管 理 数 学

上海市《经济管理基础理论》电视讲座

（下）

上海市人事局专业干部培训组编

目录

第三篇　线性规划

第四篇　决策分析

第三篇　线性规划

第一章　线性规划基本概念

第一节　概　　述

提高企业的经济效益是现代管理的根本任务。任何一个企业都必须向社会提供更多的产品，为国家积累更多的资金。为了达到这一目的，除了在外延方面增加投资、扩展生产之外，更重要的是在内涵方面要挖掘现有设备、劳动力、原材料、资金等的潜力，在原有的经济基础上妥善进行生产经营，努力增加盈利，提高经济效益。

每一个企业生产经营的具体目标总是：争取尽可能多的产值、产量或利润；争取尽可能少地使用原料、人力、设备或成本。但是，每一目标的实现又总会受到一定的客观条件的限制。从企业内部来看，任一项生产都会受到工艺、设备、原料、质量等因素的限制；从企业外部来看，又会受到市场、协作、国家法令政策等诸因素的制约。因此，在客观条件的种种限制之下，如何制定一个好的计划或者规划出一个好的方案，使得高利润或者低成本的目标得以顺利实现，这是我们应该努力探索的重要课题。管理数学，特别是线性规划，就是为这一探索服务的。

企业管理中面临的问题具有下列三种特点时，就可以借

助于"线性规划"的数学方法而得到妥善的解决。

这三种特点是：

1．企业面临的决策或选择中涉及的数量都是非负的，比如，要决定甲产品生产多少单位？要决定原材料乙采购多少单位等等。简言之，有待选择的决策变量取值不是正的就是零，不会是负数。

2．企业追求的目标可以由决策变量的一个线性（一次）函数来完整地反映出来。线性的含义如同我们在预备知识中反复论述的一样。比如，一个问题中需要决策的变量是甲、乙产品各生产多少，目标是盈利，那末总的盈利就是甲、乙产品的产量与各自单位利润乘积之和，就是一个线性函数。

3．各个决策变量之间必须满足的要求（例如，劳动力的限制、资金的限制）能够由一个线性方程组或线性不等式组来完整地加以概括，比如，上述甲、乙产品的产量与各自的单位原料消耗乘积之和，不能超过总的原料数，就是一个线性不等式，等等。

近几十年来，线性规划在各行各业中得到了广泛的应用。据美国《幸福》杂志对全美首500家大公司的调查，线性规划的应用范围名列前茅，有85%的公司频繁地使用线性规划。国内在产品生产的配比量、棉纺中原棉的配比、以及运输量的安排等方面都采用了线性规划方法，并且取得了一定的成果。

线性规划之所以能得到广泛的应用，主要有以下三个原因：

1．各个领域中大量的问题都能用线性规划模式来表达或者近似地加以表达。例如下述一些问题都可以借助于线性

规划方法来解决：

(1) 任务安排问题——有限资源条件下，确定生产产品的品种、数量、使产值或利润最大；

(2) 配料问题——在既定的工艺、质量等指标下，确定各种原料的选购量，使得成本最小；

(3) 运输问题——在物资调配的网点中，如何决定产地和需点之间的运输量，既满足需求，又使得运输费用最小；

(4) 库存问题——在一定的库存条件下，确定库存物资的品种、数量、期限，使得库存效益最高。

(5) 落料问题——材料落料时，如何使废料最少，材料利用率最高。

(6) 非生产性的，例如在各种宣传手段中，如何分配广告手段，使宣传效果最佳；又如，如何安排各个班次的值班人数，以最少的人数完成一定的值班任务等。

2．线性规划问题有着有效的解题技术。

线性规划求解最优方案的方法是十分成熟的。主要有所谓的单纯形法，它具有简明、扼要、易于掌握的特点。另外，线性规划的求解采用迭代过程，而这正是电子计算机的长处。目前，处理线性规划问题的程序普遍易得，甚至计算器也可以求解小规模的线性规划问题。因此，电子计算机的蓬勃发展为线性规划的应用创造了有利的条件。

3．通过线性规划模式能够很容易地处理数据的变化。

我们知道，企业的经济结构、市场的需求、供应情况都是瞬息万变的，随之引起的是数据的变化。线性规划方法中敏感分析等理论，提供了能动地反映客观世界变化的能力，它可以事先告诉人们，一旦企业、市场发生怎样的变化，企业领导

人应该如何修正方案，确定新情况下目标的实现。

第二节　模式的建立

运用线性规划解决生产实际问题的首要工作是正确地列出线性规划模式，或者说，把实际问题抽象化。

建立模式一般分成下述四个步骤。

第 I 步：列举企业有待解决问题的经济背景，包括内部的经济结构以及外部的供、求情况；

第 II 步：明确有待决定的未知变量(决策变量)，并用代数符号表示；

第 III 步：明确问题中所有的限制或约束条件，并用决策变量的线性方程组或线性不等式组表示；

第 IV 步：明确目标，并用决策变量的线性函数表示，然后明确是追求最大值还是最小值，冠以极大化或极小化。

下面我们通过二个例子来介绍如何具体实施这四个步骤。

例 1.（极大化问题）

第 I 步：概述经济背景(表 1)。

第 II 步：设有待决策的变量如下：

x_1——产品甲(信封)的日产量；

x_2——产品乙(公文袋)的日产量；

x_3——产品丙(便条纸)的日产量。

第 III 步：列出约束条件。如下：

本问题中有人力和原材料两方面的约束。

① 劳动力约束：三种产品的生产定额一样，每人每天可

表 1

产品品种:	信封(以盒为单位),用甲表示; 公文袋(以捆为单位),用乙表示; 便条纸(以箱为单位),用丙表示。
市场情况:	三种产品都畅销。
收益情况:	信封每盒收益 2 元; 公文袋每捆收益 3 元; 便条纸每箱收益 1 元。
资源情况:	每天有 100 个劳动力; 每天有坯纸 900 公斤。
生产定额:	每人每天可单独生产 3 个单位(甲、乙、丙三种产品中的任意一种)。
坯纸耗用:	信封每盒耗纸 1 公斤; 公文袋每捆耗纸 4 公斤; 便条纸每箱耗纸 8 公斤。
面临问题:	如何适当安排三种产品的产量的配比,在人力、物力允许的条件下,使工厂收益最大。

以完成三个单位,换言之,每单位产品要占有 $\frac{1}{3}$ 个劳动力,所以

$$\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 100(\text{人}) \quad ①$$

② 原料约束:甲产品单耗为 1 公斤,乙产品单耗为 4 公斤,丙产品单耗为 8 公斤,所以

$$1\cdot x_1+4\cdot x_2+8\cdot x_3\leqslant 900(\text{公斤}) \quad ②$$

另外,非负约束:日产量都应该是非负的,所以

$$x_1\geqslant 0;\quad x_2\geqslant 0;\quad x_3\geqslant 0。$$

第 IV 步:明确目标。每天的总收益是

$$z=2\cdot x_1+3\cdot x_2+1\cdot x_3(\text{元})$$

当然希望收益越大越好，所以

$$\text{极大化 } z=2x_1+3x_2+1\cdot x_3 \text{（元）}$$

我们把上述四个步骤汇总成下面的对照表：

表 2

面　临　的　问　题	模　式　的　建　立
决策：决定甲、乙、丙的日产量各为多少？	假设：甲、乙、丙的日产量分别为 x_1、x_2、x_3。
目的：使每天总收益为最大	目标函数：极大化 $Z=2x_1+3x_2+1\cdot x_3$
限制：(1) 每天 100 个劳动力，定额每人每天$\frac{1}{3}$单位	约束条件：① $\frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 100$（人）
(2) 甲、乙、丙单耗分别为 1、4、8 公斤，每天 900 公斤	② $1x_1+4x_2+8x_3\leqslant 900$（公斤）
(3) 产量非负	③ $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0$

最后，把右边已抽象化的式子集中起来，就得到了这一极大化问题的线性规划模式：

目标函数　　极大化 $z=2x_1+3x_2+1\cdot x_3$

约束条件

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 100 & ① \\ 1\cdot x_1+4x_2+8x_3\leqslant 900 & ② \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{LP 1}$$

我们把它记作 LP 1。

例 2.（极小化问题）

第 I 步：把经济背景概述如表 3。

表 3

原料种类:	原料成本是甲种每克 5 分，乙种每克 8 分。
产品规格:	由甲、乙两种原料混合而成，每瓶重量为 500 克。且要求甲种原料最多不能超过 400 克；乙种原料至少不少于 200 克。
面临问题;	如何决定每瓶中甲、乙原料的配比，使得成本最小?

第 II 步：有待决策的未知变量是每瓶中甲种原料的重量和乙种原料的重量，用代数符号表示：

x_1——甲种原料的重量(克)；

x_2——乙种原料的重量(克)。

第 III 步：分析约束条件。本问题中甲、乙两种原料各自的重量和总重量都有限制，所以有三方面的约束。

① 甲原料约束：它最多不能超过 400 克，所以

$$x_1 \leqslant 400 \quad ①$$

② 乙原料约束：它至少不能少于 200 克，所以

$$200 \leqslant x_2 \quad ②$$

③ 总重量约束：每瓶为 500 克，所以

$$x_1 + x_2 = 500 \quad ③$$

另外，非负约束：重量都应该是非负的，所以

$$x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0$$

第 IV 步：明确目标。每瓶的总成本是

$$z = 5x_1 + 8x_2$$

当然希望成本越低越好，所以

$$\text{极小化 } z = 5x_1 + 8x_2 \text{ (分)}$$

同样，也可把上述四个步骤汇总成表 4。

最后，把右边已抽象化的式子集中起来，就得到了这极小化问题的线性规划模式：

表 4

面临的问题	模式的建立
决策：决定甲、乙重量各多少克？	假设：甲、乙在每瓶中的重量分别为 x_1 和 x_2
目标：使每瓶的成本为最小。	目标函数：极小化 $z=5x_1+8x_2$
限制：① 甲最多 400 克 ② 乙至少 200 克 ③ 每瓶 500 克 ④ 重量非负	约束条件 ① $x_1\leqslant 400$ ② $x_2\geqslant 200$ ③ $x_1+x_2=500$ ④ $x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$

目标函数　　极小化 $z=5x_1+8x_2$

约束条件

$$\begin{cases} x_1\leqslant 400 & ① \\ x_2\geqslant 200 & ② \\ x_1+x_2=500 & ③ \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{LP2}$$

我们把它记作 LP2。

本节中我们仅举上述两个简单的例子，初步介绍一下建立模式的过程。由于实际问题错综复杂，建立模式的过程中势必用到各种专业知识。因此，要掌握建立模式的本领，既需要反复多练，比如多做习题以及领会下面提及的一些例子，也需要认真分析各种面临问题的经济意义。一句话，必须理论联系实践。而对于线性规划来说，只有当建立的模式正确反映实际问题时，据此模式进行求解才是有用的。因此，我们务必掌握建立模式的能力。

习 题 一

1．判别下述三个规划模式是否属于线性规划问题？原因何在？

(1) 目标函数　　极大化 $z=x_1+3x_2+4x_3$

约束条件

$$\begin{cases}5x_1+6x_2+2x_3\leqslant 200\\ 10x_1-x_2x_3\leqslant 100\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(2) 目标函数　　极小化 $z=4x_1+2x_2^2+7x_3$

约束条件

$$\begin{cases}x_1+x_2=120\\ x_1+3x_3\geqslant 200\\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0\end{cases}$$

(3) 目标函数　　极大化 $z=x_1+x_2$

约束条件

$$\begin{cases}x_1+4x_2\leqslant 30\\ 5x_1+3x_2\leqslant 50\end{cases}$$

2. 某厂制造三种仪器。甲种仪器需要17小时加工装配，8小时校验，售价300元。乙种仪器需要10小时加工装配，4小时校验，售价200元。丙种仪器需要2小时加工装配，2小时校验，售价100元。可供利用的加工时间为1,000小时，校验时间为500小时。三种仪器所用的元件和材料基本一样。

又据市场预测表明，对甲产品的需求不超过50台，乙产品不超过80台，丙产品不超过150台。

制造厂要决定能获得最大总产值的最优生产计划。试作为线性规划问题列出模式。

3. 某铸造厂生产的铸件每件需要20公斤铅、24公斤铜和30公斤铁，现在有4种矿石可供选购，它们每10公斤中含有的成份和价格如表5。

现在要确定每种矿石选购多少，使费用最省？试作为线性规划问题列出模式。

表 5

成份(每10公斤)	矿		石	
	A	B	C	D
铅(公斤)	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
铜(公斤)	3	1	2	$\frac{1}{2}$
铁(公斤)	3	1	2	4
每10公斤价格(元)	10	15	30	25

第二章 线性规划解法

第一节 概 述

企业生产经营中的实际问题通过上章介绍的步骤建立成抽象的模式后，就归结到了线性规划问题。接下来，就应该求出它的最优解。本章专门介绍求取线性规划最优解的一些方法，重点介绍其中的单纯形表格方法。在具体叙述方法之前，有必要引进一些基本概念。

我们结合第一章第二节中的例1（极大化问题）来阐述。该例中需要选择的是达到最大收益的三种产品的日产量配比最优方案。既然我们已经对这一问题建立起了相应的线性规划 LP1，就可以把具体实际问题中的各个细节逐一对照到线性规划上去。为便于说明，把线性规划模式 LP1 重新列出：

目标函数　　极大化 $z=2x_1+3x_2+1x_3$

约束条件：

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\leqslant 100 & \text{①} \\ 1\cdot x_1+4x_2+8x_3\leqslant 900 & \text{②} \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{LP1}$$

先引出下述两个最基本的概念

1．可行方案和可行解

从具体的实际问题角度说，所谓可行方案，是指为企业的

全部经济背景所允许的；从线性规划角度说，所谓可行解，是指满足规划全部约束条件的变量的一组取值。

例如，对该例中的工厂来说，下述方案

方案Ⅰ：　　甲日产量＝100 单位

　　　　　　乙日产量＝100 单位

　　　　　　丙日产量＝50 单位

是一个可行方案，这是因为，每天的总产量是250单位，每单位占用劳动力为 $\frac{1}{3}$ 个，所以每日占用劳动力为

$$250\times\frac{1}{3}<100(\text{个})$$

是为人工限制所允许的。另外，甲每单位耗纸1公斤，100单位共计耗纸 100×1 公斤，同样可以计算出每天耗纸数总计为

$$100\times1+100\times4+50\times8=900(\text{公斤})$$

也为原料限制所允许的。

用该例中问题对应的线性规划来阐述，上述方案Ⅰ对应的解是

解Ⅰ：　　$(x_1=100,\ x_2=100,\ x_3=50)$

这个解代入(LP1)中约束条件的第一个不等式中，有

$$\frac{1}{3}\cdot100+\frac{1}{3}\cdot100+\frac{1}{3}\cdot50=\frac{1}{3}\cdot250<300$$

代入第二个不等式中，有

$$1\cdot100+4\cdot100+8\cdot50=900$$

另外，非负的要求显然满足。所以这一个解是可行的。

可见，所谓可行方案只要是经济背景所允许的即可，因此，可能存在若干个甚至无穷多个可行方案。这一点用可行解来阐述将显得更为清晰。例如线性规划(LP1)中，三个变

量，仅只要满足两个不等式约束，当然可以有很多个甚至无穷多个可行解了。

2．最优方案和最优解

方案是最优的，是指在一切可行方案中，能带来最大收益（或最小支付等）的方案；对应地，解是最优的，是指所有可行解中使目标函数值最大（或最小）的解。

例如，例1有方案II：

（甲日产量＝100单位，乙日产量＝200单位，丙日产量为零。）或者，相应地有

解II：　　$(x_1=100,\ x_2=200,\ x_3=0)$

经过验算，可知也是一个可行解，但是与方案I的总收益相比较，可以发现

方案I的总收益 $z_1=2\cdot100+3\cdot100+1\cdot50=550$（元）

方案II的总收益 $z_2=2\cdot100+3\cdot200+1\cdot0=800$（元）

显然方案II较优。

因此，归纳起来，求解线性规划就是要从一切可行解中找出最优解来，或者从一切可行方案中找出最优方案来。由于线性规划模式完全概括了经济背景，所以以后我们就以可行解、最优解为讨论的对象，或者不加说明地交替使用方案和解的概念。

但问题的症结在于，可行解可以是无穷多个的，企图比较或枚举一切可行解的目标函数值从而确定最优解，我们会发现此路不通。

同样地，试图用观察的方法，去估计或猜测最优解，也往往是难以奏效的。

例如，对线性规划LP1，经初步的观察，人们可能会发

现，产品甲、乙、丙三者劳动力消耗一样，坯纸单耗以丙为最大（每单位8公斤），而收益系数却以丙的为最小，因此生产丙最不合算。这一点似乎颇有道理。但是，留下来的产品甲和乙怎样比较呢？你说生产产品乙最合算吧，要尽量多生产它，那末限于人力和坯纸，可行的方案或解是

方案 III 或解 III

$$\left(x_1=0, \quad x_2=\frac{900}{4}=225, \quad x_3=0\right)$$

总收益是 $z_3=2\cdot0+3\cdot225+1\cdot0=675$ 元，比起方案 II 的总收益 $z_2=800$ 元来还差125元，可见解 III 不是最优的。你说生产产品甲最合算吧，那末据此得到的可行解是

解 IV $\qquad (x_1=300,\ x_2=0,\ x_3=0)$

总收益是 $z_4=2\cdot300+3\cdot0+1\cdot0=600$ 元，也不是最优的。

更何况，当决策变量数目更多，约束条件的式子更多时，这种粗略的估计徒劳无功，更不能保证它的最优性。

因此，求解线性规划的问题归结到了求最优解的问题。要真正解决这一问题，必须力求做到下面两点：

1．必须是行之有效的科学方法。

提供的求解方法不能是穷举法或者观察法，而是一整套脉络分明，易于遵循的方法。只要遵循该方法的步骤就可以得到最优解。

2．必须是能确认最优性的科学方法。

提供的求解方法应该有可靠的理论根据保证或者确认所求得的最优解一定是一切可行解中最优的。

本章重点介绍的单纯形法就是这样一种科学方法。在正