
第八章	图形计算中的解题技巧(二)	36
第九章	数学竞赛题的命题构思与解题技巧(一)	40
第十章	数学竞赛题的命题构思与解题技巧(二)	44
	入学检测综合练习测试(一)	47
	入学检测综合练习测试(二)	49
	入学检测综合练习测试(三)	51
	入学检测综合练习测试(四)	53
	入学检测综合练习测试(五)	56
	入学检测综合练习测试(六)	59
	入学检测综合练习测试(七)	62
	入学检测综合练习测试(八)	64
	入学检测综合练习测试(九)	67
	入学检测综合练习测试(十)	70
	参考答案	73

第一章 计算技巧探索 (一)

本章讨论的计算问题,是指整数、小数和分数的加、减、乘、除四则运算,以及乘方计算。探索计算过程中的简算及巧算,也涉及类似数字求和,方阵、数列等典型问题的计算技巧。

例 1 (1) 478×999

(2) $478 \times 99\,999$

(3) $478 \times \underbrace{99\cdots9}_{100\text{个}9}$

(4) $478 \times \underbrace{99\cdots9}_{2\,013\text{个}9}$ 的积的数字之和 =

100个9

2 013个9

点评 数的计算,也应该拓宽思维,培养综合分析能力。上列一组计算题,都与“9”有关。乘数都是由9组成的数。一般的思路用乘法分配律简算这样的题: $478 \times (1\,000 - 1) = 478\,000 - 478 = 477\,522$ 。其实,乘数是“9”的多位数乘法计算,当被乘数位数与乘数的位数一样多,或少于乘数的位数时,用简单的“读9”法就能口算写出结果。以478乘以999为例:先将被乘数减去1,写成477,然后后三位数用“读9”法写出522即可以。(4+5=9, 7+2=9, 7+2=9)。如果乘数中9的个数多于被乘数的个数,只须将多余的9安插在中间。如: $478 \times 99\,999 = 47\,799\,522$ 。同样: $478 \times \underbrace{99\cdots9}_{100\text{个}9} = 47\,799\,522$ 。而第4小题求积的数字之和,根本不

100个9

97个9

用去求积,再考虑积的数字之和。我们可以从前三题,观察得出:乘数里有几个9,积的数字之和就是9乘以9的个数。如此,最后一题积的数字之和必定是 $2\,013 \times 9 = 18\,117$ 无疑。从以上点评中,我们发现,平时用乘法分配律简算这类习题时,如果将中间的计算过程删去,直接观察条件与结果,能够有所发现、有所总结,这才是学习的良好习惯。

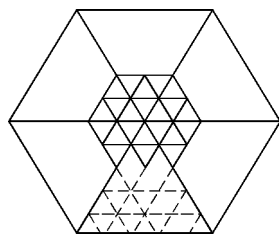
例 2 $123456789101112\cdots29982999$ 这列多位数除以9的余数是()。

点评 这题看似一道数的整除中的求余数的问题。其实,它有交叉型的解法存在,所以选择此题来探索它的计算技巧。能被9整除的数是一个数的各位数字之和能被9整除。有人用等差数列求和的方法列出: $(1+2\,999) \times 2\,999 \div 2$ 再看作 $1\,500 \times 2\,999$, $1\,500$ 被9除余数6, $2\,999$ 被9除余2, 6×2 的积被9除余数为3。其实9个连续数的和一定是9的倍数。所以用 $2\,999$ 除以9,用弃九法。得出余2。于是只要分析 $29\,982\,999$ 这个八位数除以9余数是几。再用弃九法很快得到余数是3。思维不同,解法各异。各有各的意趣,值得玩味。

例 3 一个正六边形苗圃,用平行于苗圃边缘的直线把它分成许多相等的正三角形。(图1)

在三角形的顶点上都栽上树苗,已知苗圃最外边一圈栽有90棵。那么该苗圃中共栽种树苗多少棵?

点评 这是一个正六边形点阵图中求点数的问题。先作一个分析。最外圈有90个点(90棵树)每两个顶点之间应有14个点, $14 \times 6 + 6 = 90$ 个点。算这个点阵图中总点数有不同求法:



(图 1)

解法一,每个正三角形点数 $(1+16) \times 16 \div 2 = 136$ 点,六个共有 $136 \times 6 = 816$ 个。而六条相交的边上各重复计算了一次,中心顶点上多算了五次。 $816 - 16 \times 5 - 5 = 721$ 点。

解法二,正六边形中心一个点算第一层,第二层每边有二个点,第三层每边有三个点,依次类推,该正六边形共有 16 层。每一层不计算重复的点数。其实从第二层开始,每层的点数依次是 6 的 1 倍、2 倍、3 倍…的数,所以总点数计算方法可以是: $6 \times (1+2+3+\cdots+15) + 1 = 721$ 点。

例 4 $99^2 - 98^2 + 97^2 - 96^2 + 95^2 - \cdots - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1^2$

点评 应用平方差公式计算此题是十分简捷的方法。我们知道 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。 $99^2 - 98^2$ 可以写成: $(99+98) \times (99-98)$ 。依次类推,原式可以写成: $99+98+97+96+95+\cdots+3+2+1$ 而正整数 $1+2+3+\cdots+99+100 = 5\,050$, 所以原式 $= 5\,050 - 100 = 4\,950$ 。

例 5 $19\,991\,999 \times 19\,991\,998 - 19\,992\,000 - 19\,991\,997$

点评 这是 2000 年《吉林省小学数学夏令营计算竞赛》中的一道题。原来的解法是:

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 19\,991\,998^2 + 19\,991\,998 - (19\,991\,998 + 2)(19\,991\,998 - 1) \\ &= 19\,991\,998^2 + 19\,991\,998 - 19\,991\,998^2 - 19\,991\,998 + 2 \\ &= 2.\end{aligned}$$

这类题型有否更简捷的解法吗? 且看以下的分析。

(a) (b)

设: $A = 96 \times 94$ $a+b=c+d$ 而 $a-b < c-d$

$B = 97 \times 93$

(c) (d)

当 a 与 b 的和和 c 与 d 的和相等时,差越小,积就越大。所以可以判断 $A > B$, $A - B$ 是正数 $B - A$ 是负数。那么 a 与 b 的差是几? 读者可以用上述的方法计算,也可以直接列竖式计算后比较。一定会发现。 A 、 B 之差只需对角相减可以得到。

即 $A = 96 \times 94$ $96 - 93 = 3$ 或 $97 - 94 = 3$ 。



$B = 97 \times 93$

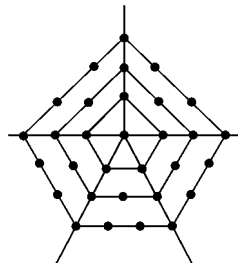
再进一步分析会发现:当 a 比 c 少 2, 而 d 比 b 少 2 时, $\begin{matrix} A = 96 \times 94 \\ B = 98 \times 92 \end{matrix}$ A 与 B 的差为:

$(98-96) \times 2$ 或 $(94-92)$ 。当 a 与 c , d 与 b 的差互为 3 时,有 $(a-d) \times 3$ $(c-b) \times 3$, 依次类推。计算十分简便。学习中怎样深入浅出,化繁为简是经常得留意的。这样才能学得轻松、学得愉快。

试一试

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13...997, 998, 999。这列数的数字之和是多少?

2. 一个正五边形的点阵,中心一点算第一层,第二层共有五个点,第三层有十个点,第四层有十五个点,若五边形点层共有 50 层,求点阵中的点的总数是多少?



3. $987\ 654\ 322 \times 123\ 456\ 788 - 987\ 654\ 321 \times 123\ 456\ 789$

4. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \cdots + 99^2 - 100^2 + 101^2$

5. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 59^2 + 60^2$

提示: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1) \div 6$

拓展题

1. 求下面数字方阵的所有各数之和。

1, 2, 3, $\cdots$, 10, 11
 2, 3, 4, $\cdots$, 11, 12
 3, 4, 5, $\cdots$, 12, 13

 11, 12, 13, $\cdots$, 21

2. 右图 8 行 8 列数阵中,“全国春蕾杯小学生思维邀请赛试题”是依次从小到大的 15 个连续自然数。分成四个 4 行 4 列方阵。右下角方阵所有数之和是 560,全部方阵数之和是多少?

全 国 春 蕾 杯	杯 小 学 生
国 春 蕾 杯	小 学 生 思
春 蕾 杯 小	学 生 思 维
蕾 杯 小 学	生 思 维 邀
杯 小 学 生	思 维 邀 请
小 学 生 思	维 邀 请 赛
学 生 思 维	邀 请 赛 试
生 思 维 邀	请 赛 试 题

3. 小林家住的一条街的各家门牌号码是从 1 开始的连续自然数。所有的号码之和减去小林家的号码得 56。小林家住在几号?

4. $\underbrace{33\cdots3}_{100\text{个}3} \times \underbrace{33\cdots34}_{99\text{个}3}$

5. 求以下一组数列之和:

2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233。

第二章 计算技巧探索 (二)

例 1 $\frac{1}{\text{爱}} = \frac{1}{\text{好}} + \frac{1}{\text{数}} + \frac{1}{\text{学}}$, (“爱好数学”为四个不同的自然数)

点评 将一个分子是 1 的真分数, 写成几个或者更多个分子为 1 的真分数, 分母为不同自然数的真分数连加的形式, 有多种不同的技巧。以下作一些探索。

1. 公式法: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a(a+1)}$

例: $\frac{1}{6} = \frac{1}{6+1} + \frac{1}{6 \times (6+1)} = \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$, 例 1 可随意设定 $\frac{1}{\text{爱}} = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, 再将 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{6}$ 中的一个衍生出如: $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ 。于是得到:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

上述的衍生变化技巧不断进行, 就可以无限的展开下去。

2. 利用分母的平方数分解法:

例: $\frac{1}{6} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)}$, 把分母自乘的积 $b^2 = 36$, 再分解成两个因数的乘积, 如 1×36 , 2×18 , 3×12 , 4×9 , $6 \times 6 \cdots 0.1 \times 36$, 这样的分解形式可以写出无数组。取任意一组举例: $\frac{1}{6} = \frac{1}{4+6} + \frac{1}{9+6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$, 再如: $\frac{1}{6} = \frac{1}{3+6} + \frac{1}{12+6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} \cdots$ 。衍生出无数种写法。

3. 埃及分数计算技巧法:

有着金字塔, 狮身人面像的文明古国埃及, 埃及人处理分数运算的技巧也非常独特。他们一般只用分子为 1 的分数来表示 $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$, $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28} = \frac{3}{7}$ 这样的一类分数运算。由此得到启发。下列一组埃及分数:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{99}, \frac{1}{100}$, 我们选择 $\frac{1}{2}$, 写出 $\frac{1}{2} = \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \frac{1}{(\quad)} + \cdots + \frac{1}{(\quad)}$ 。

已经知道, 数学中常用“补割法”解决问题:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdots$$

照此原则, 不是可以写出:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5}。真是得来全不费功夫, 埃及分数的魔力真了不起。$$

例 2 写出大于 $\frac{1}{3}$ 而小于 $\frac{1}{2}$ 的分数,并按如下要求排列 $\frac{1}{3} < \underbrace{(\quad) < (\quad) < \cdots < (\quad)}_{100\text{个分数}} < \frac{1}{2}$

点评 比较分数大小,是分数计算中常见的一类问题,方法也不少。

1. 通分母法:

$$\frac{1}{3} < (\quad) < (\quad) < (\quad) < \frac{1}{2} = \frac{8}{24} < \frac{9}{24} < \frac{10}{24} < \frac{11}{24} < \frac{12}{24} = \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12} < \frac{11}{24} < \frac{1}{2}.$$

2. 通分子法:

$\frac{2}{7} < (\quad) < (\quad) < (\quad) < \frac{2}{5} = \frac{6}{21} < \frac{6}{20} < \frac{6}{19} < \frac{6}{18} < \frac{6}{15} = \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{6}{19} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ 。利用分子相同,分母小的反而大的原理, $\frac{1}{3} < (\quad) < (\quad) < (\quad) < \frac{1}{2}$ 也可以先写成: $\frac{1}{3} < \frac{1}{2.9} < \frac{1}{2.8} < \frac{1}{2.7} < \frac{1}{2}$,再整理成 $\frac{1}{3} < \frac{10}{29} < \frac{10}{28} < \frac{10}{27} < \frac{1}{2} = \frac{1}{3} < \frac{10}{29} < \frac{5}{14} < \frac{10}{27} < \frac{1}{2}$ 。用对角相乘的积作比较判断: $1 \times 29 < 3 \times 10$,得知 $\frac{1}{3} < \frac{10}{29}$,以下用同样的方法可以判断正确与否。但是用上述各种方法要写出 100 个大于 $\frac{1}{3}$ 而小于 $\frac{1}{2}$ 的分数,还是比较麻烦,因为其中还有个约简分数的过程。如果应用“加成分数”的知识来解决问题,则简略多了。设分数 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$,则 $\frac{b+d}{a+c}$ 是分数 $\frac{b}{a}$ 、 $\frac{d}{c}$ 的加成分数。而加成分数有一个性质:任意一个加成分数值一定在它的两个母分数之间,即: $\frac{b}{a} < \frac{b+d}{a+c} < \frac{d}{c}$ 。于是 $\frac{1}{3} < \frac{1+1}{3+2} < \frac{1}{2}$ 。按照这样的规律去写:

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{3}{7} < \frac{4}{9} < \frac{5}{11} < (\quad) < \cdots < \left(\frac{101}{201}\right) < \frac{1}{2}$$

很快会发现,这一组分数的分子是从 1 开始的连续自然数,而分母是从 3 开始的连续的奇数,(除了最后一个 $\frac{1}{2}$)所以第 100 个分数应是 $\frac{101}{201}$ 。写出这 100 个分数真可谓不费吹灰之力了。

例 3 求 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{128} + \frac{1}{256}$ 的和。

点评 小学阶段,分数四则运算尚未正式学习。学生解这样题型有点困难。用一般通分母后再求和的方法,既麻烦又不合实情。其实数学解题中经常用“尝试法”或“补割法”解决问题,这里不妨一试。首先用“缩小与放大”的思维加原式简化成下列各式尝试计算一下:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

从中找到规律,发现每一式的结果,可以分别用 $1 - \frac{1}{4}$, $1 - \frac{1}{8}$, $1 - \frac{1}{16}$ 得到。联想翩翩,一定会启迪思维,找到解题的捷径。

然后用“补割法”证明一下:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} + \frac{1}{4} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) - \frac{1}{8} \\ &= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

…由此联想到:加原式先补后割,一定得到: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{256} + \frac{1}{256}\right) - \frac{1}{256} = 1 - \frac{1}{256} = \frac{255}{256}$ 。还有一点,括号内的计算,不应该从左往右进行。如果从右往左去思考,两个 $\frac{1}{256}$ 之和是 $\frac{1}{128}$, 两个 $\frac{1}{128}$ 之和是 $\frac{1}{64}$ …两个 $\frac{1}{2}$ 之和是 1, 妙趣横生,很有味道。

例 4 将 $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{11}$ 四个分数化成小数后,分别将它们小数部分截取 100 位数字,求这 400 个数字之和是多少?

点评 问题挺夸张,其实有规律可循。用质数 3、7、11 作分母写出的分数,化成小数后,小数部分的循环节有十分奇特的个性。 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ 化成小数分别是 $0.\dot{3}$ 和 $0.\dot{6}$ 的循环。 $3+6=9$, 用 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$ 化成的小数,这 200 个数字之和是 $9 \times 100 = 900$ 。而分母是 7 的分数,小数部分循环节内的数字始终是“1、4、2、8、5、7”六个数字,只是次序变化而已。所以这 100 个数字之和是, $(1+4+2+8+5+7) \times 16 + (1+4+2+8) = 432 + 15 = 447$ 。而分母是 11 的分数小数部分循环节内的数字之和必定是 9。 $\frac{1}{11}$ 至 $\frac{10}{11}$ 的循环节依次为“ $\dot{0}9$ 、 $\dot{1}8$ 、 $\dot{2}7 \cdots \dot{8}1$ 、 $\dot{9}0$ ”所以这 100 个数字之和为 $9 \times 50 = 450$ 。至此,这 400 个数字之和为 $900 + 447 + 450 = 1797$ 。分数改写成小数,有些特殊的规律,平时能留意。对于解题一定会带来方便。

例 5 $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$

点评 原式按照运算顺序逐步计算必定十分繁琐。不能很快求出结果。数学解题中可以用“替代法”化繁为简。这里设 $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= (1+B)A - [(1+A) \times B] \\ &= A + AB - [B + AB] \\ &= A + AB - B - AB \\ &= A - B.\end{aligned}$$

再将数字代入 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{5}$ 用字母替代数或式,略施小技,就使原来的计算大大简化。当然,这题的结构非常有特点。解题前认真审题,才能找到有效的解题技巧。

试一试

1. $\frac{7}{12} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$ 。a、b、c、d、e 为不同的自然数。

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024}$

3. 写出小于 $\frac{1}{4}$ 而大于 $\frac{1}{5}$ 的 10 个真分数,并将它们依次排列应是 $\frac{1}{4} > () > () > \cdots > () > \frac{1}{5}$ 。

4. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} + \frac{1}{66}$

提示: $\frac{1}{3} = \frac{1}{1 \times 3} = 1 - \frac{2}{3}$, $\frac{1}{6} = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{10} = \frac{1}{2 \times 5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$

5. $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdots + \frac{1}{1\,000\,000}$

拓展题

1. 从 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{48}, \frac{1}{49}, \dots, \frac{1}{100}$ 。100 个分数当中挑出 8 个分数,使它们的和等于 1。

2. $a = \underbrace{0.00\dots012}_{100\text{个}0}, b = \underbrace{0.00\dots025}_{100\text{个}0}$ 求 $ab + a \div b$ 的和。

3. $\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \dots + \frac{1}{19\,800}$ 。

4. $1 - \frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{9}{20} + \frac{11}{30} - \frac{13}{42}$

提示: a, b 是互质数时: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}, \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} (a < b)$

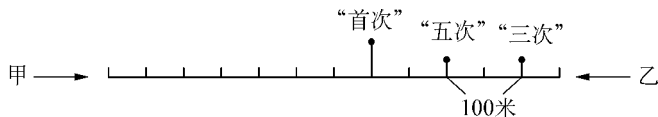
5. $\frac{1 \times 3 \times 5 + 2 \times 6 \times 10 + 3 \times 9 \times 15 + 4 \times 12 \times 20 + 5 \times 15 \times 25}{1 \times 2 \times 3 + 2 \times 4 \times 6 + 3 \times 6 \times 9 + 4 \times 8 \times 12 + 5 \times 10 \times 15}$

第三章 数学解题中的辅助手段（一）

解答数学题中,某些习题的条件复杂,问题较曲折,不能立即找到解题的方法,必须反复审题,深入理解题意,才能领会条件和问题之间的关系。有时还得依靠某些辅助手段,帮助弄清数量关系,而图解法就是各种解题辅助手段中的一种。图解法是用一些象征性的图形、符号、记号或者线段,图表形象又具体地展示条件与条件,条件与问题之间的关系,从而找到解题的线索,启示解题思维,得出满意的解题。图解法可以使隐蔽的条件,复杂、抽象的条件具体化、形象化,明白地得到显示,降低了读题审题的难度,是一种十分理想的辅助手段。

例 1 甲、乙两人从 A、B 两点同时出发,相对而行。并反复往返。甲每分钟行 140 米,乙每分钟行 100 米,两人第三次与第五次之间相遇的距离为 100 米。求 A 与 B 之间相距多少米?

点评 此题如果没有相应的知识点,以及相应的图解加以辅助分析条件和问题,学生难于入手。我们知道,两人在 A、B 之间首次相遇,共行了一个全程,三次相遇共行了五个全程,五次相遇共行了九个全程。各自行的路程也分别是首次相遇时行的路程的 5 倍与 9 倍。如果从两人速度比为:140:100 即 7:5 这一条件着手,配以相应的线段图先表示出首次相遇的地点,解题思路随即豁然开朗



于是第三次与第五次相遇点,只需从两人中取其中一人的行进情况加以分析,(例如取乙行进的路程剖析计算)就可以得到:

$$5 \times 5 \div 12 = 2(\text{个}) \cdots 1(\text{格})$$

商是偶数,乙返回原出发点,再行一小格即是第三次相遇点。

$$5 \times 9 \div 12 = 3(\text{个}) \cdots 9(\text{格})$$

商是奇数,从对方出发点,返回 9 小格即是第五次相遇点。

从图上可以明显分析出,两次相遇点之间相距 100 米,全程为 $100 \div 2 \times 12 = 600$ 米。

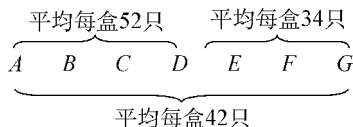
例 2 桌子上一排放着七只盒子,平均每只放着 42 只小球。前四只盒子平均放着 52 只,后四只盒子平均放着 34 只,第四只盒子放着几只小球?

点评 此题难度不大,学生首选方法会列出:

$$52 \times 4 + 34 \times 4 - 42 \times 7 \text{ 或 } (52 + 34) \times 4 - 42 \times 7$$

求得第四只盒内装了 50 只小球,不再作其他想。

如果配以下面辅助图:



由图而产生联想,解题思路更拓宽一步,会列出:

$$52 \times 4 - (42 \times 7 - 34 \times 4)$$

前四盒球数之和减去前三盒球数之和得第四盒数;

$$\text{又: } 34 \times 4 - (42 \times 7 - 52 \times 4)$$

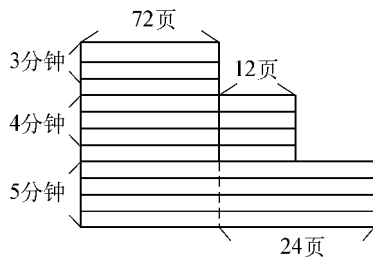
后四盒球数之和减去后三盒球数之和得第四盒数。

例 3 小林数一叠纸,前三分钟每分钟数 72 页,后四分钟每分钟数 84 页,最后五分钟每分钟数 96 页,这段时间内他平均每分钟数多少页?

点评 学生一般会列出 $(72 \times 3 + 84 \times 4 + 96 \times 5) \div (3 + 4 + 5) = 86$ (页)。用的是总页数 $\div$ 总时间 = 平均每分钟数的页数。我们如果要求用算术方法列出另外的算式,有学生会觉得为难。

配以线段,再让学生思考,会受到启发而拓展思维。

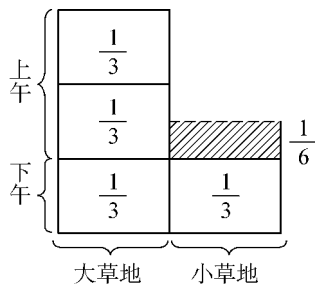
求平均数可以用移多补少法:从图中看作,将多余的部分平均分,再加上一个基本数就可求出平均每分钟数的页数了。于是:



$$72 + (12 \times 4 + 24 \times 5) \div 12 = 72 + 14 = 86 \text{ (页)}$$

例 4 俄国大文豪托尔斯泰,曾留下了著名的“托尔斯泰问题”:一组割草人要把两块草地割完。大的一块比小的一块大一倍,上午全部人在大的一块草地上割草。下午一半人仍留在大草地上,到傍晚时割完,另一半人去割小草地上的草,到傍晚时还剩下一块未割完。这块地由一个割草人再用一天时间刚好割完,问这组割草人共有多少人?

点评 这题条件和问题都比较抽象,一般学生不易理解,根据题意得知大草地面积为小草的 2 倍。上半夭全部人在大草地上,下半夭大草地上只留总人数的 $\frac{1}{2}$,由此推断,下午大草地上割草面积为上午的 $\frac{1}{2}$ 。则下午在小草地上的割草面积也是上午大草地割草面积的 $\frac{1}{2}$,用长方形示意图可让学生更清楚地理解题意:



阴影部分面积相当于大草地的 $\frac{1}{6}$,由一个人一天完成, $\frac{1}{3}$ 的面积需 2 个一天完成。4 个人半天可以完成。总人数必定是 8 人。也就是说全组人数的一半用半天割草 $\frac{1}{3}$,一天能割掉 $\frac{2}{3}$ 的草,那么全组人数一天可割掉 $\frac{4}{3}$ 的草,所以 $\frac{4}{3} \div \frac{1}{6} = 8$ (人) 我们相信,借助图解让学生弄清

算理,学习效果会更好些。

例5 有十级台阶,可以一步跨一级,也可以一步跨两级,从第一级走到第十级有几种不同的走法? 如果第六级楼梯坏了,又有几种不同走法?

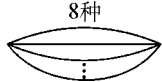
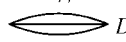
点评 雾里看花不分明,这十级台阶该怎么走,不妨借助表格作一番分析:

台阶级数	1	2	3	4	5	...	8	9	10	...
走 法	1	2	3	5	8	...	34	55	89	...

学生会说:一级台阶只有一种走法,两级台阶会有两种走法;一级一级跨,两级一跨。说法正确,稍嫌噜嗦。数学解题,不妨用特定的数学语言,这两种走法可用“11、2”来表示。那么三级台阶有:111、12、21三种走法。学生会说:找到规律了,四级台阶有四种走法。且慢下结论,用数字语言表示一下:“1111、112、121、221、22”四级台阶有五种走法,重新分析规律,发现从第三级台阶起、每前两个数之和等于下一个数,再用上述方法推算下去,确认推导正确。于是很快完成第一个问题所求。

至于第二个问题,先可以这样分析:

台阶级数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
走 法	1	2	3	5	8						
	A $\longrightarrow$ B $\longrightarrow$ C $\longrightarrow$ D										

从第一级到第五级看作 A 到 B,有 8 种不同走法。而 B 到 C 只有一种走法,此时站在第七级台阶上,应看作站在平地上,而第八、九、十级台阶仍看作最初的一、二、三级台阶,即从第一级到第三级有三种走法,于是用乘法原理表示: A  B $\longrightarrow$ C  D

$$8 \times 1 \times 3 = 24(\text{种})$$

可否用原来的加法进行式求得呢,其实也行。只要将第六级台阶级走法看作 0,第七级为 $8+0=8$,然后: $0+8=8$, $8+8=16$, $16+8=24$,十分简捷。

其实,在第一级台阶走法前再加一个 1,就成了著名的斐波那契数列:

$$1、1、2、3、5、8、13、21、34\cdots$$

试一试

1. 五年级小朋友在操场上排成七列横队,平均每列 38 人,最多一列 47 人,其次一列 43 人,每列人数不等。最少的两列最多有几人?