高等数学基础

GAODENG SHUXUE JICHU

马景艳 主 编

郭静宇 杨文泰 郭丽娜 副主编

甘肃民族出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础 / 马景艳主编. —兰州：甘肃民族出版社，2012.8
ISBN 978-7-5421-2168-4

Ⅰ.①高… Ⅱ.①马… Ⅲ.①高等数学 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 195144 号

书　　名：高等数学基础
作　　者：马景艳　主编
责任编辑：张兰萍
封面设计：兰州山水文画广告有限公司（Designer / 张斌）
出　　版：甘肃民族出版社（730030　兰州市读者大道 568 号）
发　　行：甘肃民族出版社发行部（730030　兰州市读者大道 568 号）
印　　刷：甘肃天河印刷有限责任公司
开　　本：787 毫米× 1092 毫米　1/16　印张：25　插页：2
字　　数：480 千
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1~1 000
书　　号：ISBN 978-7-5421-2168-4
定　　价：55.00 元

甘肃民族出版社图书若有破损、缺页或无文字现象，可直接与本社联系调换。
邮编：730030　地址：兰州市读者大道 568 号　网址：http://www.gansumz.com
投稿邮箱：liuxingtian@yahoo.com.cn
发行部：葛慧　联系电话：0931-8773271（传真）E-mail:gsmzgehui3271@tom.com

内容提要

本书主要内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用以及线性代数中的多项式、行列式、矩阵与矩阵的运算等。

本书编写过程力求通俗浅显、叙述详细、逻辑清晰，并较多地配置例题和习题，便于教学，有较大的适应面，适合大学预科学生使用，也可作为高等专科院校不同专业学生参考用书。

前　　言

预科教育是大学教育的特殊层次，预科教材应体现这种特殊性。随着基础教育的变革，中学数学教材有了大幅的调整；同时，大学各学科相关专业的发展趋势，也对数学素质与能力有了进一步的要求。因此，我们在总结实际教学经验的基础上编写了本教材。

在编写教材时，我们既考虑到教学大纲对内容和程度的要求，又考虑到数学学科的特点以及目前预科教育发展的实际教学情况，力图编写出一本适合实际教学需要的教材，使其能较好地起到“承前启后”作用。

本教材着重体现了数学学习对培养学生逻辑思维能力的重要影响。因此，教材对内容取舍、结构安排、程度要求及一些具体内容的处理都进行了认真分析和研究，也参考了不少高等院校编写的相关教材。教材中介绍的基本原理和方法，尽量采用学生易于接受的表述方式和证明过程，希望这样的处理既能保持数学学科本身的系统性、逻辑严密性和科学性，又有利于授课教师的实际教学。

本教材的编写，得到了西北民族大学校领导，西北民族大学教务处、预科部等职能部门领导的大力支持，在此表示衷心的感谢。

限于编者水平，同时编写时间也比较仓促，因而教材难免存在疏漏和不妥之处，希望广大读者提出批评和指正。

编者

2012 年 8 月

目　　录

第一章　复数

§1　复数的概念

有理数和无理数统称为实数，实数的性质为有序性、稠密性、连续性，对四则运算及非负实数的开方有封闭性，实数范围内负数开方没有意义，而在讨论二次方程，三次方程及更高次方程的一般解法时，实数是不够用的.

在16世纪，先后有数学家将负数的平方根用到公式中，并提出“虚数”一说，1747年法国的达朗贝尔指出了虚数的表达形式为 $a+bi$，瑞士数学家欧拉首创了用符号 i 作为虚数单位，并规定 $i^2=-1$，有了虚数单位后，出现了复数的定义.

1. 复数的定义

形如 $a+bi$ 的数称为复数，其中 $a,b\in R$，表示为 $Z=a+bi$，a 为 Z 的实部，b 为 Z 的虚部，并记作：$ReZ=a$，$ImZ=b$，i 为虚数单位，$i^2=-1$.

全体复数构成的集合称为复数集，记作 C，显然，$R\subseteq C$.

$$\begin{array}{c}\text{复数}\\ a+bi\end{array}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{实数}a\\ b=0\end{array}\begin{cases}\text{有理数}\\ \text{无理数}\end{cases}\\ \begin{array}{l}\text{虚数}a+bi\\ b\neq 0\end{array}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{纯虚数}bi\\ \quad a=0\end{array}\\ \begin{array}{l}\text{一般虚数}a+bi\\ \quad a\neq 0\end{array}\end{cases}\end{cases}$$

2. 复数的比较

i) 虚数不能比较大小.

ii) 两个复数相等的充要条件: 若 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$.

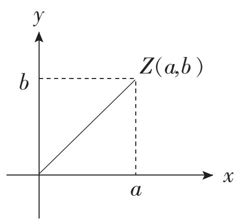
例 1 已知$(2x-1)+i=y-(3-y)i$,求实数 x, y.

解 由两个复数相等的充要条件,得:

$$\begin{cases} 2x-1=y \\ 1=-(3-y) \end{cases} \quad 解得: \begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=4 \end{cases}$$

3. 复数的几何意义

(1) 复平面的建立:



任何一个复数 $a+bi$ 都可以由一个有序数对(a,b)唯一确定. 我们借用平面直角坐标系来表示,将这样的表示复数的平面称为复平面,也称 Z 平面.

由于 x 轴上的点对应着实数,称 x 轴为实轴. y 轴上的点除原点外对应着纯虚数,称 y 轴为虚轴.

建立了这样的复平面之后,显然每一个复数在复平面内有唯一的点和它对应; 反之复平面内的每一个点都有唯一的一个复数和它对应,即: 复数集 C 和复平面内所有的点所成集合是一一对应的.

(2) 复数与向量的对应关系:

在复平面内,以原点 O 为起点,对应于复数 $a+bi$ 的点 $Z(a,b)$ 为终点的连线 OZ 是一条有方向的线段,称为向量,记作$\overrightarrow{OZ}$

$$Z=a+bi \leftrightarrow (a,b) \leftrightarrow \overrightarrow{OZ}$$

4. **模与共轭复数**

(1) 复数的模:

原点 O 到 $Z=a+bi$ 所对应的点 $Z(a,b)$ 的距离称为复数 Z 的模,记作:

$$r=|OZ|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

或

$$|Z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$$

(2) 共轭复数:

设 $Z=a+bi$,$\bar{Z}=a-bi$,称 Z 与 $\bar{Z}$ 为共轭复数.

例 2 求 $Z_1=3+4i$ 及 $Z_2=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}i$ 的模,并比较大小.

解 $|Z_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ $|Z_2|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+(-\sqrt{2})^2}=\dfrac{3}{2}$

显然,$|Z_1|>|Z_2|$.

例 3 设 $Z\in C$,满足 $|Z|=4$ 的点 Z 表示什么图形?

解 方法一:设 $Z=x+yi$,$\sqrt{x^2+y^2}=4$,$x^2+y^2=16$

方法二:$|Z-0|=4$

点 Z 与原点的距离等于 4,故:满足条件点 Z 的集合是以原点为圆心以 4 为半径的圆.

习题一

1. m 取何值时,复数 $(m^2-3m-4)+(m^2-5m+6)i$ 是:

(1) 实数　　(2) 纯虚数　　(3) 零

2. 求 x,y 的值:

(1) $x^2-y^2+2xyi=8+6i$　　(2) $2x^2-5x+2+(y^2+y-2)i=0$

3. 已知复数:$1,i,6-8i,1+i,2-\sqrt{2}i$

(1) 描述复平面内上述复数表示的点;

(2) 求各共轭复数，并描出各共轭复数表示的点.

4. 比较复数 $Z_1=-5+12i$; $Z_2=-6-6\sqrt{3}i$ 的模的大小.

5. 设 $Z\in C$，满足下列条件的 Z 表示什么图形?

(1) $|Z|<3$;　　　　　　　　(2) $2\leqslant|Z|<5$.

§2　复数的运算

1. 复数的加减法

设两个复数分别为 $Z_1=a+bi$，$Z_2=c+di$，则:

1) $Z_1\pm Z_2=(a\pm c)+(b\pm d)i$

2) 复数加减法的几何意义:

加法理解为: 已知过程量，过程量，求总量.

减法理解为: 已知总量和其中一个过程量，求另一个过程量.

差的值是尾尾相连，方向指向被减数.

例 1　计算: $(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$

解:

$$\begin{aligned}&(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)\\=&[5+(-2)+(-6-1)i]-(3+4i)\\=&(3-7i)-(3+4i)\\=&-11i\end{aligned}$$

2. 复数的乘除法

设两个复数 $z_1=a+bi$; $z_2==c+di$

则: ①$z_1\cdot z_2$ 理解为“多项式相乘”.

即: $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)$

$$=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

② $\frac{z_1}{z_2}$理解为“分母有理化”

即：$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

例 2　计算：$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$

解：$(1-2i)(3+4i)(-2+i)$

$=[1\times3-(-2)\times4+(1\times4+(-2)\times3)i](-2+i)$

$=(11-2i)(-2+i)$

$=-20+15i$

例 3　计算：$\frac{5-5i}{-3+4i}$

解：$\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{-35}{25}+\frac{-5}{25}i=\frac{7}{-5}-\frac{1}{5}i$

3. 复数幂的运算

$i^1=i;i^2=-1;i^3=-i;i^4=1.$

一般地：$i^{4k+1}=i;i^{4k+2}=-1;i^{4k+3}=-i;i^{4k}=1.$

例 4　计算：$(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$

解：$(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)=-1$

习题二

1. 计算：

(1) $(-\sqrt{2}+\sqrt{3}i)-[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})i]+(-\sqrt{2}i+\sqrt{3})$

(2) $(1-2i)(2+i)(3-4i)$

(3) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2(1+i)$

(4) $\frac{1-2i}{3+4i}$

(5) $\frac{(1-2i)^2}{3-4i}-\frac{(2+i)}{4-3i}$

(6) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}i}{\sqrt{3}-\sqrt{5}i}$

2. 已知 $z_1=2+i$,$z_2=3-i$,求 z_1 与 z_2 之间的距离.

3. 已知 $z_1=5+10i$,$z_2=3-4i$,$\frac{1}{z}=\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}$,求 z.

4. 设 $z=x+yi$,且 $z^2=5-12i$,求 z.

5. 已知 z 为虚数,且 $|z|+z=2+i$,求 z.

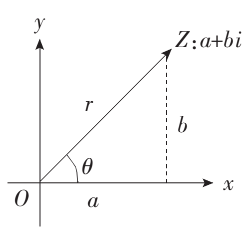
§3　复数的三角形式及三角形式的运算

1. 复数的三角形式

我们将 $a+bi$ 称为复数的代数形式,在复平面内,复数有以下几个特点:

(1) 复数的模:$r=\sqrt{a^2+b^2}$

(2) 辐角:辐角的方向定为 x 轴正方向到向量$\overrightarrow{OZ}$的角 θ,叫作 $a+bi$ 的辐角. 显然,一个非零复数的辐角为:$2k\pi+\theta, k\in Z$,其中适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的



值(或最小的一个 θ) 称辐角主值;记作: $\arg Z$.

显然,设 $a\in R^{+}$,则:

$\arg a=0$; $\arg(-a)=\pi$; $\arg ai=\frac{\pi}{2}$; $\arg(-ai)=\frac{3}{2}\pi$

(3) 复数的三角形式:

$$\begin{aligned}Z&=a+bi\\&=r\cos\theta+r\sin\theta i\\&=r(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)\end{aligned}$$

其中,$\cos\theta=\frac{a}{r}$; $\sin\theta=\frac{b}{r}$; θ 为辐角主值.

这个等式同时提供了复数代数形式与三角形式的转换方式.

2. 复数代数形式与三角形式的互化

例 1 将下列复数的代数形式转化为三角形式:

(1) $\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$;

(2) $1-i=\sqrt{2}(\cos\frac{7}{4}\pi+i\cdot\sin\frac{7}{4}\pi)$;

(3) $-1=\cos\pi+i\cdot\sin\pi$.

3. 复数三角形式的运算

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1)$; $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2)$.

(1) 乘法: $z_1\cdot z_2=r_1r_1[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)]$.

例 2 计算: $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\cdot\sin\frac{\pi}{12})\cdot\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$

解: 原式 $=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot[\cos(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{6})i]$

$=\sqrt{3}+\sqrt{3}i$

(2) 除法: $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\cdot\sin(\theta_1-\theta_2)]$

例 3　计算: $\dfrac{4(\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\cdot\sin\dfrac{4}{3}\pi)}{2(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\cdot\sin\dfrac{5}{6}\pi)}$

解: 原式 $=\dfrac{4}{2}[\cos(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{5}{6}\pi)+i\cdot\sin(\dfrac{4}{3}\pi-\dfrac{5}{6}\pi)]$

$=2i$

(3) 乘方: 设 $z=r(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$

则: $z^n=r^n(\cos n\theta+i\cdot\sin n\theta)$

例 4: 计算: $(\sqrt{3}-i)^6$

解: 原式 $=[2(\cos\dfrac{11}{6}\pi+i\cdot\sin\dfrac{11}{6}\pi)]^6$

$=2^6(-1)=-64;$

练习: 计算 $(1-i)^8$

(4) 开方: 设 $z=r(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$

则: $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{2k\pi+\theta}{n}+i\cdot\sin\dfrac{2k\pi+\theta}{n})\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$

例 5　求 $1-i$ 的立方根.

解: $1-i=\sqrt{2}(\cos\dfrac{7}{4}\pi+i\cdot\sin\dfrac{7}{4}\pi)$

$\sqrt[3]{1-i}=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{8k\pi+7\pi}{12}+i\cdot\sin\dfrac{8k\pi+7\pi}{12})$

$=\sqrt[6]{2}(\cos\dfrac{2k\pi+\dfrac{7}{4}\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2k\pi+\dfrac{7}{4}\pi}{3})$ 其中 $k=0,1,2$

练习: 设 $a>0$,求 $-a$ 的平方根.

习题三

1. 把下列复数形式表示为三角形式:

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$　　(2) $3-4i$　　(3) $2i$　　(4) $-1-\sqrt{3}i$

2. 把下列复数形式表示为代数形式:

(1) $8(\cos\frac{11}{6}\pi+i\cdot\sin\frac{11}{6}\pi)$　　(2) $9(\cos\frac{7}{6}\pi+i\cdot\sin\frac{7}{6}\pi)$

(3) $6(\cos\frac{4}{3}\pi+i\cdot\sin\frac{4}{3}\pi)$

3. 计算:

(1) $3(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3})\cdot3(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\frac{\pi}{6})$

(2) $(\cos75^\circ+i\sin75^\circ)\cdot(\cos15^\circ+i\sin15^\circ)$

(3) $(1-i)(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^7$　　(4) $(-1-i)^6$

(5) $\dfrac{10(\cos\frac{2}{3}\pi+i\cdot\sin\frac{2}{3}\pi)}{5(\cos\frac{\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{\pi}{3})}$

4. 已知 $z=\dfrac{(4-3i)^2(-1+\sqrt{3}i)^{10}}{(1-i)^{12}}$,求$|z|$.

§4　复数的指数形式及指数形式的运算

三角形式运算方便,但计算量大的同时地使书写比较麻烦,为此,再提供一种复数的书写形式,指数形式.

1. 复数指数形式的概念

若 $z=r(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ 为三角形式,

令 $\cos\theta+i\cdot\sin\theta=e^{i\theta}$

则:z 可表示为:$z=r\cdot e^{i\theta}$称为复数的指数形式.

2. 复数指数形式的转化

例题　将下列复数转化为指数形式:

(1) $z=-\sqrt{12}-2i$ (2) $\sin\frac{\pi}{5}+i\cdot\cos\frac{\pi}{5}$

解: (1) $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$

而 $\mathrm{tg}\theta=\frac{-2}{-\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore\theta=\frac{\pi}{6}$

而 z 在第三象限,故: $\arg z=\frac{7}{6}\pi$

$\therefore z=4(\cos\frac{7}{6}\pi+i\cdot\sin\frac{7}{6}\pi)=4e^{\frac{7\pi}{6}i}$

$$
\begin{aligned}
(2)\ z&=\sin\frac{\pi}{5}+i\cdot\cos\frac{\pi}{5}\\
&=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})+i\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5})\\
&=\cos\frac{3}{10}\pi+i\cdot\sin\frac{3}{10}\pi\\
&=e^{\frac{3}{10}\pi i}
\end{aligned}
$$

有了指数形式,使三角形式的运算更简单.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1)$; $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2)$.

对应的指数形式为: $z_1=r_1e^{i\theta_1}$; $z_2=r_2e^{i\theta_2}$

则: ①$z_1\cdot z_2=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

②$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

③$z^n=r^ne^{n\theta i}$

④$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{\frac{2k\pi+\theta}{n}i}$, $k=0,1,\cdots,n-1$.

3. 利用复数解方程

①形如 $ax^2+bx+c=0$ 的实系数一元二次方程.

若 $ax^2+bx+c=0$, $a,b,c\in R$

则: $\Delta>0$,方程有两个不等实根;

$\Delta=0$,方程有两个相等实根;