

灰色系统数学基础

(补充)

陈 绵 云

华中工学院 自控计算机系

一九八四年五月

前 言

“灰色系统”理论，从邓聚龙教授的奠基性论文“Control problems of grey systems” (North-Holland, 《Systems & Control Letters》, Volume 1, Number 5, March 1982) 问世算起，经历了整整两年的发展史。两年来，取得了一批可喜的初期的理论成果和应用成果。已有的成果和正在深化的研究工作，使我们认识到：灰色系统理论是系统控制理论发展的产物，是人们按照辩证唯物主义观点认识客观系统、改造（控制）客观系统的一个新的理论工具，是一个新兴的研究方向。诚如比，相应的数学基础是极为重要的和必不可少的。这本《灰色系统数学基础》（补充），是在山西省举办的灰色系统理论在农业上的应用培训班上及中国科学院石家庄农业现代化研究所、河北省农业系统工程学会举办的灰色系统讲习班上授课讲稿的基础上整理的。所述内容及《矩阵分析》部份的内容（另册），是学习邓聚龙教授新著《灰色系统》及开展灰色系统研究工作应具备的数学工具。

为了能在五月中旬开学的灰色系统理论及其应用研究班上使用，限于时间，讲稿的整理工作做得很粗糙，许多地方只能是提纲式的，错误或不当之处在所难免，愿望读者批评指正。

陈绵云

1984年4月

目 录

前 言

一、灰色系统理论是系统控制理论的一个新兴研究方向

二、灰色系统的数学描述

三、集合与映射

四、函数与微分方程(差分方程)

五、级数与拉氏变换

六、随机过程与灰色马氏预测

一、 灰色系统理论是系统控制理论的一个新兴研究方向。

要阐明这个论题，就要阐明：什么是灰色系统？灰色系统理论产生的背景，灰色系统的研究方向。

§ 1-1、什么是灰色系统？

人们对世界组成的科学见解，经历了一个漫长的形成过程，并随着社会生产和科学技术的发展而不断发展着。最早的科学见解，认为世界是物质的，是由物质组成的。后来人们发现，物质总是不断运动的、不断变化的，而且物质的运动总是伴随着能量，没有无能量的物质，也没有脱离物质的能量。于是，人们又认为世界是由物质和能量组成的。这仍然是一种古典的看法。人们进而研究了生物体和自动控制系统之后，提出了新的问题：生物体和自动控制系统都是有组织的系统，而且随着时间的推移能够保持组织状态，为什么？靠物质的新陈代谢和能量的相互转换是不可能的，必然存在新的东西。这个新的东西被人们称之为“信息”（Information）。信息不是物质，也不是能量，但它不能脱离物质和能量而存在。于是，人们对世界组成的新见解，也就是现代的见解，认为世界由物质、能量和信息这三种既相互区别又相互依存的成份所组成。当然，从马列主义的广义物质观来看，这三种成份都是物质。

组成世界的物质、能量和信息的性质，决定了世界事物的性质。客观世界中的任何事物都是发展变化的，它们相互关联而又相互制约。我们要对某客观事物有一个本质的正确的认识，就必须对它有一个综合的全面的了解，必须把握它的整体，这就是系统的观点。系统就是一个包含若干相互关联相互制约的任意种类无素组成的具有某种功能

的整体。这里的“元素”是泛指的事物，它可以是电子、原子、物体、企业、人、……等等。“系统”也是泛指的事物。例如：一部机床、一个车间、一个工厂、一个企业，可以各自看成为一个系统；一个生产组、一个生产队、一个公社、一个经济区，也可以各自看成为一个系统；还可以把整个企业这个系统或整个经济区这个系统相对细分为巨系统、大系统、小系统和子系统。同样，一个生物体（包括人）是一个系统，一个社会组织是一个系统，地球是一个系统，太阳系是一个系统，银河系是一个系统，……等等。任何一个系统总是包含着若干系统，同时又被另外的若干系统所包含和包围。

图 1.1 是一个抽象的系统与其外界之间的关系。记外界对系统的作用为 u ，系统对外界的作用为 y 。严格说来， u 和 y 有无穹个，是分布作用的。但在特定情况下，可以被认为是有限个，是集中作用的。二者的相对平衡关系，可以概括地表示为：

$$\sum u = \sum y \quad (1.1)$$

一般，系统是复杂的多层次的子系统的集合。这些子系统之间的结合方式和相互矛盾又相互协调的关系决定着整个系统的性能。系统性能的改变又受到外界作用的影响或激励。这是因为，物质代谢、能量转换和信息传递，既存在于系统内部又存在于系统与其外界之间。在一定条件下，一个系统的性能或本质是会转化的，可以转化为新的系统。新系统与其外界之间又将建立起新的相对平衡关系。

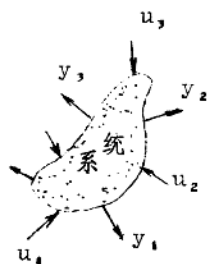


图 1.1

人们研究系统总是有目的的，总希望系统能够控制到满足人们的

要求。然而，图11的系统，可能是有序的系统，也可能是无序的系统，后者容易瓦解，前者也不一定存在控制。例如，行星系统属于有序系统。随着时间的推移，熵不断增加，有序度不断瓦解，最后走向毁灭。从现在的科学考证来看，太阳也是如此。正如恩格斯预言，在遥远的未来，太阳也将走向毁灭。只有能从系统外界吸收负熵以补偿自身熵增所失去的秩序，甚至不断增加秩序的系统，才有强大的生命力。这种系统呈现有组织状态，并且随着时间的推移仍能保持这种状态。调节控制是一种获取、传递、加工、储存和使用信息的过程，是系统得以保持组织状态的根本所在。因此，我们说，一个存在控制的系统，即控制系统，必是一个有组织有秩序的系统。其调节控制能力越强，组织程度就越高，自主性就越强，就越能适应环境的变化，越有生命力。大自然构造了许许多多极好的控制系统。例如：人体是一个最好的大系统，人和许多动物的眼球跟踪目标的快速跳动器官是一个时间最优控制系统，等等。人们研究自然控制系统，可以有意识地利用它、改造它，仿效研制很好的人造控制系统或自动控制系统，用以达到人们的目的。

迄今为止，描述、设计系统的理论、方法是五彩缤纷的。灰色系统理论认为：内部特性确知的系统是白色系统，内部特性未知的系统是黑色系统，内部特性部分确知、部分未知的系统是灰色系统。邓聚龙教授通俗地解释道：“一个工厂是一个系统，工厂的人员、设备、技术条件是已知的，根据这些已知的数据可算出工厂的产量产值。这样的系统我们称为白色系统。宇宙间，银河系以外的某个星球，虽然知道它存在，但不知道其重量是多少？体积多大？距地球多远？是否发光？是恒星还是行星？这就是黑色系统。人体是一个系统，人体的外形参数，如身高、体重、年龄等是已知的，某些内部参数，如体温、

血压、脉搏、……等也是已知的，这些是白色参数。但有更多的参数是不知道的。比如人体究竟有多少穴位，每一个穴位有那些物理的、化学的、生物的性能，这些穴位与人体的那些部位有关，它们起什么作用，……等都是未知的，或是不确知的，是黑色参数。系统中既有白色又有黑色的参数就称为灰色系统。”

§ 1-2、灰色系统理论产生的背景。

系统控制理论的形成，可以追溯到很早以前。应该说，早在两千年前我国西汉时期的指南车、十八世纪英国的蒸汽机调速器等等发明成果就有理论问题。但作为独立的学科出现于世，还是本世纪三十年代的事。半个世纪以来发展很快。迄今描述、设计系统的理论、方法五彩缤纷。从实质性的基本点来看，现有的系统控制理论可以划分为经典控制理论、现代控制理论、模糊控制理论和问世不久的灰色系统理论。

经典控制理论又称自动调节原理，它在第二次世界大战期间，针对提高武器发射命中率的需要而获得了迅速的发展，并达到了成熟的阶段。经典控制理论从系统的输入输出关系来研究系统，研究的主要对象是单输入单输出的线性定常系统。系统数学模型的基本形式是传递函数。主要的分析方法是频率法和根轨迹法，广泛应用于工业生产实践。在一般情况下，图 1-2

线性定常系统的输入 $u(t)$ 和输出 $y(t)$ 的关系，可用下列微分方程来表示；

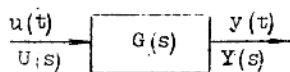


图 1-2

$$\begin{aligned}
& a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + a_{n-2} y^{(n-2)}(t) + \dots \\
& + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\
& = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + b_{m-2} u^{(m-2)}(t) + \dots \\
& + b_1 u'(t) + b_0 u(t), \quad (1.2)
\end{aligned}$$

式中 $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ 均为常数, m, n 为正整数, $n \geq m$. 系统的传递函数就是

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (1.3)$$

$G(s)$ 表达了系统本身的特性, 对 $G(s)$ 的分析研究, 就能够统一处理不同的理性质的线性定常系统.

依经典控制理论, 设计具有试凑的特点, 无法设计出高精度的最优控制系统、适应控制系统和其它复杂系统. 于五十年代末和六十年代初在经典控制理论基础上对导弹、航天、航空、航海的制导、导航、控制发展起来的现代控制理论, 能够用于设计各种高精度的复杂系统. 现代控制理论从系统内部特性(结构、参数)来研究系统. 用“状态”来描述系统的行为, 系统数学模型的基本形式是状态方程. 主要的分析方法是状态空间分析法. 它运用现代数学方法从理论上解决问题. 依据它所设计出来的控制系统用数字计算机来实现. 记系统内部的状态变量为 X , 如图 1.3 所示. 系统的输出量 y 是 X 的外部体现, 但 X 不一定是输出量, 也不一定是

可达的、可测的、可观的、可控的. 状

态变量的选择具有自由性. 一般, $X,$

y, u 是时间 t 的矢量函数, 且不一定

同维. 记 $X \in R^n, y \in R^m, u \in R^l$. 考



图 1.3

考虑到实际系统的非线性性，系统可用状态微分方程和观测方程

$$\dot{X}(t) = F\{X(t), u(t)\} \quad (1.4)$$

$$y(t) = G\{X(t), u(t)\} \quad (1.5)$$

来描述。在常见的线性定常情况下，系统状态微分方程和观测方程的形式是：

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t) \quad (1.6)$$

$$y(t) = C u(t) \quad (1.7)$$

现代控制理论能够处理各种各样的问题，例如：用极点配置技巧能够处理多变量线性系统特性问题，用极大值原理能够解决某些最优控制问题，用 Kalman 滤波器能够解决有噪音的随机系统状态估计问题，等等。它既能解决某些类型的确定性非线性问题，也能解决某些类型的随机性非线性问题。它已在宇航工程上取得巨大成功，在许多工业生产上也很见成效。它和计算机的发展，使人们有条件研制出各种类型的现代控制系统。例如，图 1.4 所示的寻最优适应系统。为了区别，图 1.3 所示的系统在此称为过程， r 为指令量或目标量。系统由被控过程和由虚线内各部分组成的控制器组成，控制器的特性遵循某种最优准则。在较为恶劣的环境下， y 能够以最好的方式和足够高的精度达到目标量 r 或跟随 y 变化。

上述理论有一个基本的共同点，就是它们都依赖于系统的正确而精密的数学模型。否则，一切都是徒劳的。为了获得精确的数学模型，基于概率论和数理统计方法的辨识和自适应技术得到了发展，在一定条件下可以求得数学模型中的未知参数，因而开拓了现代控制理论的实际应用。

然而，有许多生产过程，例如炼钢炉，水泥窑，玻璃工业中的挤压，等等，很难或不能求得精确的数学模型。虽然辨识和自适应技术

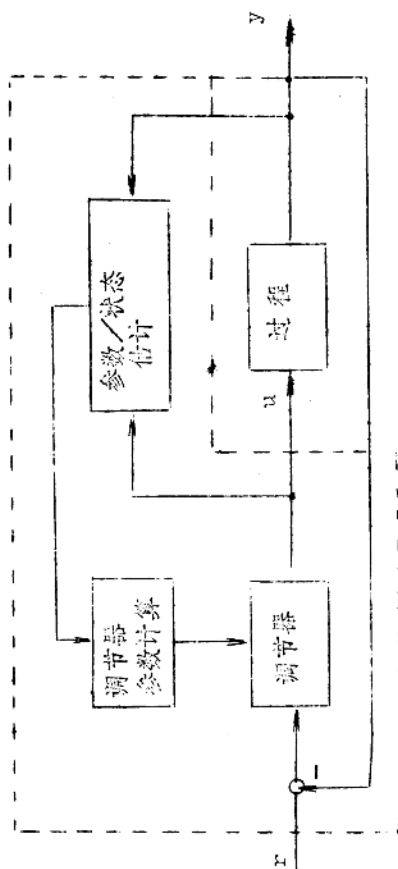


图 1.4

可部分地补偿这种不足，但如果不能按照理论结构有效地建立过程模型，还是达不到令人满意的控制效果。况且随着生产和社会的发展，人们研究的对象越来越大，越来越复杂，越来越广泛，例如许多大型工业系统、生物系统、经济系统、社会系统，乃至未来系统，等等，建模已成难题，得不到精确的数学模型，现代控制理论种种精湛的数学处理方法就无从实用，因而就无法求得控制。依靠现有的工程辨识办法建模也是有条件的，且不说通过这种辨识建立的系统并不是真正的原系统，而是原系统的同构和仿真，实际上，有许多场合，系统的未知参数不宜用或无法用现有的工程辨识办法来辨识，例如：工程系统中的辨识总要对系统加入试验信号，若对经济系统、社会系统也如此试验，就有可能给人们带来灾祸。未来学研究的对象是还未发生或还未出现的事物，根本无法辨识。面对这种很难或不能求得精确数学模型而又不宜于用或无法用现有辨识办法建模的系统，自动化和控制论工作者不得不探索新的处理途径。

1965年美国学者L.A.Zadeh教授首创“模糊集”理论，他把G.Cantor集合的概念拓广为模糊集合的概念，他定义的隶属函数就是用数学方法或精确方式来描述模糊量或定性信息的关键所在。

1974年英国E.H.Mamdani首先把模糊集理论用于锅炉和蒸汽机的控制，获得了良好的效果。这一开拓性的试验工作和1974—1977年的工业应用成果和论文，包括英国R.M.Tong的理论性论文，标志着模糊控制理论的形成和初期成就。模糊控制引以自豪的主要特点是：

- ① 不需要被控对象的精确数学模型，不要求建模；
- ② 模糊控制器是通用的；
- ③ 按语言变量控制；

④ 具有较强的鲁棒性(Robustness)。这些特点集中起来,就是模糊控制能够模拟人的思维方法。对一些无法构造数学模型的系统进行控制。尽管模糊控制还有许多理论问题和实施问题有待解决。它的优点,尤其是它那用隶属函数表达定性信息的能力和简单明了的执行方法,使它获得了愈加广泛地应用和发展。

模糊控制理论未立足于对被控对象的完善描述,它的那些特点中隐含有它的弱点,主要是信息利用率不高,控制粗糙,精度低。显然,这在高精度要求的场合,它是难以胜任的;也谈不上对被控对象运动规律的深刻阐明。模糊控制理论研究的是模糊系统,特别是模糊化的复杂系统和人充当系统元素的那些系统,而经典控制理论和现代控制理论研究的则是分明系统。三者也有一个基本的共同点,就是它们研究的系统都属于信息(分明信息或模糊信息)完全确知的系统,即白色系统。显然,前面提出的实质性问题仍然有待解决。广而言之,人们研究客观系统往往处于既确知又不确知的状况,如何寻求问题的答案?长期从事自动化、系统工程和控制论研究的我国学者邓聚龙教授1979年开始研究参数不完全大系统、未知参数系统的控制问题,1982年正式发表奠基性论文“灰色系统的控制问题”。首创“灰色系统”理论。控制论文发展史上有“白箱”、“黑箱”、“灰箱”之说。“箱”意味着有界的范围,箱内的结构参数全知者称为白箱,全未知者称为黑箱,介于二者之间者称为灰箱。已有的理论只能对白箱求解控制问题,对于黑箱,只好从外部,从箱的输入输出关系(因果关系)来研究它,使之变白。黑箱原理至今仍在系统辨识、建模、仿真和大系统研究中占有重要的地位。灰箱问题实际上没有引起人们的注意,一般总是把灰箱当作黑箱处理。灰箱中可利用的白色信息未能发挥作用。邓聚龙教授把灰箱的概念拓广为灰色系统的概念。主张从

系统(研究对象)的内部特性(结构、参数)来研究系统。允许系统中存在灰色参数,并充分利用系统中部分存在的白色信息来求解控制问题。灰色系统用灰色参数、灰色方程、灰色矩阵来描述。只知道部分数学特性,而不知道具体数值的参数,称为灰色参数,用 $\otimes$ 代表。例如,一棵生长着的大树,其重量就是灰色参数。是有下限的灰色参数。因为这棵树的重量一定大于零,其它不知道,也无法用量具来称。若将这棵树从土地内挖出来用量具称,固然可以得到一个重量的具体数值,但它不能说是“生长着”的大树的重量。具有白色系数和灰色系数的方程,称为灰色方程。例如

$$\otimes x + 3 = 0, \quad (1.8)$$

是一个灰色代数方程;

$$\otimes \frac{dx(t)}{dt} + a = bu(t), \quad (1.9)$$

是一个灰色微分方程。行列数确知而含有灰色元的矩阵,称为灰色矩阵。例如,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \otimes_{1,3} \\ 4 & \otimes_{2,2} & \otimes_{2,3} \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

一般,灰色矩阵用

$$A = (\otimes_{ij})_{m \times n} \quad (1.11)$$

表示。A中有 $m \times n$ 个元素,若其中有 N_G 个灰色元素,则

$$d_g = \frac{N_G}{m \times n} \quad (1.12)$$

定义为A的灰色度。

$$d_w = 1 - \frac{N_G}{m \times n} \quad (1.13)$$

定义为A的白色度。显然，若(1.2)~(1.7)式中含有灰色参数或灰色元素，那这些数学模型描述的系统就是灰色系统，而白色系统仅是灰色系统的特例。

由上述可见，灰色系统理论是在经典控制理论、现代控制理论(包括大系统理论)、模糊控制理论、即白色系统控制理论的基础上针对一类要求高而又难于用或无法用传统方法建模的系统发展起来的。灰色系统理论用它的“灰”，使客观系统在模型中得到逼近直实地反映，使数学处理服从技术要求，因而可以求得适应性强的灵活控制。

§ 1-3、灰色系统的研究方向。

现在，我们从理论体系上探讨问题：前已述及，一般，系统是复杂的多层次的子系统的集合。当我们局限于某一确定层次考虑问题时，当其它层次(内、外层次)相对稳定时，我们可以观测到反映该层次某种变化规律的确定量。然而，其它层次不可能对该层次没有作用，只是我们对它没有考虑或处于无知而已。其它层次对该层次的作用，致使我们可观测到的确定量成为不确定的量。这个不确定的量只是隐含而不能确切体现该层次特有的某种规律。当我们在复杂程度更高的层次里考虑问题时，所观测到的这个非确定量就是较高层次的确定量，体现较高层次的某种变化规律。因此，确定量和非确定量是相对而言的，它们都是在一定条件下体现客观事物变化规律的量。例如：一个人抱着真实无误的态度说出自己的现时年龄，这应该是一个信得过的数据。灰色系统理论认为这是一个灰色量。若这个人是1944年出生的，他说他今年39岁，当我们以“年”为单位来考虑问题时，他说的是完全正确的，“39岁”确切体现他的年纪；当我们以“月”、“日”、“时”为单位来考虑问题时，这个人说出自己年龄的时刻正

好是他出生的时刻，“39岁”是准确的，否则就是不准确的。当我们以“毫秒”、“微秒”为单位来考虑问题时，这个人根本无法说出自己的准确年龄。一个县的粮食产量，当只考虑这个县能够控制的土壤、水利、化肥等因素时，应该是一个确定量，但其它层次的作用总使这个粮食产量成为非确定量。白色量是灰色量的特例，确定量是非确定量的特例。人们很早就注意了非确定量的研究，科学技术发达的今天使这个研究特别突出。在概率论和数理统计方法中研究随机量（随机变量、随机过程），在模糊集理论中研究概念的量化（隶属函数），二者从不同的角度研究非确定量。灰色系统理论认为非确定量是灰色量。“灰”者实也，“灰”者变也，“灰”者活也。灰色量，灰色元素，灰色因素，灰色系统，以及随之发展的灰色数学，更加深刻、更加逼近真实地描述客观事物、反映事物的运动规律。任何事物都有质和量的问题，二者统一；任何科学都应有定性分析和定量分析，二者统一，但由于事物的复杂性、多变性，难以进行量的研究时，只能进行定性分析。对于某一特定事物来说，情况总是会转化的，随着认识的深化，总可以进行定量分析。定性分析是定量分析的基础。从灰色系统理论的特征来看，它可以促进从定性分析到定量分析这种转化，可以充当定性分析和定量分析相结合，乃至社会科学和自然科学相结合的工具。邓聚龙教授所著《灰色系统》中论述的五步建模方法就属于这样一种工具。

灰色系统理论除自己的基本理论、方法的建设外，还必须开展具体系统的研究，二者相辅相成。下列内容的研究，具有特别重要的意义。

1° 大系统：“大”和“小”是相对而言的。认为“大”，意味

着认为因素多、范围广，因素间的关系难以搞清楚。许多大型工程系统、社会系统、经济系统，都是大系统。按照灰色系统理论的观点，大系统是灰色系统。用灰色系统理论确定结构、分析效益、扩充功能、制订规划、制订决策，等等，对求解大系统有着特别的作用。

2° 生物系统：生物系统是复杂的大系统，是灰色度相当高的灰色系统。研究生物系统的传统方法通常是“解剖”，而解剖要不同程度的破坏生命现象。用灰色系统理论来研究生物系统，有可能采用非解剖的途径来研究生命现象。

3° 未来系统：这是未来学研究的内容。未来学是一门基于社会科学、自然科学和技术科学的综合性、预测性科学，是一门新兴的边缘学科。它按照客观世界的发展规律用科学的方法预测未来，研究现有事物将会发生什么样的变化和怎样变化，预示将会出现什么新事物，阐明未来事物可否控制，帮助人们更好地制订决策方案和工作规划，以求得对未来的最佳选择。计量未来学是在定性研究的基础上，充分应用数学方法和计算工具侧重定量研究的未来学。基于灰色系统理论的灰色计量未来学，把预测对象的时序观测量按某种方式构成白色模块，把未来的预测量构成灰色模块，二者构成一个未来系统，进而寻求两种模块间的内在联系，探求系统状态的变化规律，可望得到满意的长期预测模型。

4° 灰色控制：灰色系统从一个稳态向另一个稳态的转移过程，是一个灰色动态过程。基于灰色动态研究控制问题，可以设计出综合性强、适应性强的控制器。

5° 灰色农业系统：这是复杂的灰色系统。农作物的生长周期长，大自然的因素起特别重要的作用，等等，使农业系统的求解异常困难。灰色系统理论可望在此发挥作用。

灰色系统理论是系统控制理论发展的产物。是人们按照辩证唯物主义观点认识客观系统、改造（控制）客观系统的一个新的理论工具。它是一个新兴的研究方向。然而，灰色系统理论毕竟还是“幼婴”，需要一个成长过程。我们相信，在科学的春天里，它会得到健康成长。