图的着色问题研究

张桂芝　黄月梅　安永红　著

内蒙古科学技术出版社

图的着色问题研究

张桂芝　黄月梅　安永红　著

内蒙古出版集团
内蒙古科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

图的着色问题研究 / 张桂芝，黄月梅，安永红著.
—赤峰 ：内蒙古科学技术出版社，2014. 3
ISBN 978- 7- 5380- 2399- 2

Ⅰ. ①图… Ⅱ. ①张… ②黄… ③安… Ⅲ. ①计算机图形学—研究 Ⅳ. ①TP391.41

中国版本图书馆CIP数据核字（2014）第046818号

出版发行：内蒙古出版集团　内蒙古科学技术出版社
地　　址：赤峰市红山区哈达街南一段4号
邮　　编：024000
电　　话：(0476) 8225264　8224848
邮购电话：(0476) 8224547
网　　址：www.nm- kj.com
责任编辑：刘冲　许占武
封面设计：永　胜
印　　刷：赤峰金源彩色印刷有限责任公司
字　　数：123千
开　　本：787× 1092　1/16
印　　张：6.375
版　　次：2014年3月第1版
印　　次：2014年3月第1次印刷
定　　价：30.00元

前 言

图论是研究离散对象二元关系结构的一个数学分支，其研究对象是图，图指的是一些点以及连接这些点和线的总体. 通常用点代表事物，用连接两点的线代替事物之间的关系. 图论是研究事物对象在上述表示法中具有的特征与性质的学科. 它与组合数学、拓扑学、代数学等学科关系密切，其应用十分广泛，已经渗透到物理学、化学、电子学、生物学、运筹学、经济学、系统工程以及计算机科学等诸多学科领域，越来越受到科学界尤其是数学界的重视和关注，并成为今后相当时期的前沿科学. 图论中很重要的一个研究方向就是图的着色（染色）理论，图的着色理论内容十分丰富，且具有广泛的应用背景，是图论中十分活跃的研究课题. 图的着色包括边着色、顶点着色以及面着色.

组合计数理论是组合学中一个最基本的研究方向，主要研究满足一定条件的安排方式的数目及其计数问题. 特别地，在研究置换群的性质时引出的Pólya计数定理是组合计数理论中重要的定理. 它是枚举有限结构个数的一个基本工具，它计算了在一个集合上产生的等价类的个数.

图的色轨道多项式是图的色多项式与Pólya计数公式的结合与推广，为约束条件下的图的着色计数问题提供了所需的工具与方法，在解决实际问题时也会有广泛的应用. 本书在第三章中给出了色轨道多项式的一些性质，第四章解决了特殊图在不同约束条件下的着色问题，第五章给出了色轨道多项式在实际问题中的应用.

1957年Berge首次提出$n-$可扩路的问题，而自从Plumer于1980年首次引入$n-$可扩图的概念以来，一些学者对可扩图的度和、可迹性、Hamilton性等方面进行研究，并得到一系列成果. 第六章中得到了一个推论和连通的$n-$可扩图可迹的一个充分条件.

Hedetniemi揭示了一个图的色数与直积图色数之间关系的猜想，将代数思想用于研究图的着色问题. Benoit Larose,Claude Tardif用收缩的观点研究Hedetniemi猜想，并证明了对两个连通图和顶点传递的射影的核，Hedetniemi猜想的等价命题成立. 第七章中根据以上研究结果及一个图是柱心的充分条件，证明了对几类特殊的图Hedetniemi猜想等价命题

成立.

本书第一章、第三章、第四章由张桂芝编写,第二章和第五章由安永红编写,第六章和第七章由黄月梅编写.

本书是内蒙古自治区高等学校科学技术研究项目NJZC14315,呼伦贝尔学院项目YJQNZC201218、YJYBZC20121224的研究成果.

由于作者水平有限,编写时间比较匆促,书中难免存在缺点和错误,恳请读者批评指正.

作者

2013-10-01

目　　录

第一章 绪 论

1.1 图论的发展历程

图论是研究离散对象二元关系中关系结构的一个数学分支，其研究对象是图，图指的是一些点以及连接这些点的线的总体. 通常用点代表事物，用连接两点的线代表事物之间的关系，图论则是研究事物对象在上述表示法中具有的特征与性质的学科. 它与组合数学、拓扑学、代数学等学科关系密切，其应用十分广泛，已经渗透到物理学、化学、电子学、生物学、运筹学、经济学、系统工程以及计算机科学等诸多学科领域，越来越受到科学界尤其是数学界的重视和关注，并成为今后相当时期的前沿科学. 图论的产生和发展经历了两百多年的历史，大体上可以划分为三个阶段：

第一阶段是从1736年到19世纪中叶，这时的图论处于萌芽状态，多数问题都是围绕着游戏而提出并加以归纳为数学问题. 柯尼斯堡的七桥问题是图论在萌芽时期最具有代表性的问题. 18世纪普鲁士的柯尼斯堡的七桥问题：当地的居民想知道能否从任意一陆地出发，走遍连接该地的7座桥又回到原地? 其条件是每座桥都经过一次. 很多人都曾试验过，但都失败了. 1736年瑞士数学家欧拉把七桥问题化为一个数学问题，提出了一笔画问题并给出其判断准则，从而判定七桥问题不存在解. 他发表的关于七桥问题的论文被公认为是图论历史上的第一论文且图论作为一个独立的学科出现的标志，也使Euler成为了图论和拓扑学的创始人.

第二阶段从19世纪中叶到1936年. 这个时期中出现了大量的图论问题以及一批精彩的结果，如四色问题（1852年）、哈密顿（Hamilton）问题（1856年）、Menger定理（1927年）、Kuratowski（1930年）定理和Ramsey（1930）定理，并且逐步将图论问题应用于解决其他领域中的某些难题. 最有代表性的工作是基尔霍夫（Kirchhoff, 1847年）和凯莱（Cayley, 1857年）分别用树的概念去研究电网络和有机化合物的分子结构. 1936年，匈牙利数学家柯尼希写出了第一本图论专著《有限图与无限图的理论》. 图论作为数学的一个新分支已基本形成.

从1936年以后是第三阶段，由于生产管理、军事、交通运输、计算机和通讯网络等方面许多离散性问题的出现，使得图论领域的研究呈现出蓬勃发展的趋势. 随着计算机技术的迅猛发展，图论的研究也注入了新的活力，利用计算机技术解决图论问题成为一个令人感兴趣的研究方向. 1976年，美国的Appel和Haken等人借助计算机证明了困扰人们一百多年的著名的图论难题——四色问题.

1.2 图着色问题的发展

图论中很重要的一个研究方向就是图的着色（染色）理论，图的着色理论内容十分丰富，且具有广泛的应用背景，是图论中十分活跃的研究课题. 图的着色包括边着色、顶点着色以及面着色.

图的着色问题是起源于1852年Morgan写给朋友Hamilton的一封信，其中提到他的一个学生发现英国地图可以用4种颜色去染，使得有共同边界的地区着上不同的颜色. 更广泛地说，对于平面的任何地图染多少颜色是最少可能的？1878年Cayley首先作为一个公开问题宣布. Kempe（肯普）首先宣称他给出一个证明说是四种颜色就可以了（FCP，四色定理的起源）. 1890年Heawood（赫伍德）宣称他发现了Kempe证明中的一个错误，不过他使用Kempe的方法可以轻而易举证明一个平面图是5-可着色的，即五色定理. 1976年，Appel和Hakcn给出了四色定理一个证明，这也是第一次使用计算机来做数学证明. 后来，Robertson，Seymour等在给出一个FCP证明，减少了计算机的计算量. 人们还在等待着FCP证明完全由组合方法给出的证明.

尽管迄今为止仍没有得到非计算机的理论证明，但是人们在解决四色猜想问题的过程中所得出的思想、方法和技巧远远超出了解决四色问题的最初目的，并且为图论理论宝库增添了一个又一个的精彩结果. 1912年Birkhoff为解决四色问题首次引进色多项式的概念，1932年Whitney进一步将此概念扩充到任意图上，并建立了一些基本结果，其后关于色多项式的研究深入开展，积累了许多成果，并产生不少新课题. 诸如，对色多项式系数的研究，如何去判断一个多项式是否是色多项式以及图的色唯一性等等，成为图论中一个热门研究领域. 人们一直都热衷于色多项式系数的研究，目的是想找出什么样的多项式是色多项式，有关色多项式系数的一些结论总结如下：

1. 设 G 是含 m 条边的 n 阶图，则

（1）$\chi(G,k)$ 是 n 次多项式；

（2）$\chi(G,k)$ 中 k^n 的系数为1；

（3）$\chi(G,k)$ 中 k^{n-1} 的系数为 $-m$；

（4）$\chi(G,k)$ 中常数项为0；

（5）$\chi(G,k)=\prod\chi(G_i,k)$，式中$G_i$是 G 的第 i 个连通分支；

（6）$\chi(G,k)$ 中系数非零的最低次幂是 G 的连通分支数.

2. G 是一个图，有 n 个顶点，$m\ (m\geqslant 1)$条边，则 $\chi(G,k)$ 中一定含有 $k(k-1)$ 的因式.

3. 令 G 是一个图，n 个顶点，$m\ (m\geqslant 1)$条边，则 $\chi(G,k)$ 中系数的和为零.

4. 若图　的色数是 k，当$m\geqslant k$时；则 $0,\cdots,m-1$是图 G 的色多项式的根.

5. 图的色多项式无负根.

生活及科学领域中许多问题的数学模型都可以用图的形式来建立，然后对图中某些对象按照一定规则进行分类，而这种分类方法的一种简单而直观表达方式就是染色. 再如：解决时间表问题、排课程表问题、交通状态和运输安排等等实际问题. 所以染色问题在组合分析和实际生活中有着广泛的应用，是图论研究中一个很活跃的课题，得到了许多有趣而实用的结果. 同时又拓展出一些新的分支. 比如，除了经典的点染色，边染色之外，（点边）全染色，列表染色，点强全染色，强边染色，邻强边染色，关联染色，距离面染色，区间染色，子染色.

1.3 组合数学及其特点

组合数学，属于离散数学的范畴，但有时人们也把组合数学和图论加在一起算成是离散数学. 组合数学主要研究离散对象在给定条件下的安排或配置，即研究在给定的条件下离散对象集合的计数和枚举. 组合数学是一门古老而又新兴的数学分支，我国古人早在“河图、洛书”中已对一些有趣的组合问题给出了正确的解答. 近代随着计算机的出现，组合数学这门学科得到了迅猛的发展，成为了一个重要的数学分支. 组合数学的发展改变了传统数学中分析和代数占统治地位的局面. 现代数学可以分为两大类:一类是研究连续对象的，如分析、方程等；另一类就是研究离散对象的组合数学.

组合数学包含着十分丰富的内容，按其所研究问题的类型划分，可分为组合计数理论、组合设计、组合矩阵论、图论、组合优化等五方面. 组合计数理论研究满足一定条件的安排方式的数目及其计算问题，这是组合数学中最基本的研究方向. 组合设计研究满足某些特定要求的组态（子集系）的存在性和构造问题. 组合矩阵论研究矩阵的组合性质，即矩阵的那些仅与

零元素位置分布有关，而与非零元的具体数值无关的那些性质，它可作为许多组合对象的代数表示，图论研究用点线联系表示的组合结构——图的性质，探讨它们的各种结构参数.组合优化是在所论安排具有某种最优标准寻求和构造最优安排问题，它又是运筹学的一个分支，前四个方面常常相互渗透. 例如，周知的匹配问题既可用矩阵语言描述，又可用图论方法讨论，还涉及组合计数多项式. 组合数学有四个明显特点:

（1）组合问题的广泛性，涉及的学科多。例如，反映三维空间中多面体的顶点数、棱数和面数之间关系的Euler公式就是几何中的组合问题。碳氢化合物C_nH_{2n+2}的同分异构物，用组合图论分析的结果在化学实验中得到了证实，引出了专著《图论在化学中的应用》. 信息编码、电路设计、生产管理系统等问题，都要用到组合计数和组合设计知识.

（2）问题提法的简易性和问题解决的复杂性. 许多组合计数问题可表述得简明易懂，但要寻求一个有效的枚举方法，却要用到函数论中的Taylor展式和其他高级运算. 一些组合设计问题就像数学游戏那样通俗，但构作起来却需要矩阵和群论等代数工具，有时还要用计算机做大量的计算.

（3）问题求解的多途径性. 同一个组合计数问题，可从不同角度观察，得出几个计算公式，从而推出许多组合恒等式，一个组合设计问题，可用矩阵方法求解，也可用图论方法求解，显示多方位的协调性.

（4）问题的趣味性和结论的优美性. 这就诱导人们去探索，许多形式漂亮的组合结论已渗入数学的其他分支中. 组合论专家F. Harary说过:“组合数学中的计算方法与其说是一门科学，还不如说它是一种艺术”，这就揭示了该学科的特点.

组合数学的发展大致分为以下几个阶段:

第一阶段是17世纪60年代前，代表性的工作是1665年帕斯卡提出的“论算术三角形”和1666年莱布尼茨给出的“论组合的艺术”. 这期间的主要研究内容是排列和组合的计算公式、排列数之间的一些等式关系、整数的分拆等问题. 这两部著作给出了组合数学的最基本的计算公式和原则，这也意味着组合数学作为数学的一门学科已具有雏形.

第二阶段是17世纪60年代至20世纪60年代. 这期间组合数学的研究内容、研究方法，在其他学科中的应用等有了很大的发展. 这期间的代表作有1901年德国数学家内析（E.Nett）的第一本组合数学教材《组合数学教程》，英国数学家马洪（P.A.Macmahon）的两大卷《组合分析》，爱多士（P.Erdos）的论文集《计数的艺术》等. 1936年英国统计学家费舍尔（R.A.Fisher）等人成功地应用正交拉丁方到麦田统计实验中，这很大地促进了现代组合数学的形成.

第三阶段是20世纪60年代至今，罗塔（G.Carlorota）对现代组合数学的建立做出了重要工作. 罗塔呼吁建立组合数学这门学科、组织讨论班、编辑组合数学论文、组织召开组合数学会议、创立专门的学术刊物等等. 罗塔和他的同事们发表了现代组合数学的基础性论文10篇. 1958年在美国哥伦比亚召开了第十届应用数学会议，会后美国数学会出版了一本《组合分析》. 1965年创立了组合数学的专门期刊《组合理论期刊》（Journal of Combinatorial Theory）. 1969年在牛津大学召开了第一届组合数学的专门会议.

60年代后组合数学逐渐发展成了一个独立的数学分支. 由于组合数学在其他学科中的重要应用，后续又发展了一些新的数学分支，如组合几何、组合矩阵、组合拓扑、组合代数等等.

组合数学不仅在基础数学研究中具有极其重要的地位，在其他的学科中也有重要的应用，如在计算机科学、编码和密码学、物理、化学、生物等学科中均有重要应用. 微积分和近代数学的发展为近代的工业革命奠定了基础，而组合数学的发展则是奠定了20世纪的计算机革命的基础. 当今计算机科学界的最权威人士很多都是研究组合数学出身的. 美国最重要的计算机科学系都有第一流的组合数学家. 计算机科学通过对软件产业的促进，带来了巨大的效益. 组合数学在国外早已成为十分重要的学科，甚至可以说是计算机科学的基础. 一些大公司，如IBM、AT&T都有全世界最强的组合研究中心. Microsoft 的Bill Gates近来也在提倡和支持计算机科学的基础研究.美国政府也成立了离散数学及理论计算机科学中心DIMACS（与Princeton大学、Rutgers大学、AT&T 联合创办的，设在Rutgers大学），该中心已是组合数学理论计算机科学的重要研究阵地. 美国国家数学科学研究所（Mathematical Sciences Research Institute）在1997年选择了组合数学作为研究专题，组织了为期一年的研究活动. 日本的NEC公司还在美国设立了研究中心，理论计算机科学和组合数学已是他们重要的研究课题，该中心主任R. Tarjan即是组合数学的权威. 美国另外一个重要的国家实验室Sandia国家实验室有一个专门研究组合数学和计算机科学的机构，主要从事组合编码理论和密码学的研究，在美国政府以及国际学术界都具有很高的地位. 由于生物学中的DNA的结构和生物现象与组合数学有密切的联系，各国对生物信息学的研究都很重视，这也是组合数学可以发挥作用的一个重要领域. 由于DNA就是组合数学中的一个序列结构，美国科学院院士，近代组合数学的奠基人Rota教授预言，生物学中的组合问题将成为组合数学的一个前沿领域.

由于计算机软件的促进和需求，组合数学已成为一门既广博又深奥的学科，需要很深的数学基础，逐渐成为了数学的主流分支. 20世纪公认的伟大数学家盖尔芳德预言组合数学和几何学将是21世纪数学研究的前沿阵地. 这一观点得到了国际数学界的赞同，我国数学界更

是对此高度赞同和响应.

加拿大在Montreal成立了试验数学研究中心，他们的思路可能和吴文俊院士的数学机械化研究中心的发展思路类似，使数学机械化、算法化，不仅使数学为计算机科学服务，同时也使计算机为数学研究服务.吴文俊院士指出，我国传统数学中本身就有浓厚的算法思想. 今后的计算机要向更加智能化的方向发展，其出路仍然是数学的算法和数学的机械化. 另外的一个有说服力的现象是，组合数学家总是可以在大学的计算机系或者在计算机公司找到很好的工作，一个优秀的组合数学家自然就是一个优秀的计算机科学家. 因此，美国所有大学计算机系都有组合数学的课程.

除上述以外，欧洲也在积极发展组合数学，英国、法国、德国、荷兰、丹麦、奥地利、瑞典、意大利、西班牙等国家都建立了各种形式的组合数学研究中心. 近几年，南美国家也在积极推动组合数学的研究. 澳大利亚、新西兰也组建了很强的组合数学研究机构. 值得一提的是，亚洲的发达国家和地区也十分重视组合数学的研究. 日本有组合数学研究中心，并且从美国引进人才，不仅支持日本国内的研究，还出资支持美国的有关课题的研究，这样使日本的组合数学这几年的发展极为迅速. 我国台湾、香港两地也从美国引进人才，大力发展组合数学. 新加坡、韩国、马来西亚也在积极推动组合数学的研究和人才培养. 台湾的数学研究中心也正在考虑把组合数学作为重点方向来发展. 世界各地对组合数学如此钟爱显然是有原因的，那就是没有组合数学就没有计算机科学，没有计算机软件.

1.4 关于色轨道多项式的研究

组合计数理论是组合学中一个最基本的研究方向，主要研究满足一定条件的安排方式的数目及其计数问题. 特别地，在研究置换群的性质时引出的Pólya计数定理是组合计数理论中重要的定理. 它是枚举有限结构个数的一个基本工具，它计算了在一个集合上产生的等价类的个数.

Pólya计数定理最初是为了解决化学碳水化合物的计数. 19世纪60年代，英国化学家布朗给出了较为适用的用图表表示分子结构的方法，和现如今所用的分子结构式本质相同. 布朗的方法第一次解释了同分异构现象. 这很自然的导致同分异构体的计数问题. 1875年，Caley曾运用树图并应用生成函数给出过有关化学碳水化合物计数的方法，但此法复杂难懂，计算费力且不实用. 1937年，Pólya发表了长达一百多页的著名论文《关于群，图与化学化合物的组合计数方

法》，论文中 Pólya把生成函数的经典方法和置换群理论中的基本结果相结合，推出了Pólya计数定理，为一大类计数问题提供了有效地解决方法. 这篇论文是他的关于计数研究工作的巅峰之作，也是图的计数理论的奠定之作. Pólya计数理论，不仅是图的计数理论发展史上的一座里程碑，更是组合学历史中的一座丰碑，甚至在整个现代数学领域中也占有一席之地. Burnside引理解决的是在一个群作用下集合等价类的技术问题. 结合图的对称性，将图形数目的计数问题转化为在群作用下集合等价类的计数问题. 利用Burnside引理可以推出Pólya计数定理.

De Bruijn定理是Pólya 定理的推广. 它从两个方向推广了Pólya 定理，一是利用组合学中的另一有力工具——麦比乌斯反演——去计算一般有限群作用下的轨道；二是把Pólya定理纳入群不变量理论的架构，变成是某条定理的特殊情况.2000年内蒙古大学的杜清晏教授首次提出色轨道多项式概念[8]，它是图的色多项式和Pólya计数公式的结合与推广，它为约束条件下图的着色计数问题提供了所需的工具与方法. 色轨道计数理论在解决实际问题时也会有广泛的应用. 而目前关于图的轨道计数多项式的研究并不多，只是在文献[8]中引入了色轨道多项式，定义了相关的概念诸如 $P-$图、$SC-$图等，给出了此多项式的表达式及计算方法，讨论了色轨道多项式的一些性质，并利用此方法解决了项链问题的具体计数公式. 文献[9]中又引入了色权轨道多项式，它是色轨道多项式的推广 . 在文献[7]中Cameron研究了轨道的流多项式，轨道的势差多项式及其轨道的Tutte多项式. 更多关于图的着色问题与组合计数问题的研究情况可参考本文的其他文献.

1.5 本书主要研究内容

第一章简要介绍了本文所研究课题的发展历程、发展现状以及研究意义.

第二章给出了本文所涉及到的图论、近世代数、组合数学、数论中的一些基本概念与基本定理.

第三章讨论了色轨道多项式以及局部标定图的色轨道多项式的相关性质.

第四章解决了特殊图，如：正六面体，正棱柱图，棱柱图，广义Peterson图 $GP(n,2)$ ，双轴轮图，Mŏbius梯等，在不同约束条件下的着色问题.

第五章给出了色轨道多项式在化学上的一些应用.

第六章根据图中三点独立集的度和得到了连通的n–可扩图可迹性的一个充分条件。

第七章证明了对几类特殊的图Hedetniemi猜想等价命题成立.

第二章　预备知识

2.1 关于图的基本概念

本章主要介绍图论的基本概念、基本性质，详见文献[1,2].

2.1.1 图的定义与术语

定义　二元组(V,E)称为图（graph）. V为顶点（node）或顶点（vertex）集. E为V中顶点之间的边的集合.

点对(u,v)称为边（edge）或称弧（arc），其中$u,v\in V$，称u,v是相邻的（adjacent），称u,v与边(u,v)相关联（incident）或相邻.

若边的点对(u,v)有序则称为有向（directed）边，其中u称为头（head），v称为尾（tail）. 所形成的图称有向图（directed graph）. 为对于u来说(u,v)是出边（outgoing arc）；对于v来说(u,v)是入边（incoming arc）. 反之，若边的点对无序则称为无向（undirected）边，所形成的图称无向图（undirected graph）.

阶（order）：图G中顶点集V的大小称作图G的阶.

环（loop）：若一条边的两个顶点为同一顶点，则此边称作环.

简单图（simple graph）：没有环且没有多重弧的图称作简单图.

定向图：对无向图G的每条无向边指定一个方向得到的有向图.

底图：把一个有向图的每一条有向边的方向都去掉得到的无向图.

逆图：把一个有向图的每条边都反向由此得到的有向图.

竞赛图（tournament）：有向图的底图是无向完全图，则此有向图是竞赛图.

邻域（neighborhood）：在图中与u相邻的点的集合$\{v\mid v\in V,(u,v)\in E\}$，称为u的邻域，记为$N(u)$.

度（degree）：一个顶点的度是指与该边相关联的边的条数，顶点v的度记作deg（v）. 握手

定理：无向图：$\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$；有向图：$\sum_{v\in V}\deg^{+}(v)=\sum_{v\in V}\deg^{-}(v)$.

入度（indegree）：在有向图中，一个顶点v的入度是指与该边相关联的入边（即边的尾是v）的条数，记作 $\deg^{+}(v)$.

出度（outdegree）：在有向图中，一个顶点的出度是指与该边相关联的出边（即边的头是v）的条数，记作 $\deg^{-}(v)$.

孤立点（isolated vertex）：度为0的点.叶（leaf）：度为1的点.

源（source）：有向图中，$\deg^{+}(v)=0$ 的点.汇（sink）：有向图中，$\deg^{-}(v)=0$的点.

奇点（odd vertex）：度为奇数的点.偶点（even vertex）：度为偶数的点.

2.1.2 路径与回路

途径（walk）：图G中一个点边交替出现的序列$p=v_{i_0}e_{i_1}v_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}v_{i_k}$，满足$v_{i_j}\in V, e_{i_j}\in E$, $e_{i_j}=(v_{i_{j-1}},v_{i_j})$.

迹（trail）：边不重复的途径.

路（path）：顶点不重复的迹.

简单图中的路可以完全用顶点来表示，$P=v_{i_0}v_{i_1}\cdots v_{i_k}$.若$p_1=p_m$，称闭的（closed）；反之，称为开的（open）.

闭途径（closed walk）：起点和终点相同的途径.

闭迹（closed trail）：起点和终点相同的迹，也称为回路（circuit）.

圈（cycle）：起点和终点相同的路.

途径（闭途径）、迹（闭迹）、路（圈）上所含的边的个数称为它的长度（length）.

简单图G中长度为奇数和偶数的圈分别称为奇圈（odd cycle）和偶圈（even cycle）.

对任意$u,v\in V(G)$，从x到y的具有最小长度的路称为x到y的最短路（shortest path），其长度称为x到y的距离（distance），记为$d_G(u,v)$.

图G的直径（diameter）：$D=\max\{d_G(u,v)\,|\,\forall u,v\in V(G)\}$.

简单图G中最短圈的长度称为图G的围长（girth），最长圈的长度称为图G的周长（perimeter）.

2.1.3 连通性

连通（connected）：在图G中，两个顶点间，至少存在一条路径，称两个顶点连通的（connected）；反之，称非连通（unconnected）.

强连通（strongly connected）：在有向图G中，两个顶点间，至少存在一条路径，称两个顶点

强连通.

弱连通(weakly connected):在有向图G中,两个顶点间,若不考虑G中边的方向的图才连通的,称原有向图为弱连通.

连通图(connected graph):图G中任两个顶点都连通.

连通分量或连通分支(connected branch, component):非连通无向图的极大连通子图(maximally connected sub-graph). 具体说,若图G的顶点集$V(G)$可划分为若干非空子集$V_1,V_2,\cdots,V_\omega$,使得两顶点属于同一子集当且仅当它们在G中连通,则称每个子图$G[V_i]$为图G的一个连通分支($i=1,2,\cdots,\omega$). 图G的连通分支是G的一个极大连通子图. 图G连通当且仅当ω=1.

记号$[S,S']$表示一端在S中另一端在S'中的所有边的集合.

块(block)是指没有割点的极大连通子图.

2.1.4 基本图例

先给出图论中的一些特殊的图:

孤立点(isolated vertex):图中度为零的点.

零图(null graph): $E=\varnothing$,即只有孤立点的图.n阶零图记为N_n.

平凡图(trivial graph):只由一个孤立点构成的图.

空图(empty graph): $V=E=\varnothing$的图.

正则图(regular graph):如果图中所有顶点的度皆相等,则此图称为正则图.

有向无环图(directed acyclic graph(DAG)):有向的无环的图.

完全图(complete graph):任何两个顶点都相互邻接的简单图n阶完全图常记作K_n.

图2–1中的几个图是常用的几个完全图. 显然, K_n是(n–1)度正则图.

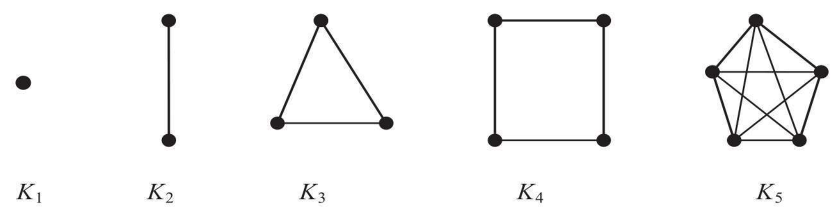

图 2–1