赢在思维

高中数学

主编：杨德胜
编著：叶莎莎

拉分题

满分训练

180例+260题

几何篇

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

赢在思维

扫码查笔记，看视频
免费获取更多拉分题
享最佳移动学习体验

高中数学
拉分题
满分训练
180例+260题

杨德胜，中学数学特级教师，全国高中数学竞赛优秀辅导员，全国高中数学竞联赛优秀教练员。曾在上海市二中、上海交通大学附属中学等学校任教，现在上海市向明中学任教。曾被评为广东省南粤教书育人优秀教师（特等奖），曾任广东省普教系统中学高级教师评审委员会成员，现任上海市中学高级教师评审委员会成员。

长期从事理科班的数学教学和数学竞赛辅导工作，辅导学生参加全国高中数学联赛有数百人次获全国高中数学联赛一、二、三等奖，其中数十人被免试保送到清华大学、北京大学、上海交通大学、浙江大学等名牌大学学习，特别是近年来大学试行自主招生，有很多同学通过上他的选修课，获得进入清华大学、北京大学、上海交通大学，复旦大学等名牌大学学习的机会。在多种省级以上刊物发表论文 60 余篇，主编多本教学参考书。湖北《中学数学》2002 年第 8 期封面人物。

请通过以下方式关注我们，获得更多增值服务

上架建议：高中数学教辅

華東理工大學出版社
扫描关注官方微博

華東理工大學出版社
扫描关注官方微信

购书热线 021-64250306

ISBN 978-7-5628-4320-7

9 787562 843207 >

团购热线：021-64250306
封面设计：视界创意+杜静静

定价：28.00元

赢在思维

高中数学

拉分题

满分训练

(180例+260题)

几何篇

主编：杨德胜　编著：叶莎莎

编委会
汪昌辉　潘　瑾　侯宝坤
朱伟卫　叶莎莎　张千明

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

高中数学拉分题满分训练. 几何篇 / 杨德胜主编；叶莎莎编著.
—上海：华东理工大学出版社，2015.10
(赢在思维)
ISBN 978-7-5628-4320-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①杨… ②叶… Ⅲ.①几何课—高中—习题集
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 143181 号

赢在思维

高中数学拉分题满分训练(180 例+260 题)(几何篇)

主　　编 / 杨德胜
编　　著 / 叶莎莎
策划编辑 / 郭　艳
责任编辑 / 刘　婧
责任校对 / 金慧娟
封面设计 / 视界创意
出版发行 / 华东理工大学出版社有限公司
地　　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　　话：(021)64250306(营销部)
(021)64252718(编辑室)
传　　真：(021)64252707
网　　址：press.ecust.edu.cn
印　　刷 / 江苏省句容市排印厂
开　　本 / 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张 / 16.75
字　　数 / 418 千字
版　　次 / 2015 年 10 月第 1 版
印　　次 / 2015 年 10 月第 1 次
书　　号 / ISBN 978-7-5628-4320-7
定　　价 / 45.00 元

联系我们：电 子 邮 箱 press@ecust.edu.cn
官 方 微 博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

華東理工大學出版社

前　言

“初中数学拉分题”自出版至今已经逐步产生了自己的品牌效应,受到广大师生朋友们的认可和好评.在此期间我们收到很多读者朋友的反馈,希望能够继续出版“高中数学拉分题”系列.为此我们在深入研究高中教学实际与考纲要求的前提下,与一线特级教师研讨分析,编写了本套丛书,希望学生能在具备扎实基本功的基础上进一步提高解题能力,同时,教师们也可以从本书中找到教学和考试中合适的题目使用.

本套丛书主要有以下特点.

● 参考多地教材,强调广泛性

为了使本书具有更广泛的适用性,编者在编写的过程中参考了大量版本的教材,尽量使更多的读者受益.

● 精选例题习题,强调典型性

本书所选的每一道题都蕴含了丰富的数学思想与数学方法,充分体现了拓展思维、培养数学素养的编写思想.同学们在学习例题的过程中,除了需要掌握基本知识与技能,发展应用数学的意识与能力,还要增强学好数学的愿望与信心.本丛书设置了优质精选练习题,保证了学生在学习例题之后能及时复习,便于了解学习情况,巩固解题技巧,加深对题目的理解,从而达到举一反三的目的.本丛书的习题量不大,但每个题目都能使认真思考者有所收获,并且方便一线教师在教学中灵活使用.另外,通过对高考题型的研究,本书尽量涵盖高考各种重点题型,并且给出缜密的思维分析过程,使学生们能够准确判断所属题型,运用相应解题方法准确解答.

● 深度剖析例题,强调思维性

本书编写的立足点并不是题海战术,而是对每一类题目的解法的透彻理解和掌握.特别设置了“技巧贴士”和“思维点评”模块,以期帮助学生掌握技巧,引导学生将每种方法和思路转化为自己的解题途径,掌握一些常用的解题思路、策略和方法,将思维融于探究之中.

另外,本书建议与《赢在思维——高中数学拉分题满分训练(几何集训篇)》配套使用,相信这样能取得更好的效果.

本套丛书可供基础知识掌握得较好、想要进一步提高的学生使用,也可供一线教师在教学中使用,希望本书较高的实用性能帮助同学们在打好基础的同时进一步巩固、拓展和提高.

最后,希望广大师生能够通过本套丛书有所收获,同时也希望能够得到读者的建议,以使我们不断进步.

目　录

1　平面向量

1.1　平面向量的概念及线性运算 …… 1
优质精练 …… 7
1.2　平面向量的分解定理及坐标表示 …… 9
优质精练 …… 16
1.3　向量的数量积及平面向量应用举例 …… 18
优质精练 …… 30

2　立体几何

2.1　简单几何体的结构特征、三视图与直观图 …… 32
优质精练 …… 41
2.2　空间几何体的表面积和体积 …… 45
优质精练 …… 58
2.3　空间点、直线、平面的位置关系 …… 60
优质精练 …… 68
2.4　直线与平面平行、平面与平面平行 …… 71
优质精练 …… 79
2.5　直线与平面垂直、平面与平面垂直 …… 82
优质精练 …… 94
2.6　空间向量及其在立体几何中的应用 …… 97
优质精练 …… 109

3　平面解析几何

3.1　直线方程的概念、直线的倾斜角与斜率 …… 112
优质精练 …… 119
3.2　直线方程 …… 121
优质精练 …… 125
3.3　两直线的位置关系 …… 127
优质精练 …… 138
3.4　曲线与方程 …… 140
优质精练 …… 146

3.5 圆 …………………………………………………………………… 149
优质精练 ……………………………………………………………… 159
3.6 椭圆 ………………………………………………………………… 161
优质精练 ……………………………………………………………… 173
3.7 双曲线 ……………………………………………………………… 176
优质精练 ……………………………………………………………… 185
3.8 抛物线 ……………………………………………………………… 187
优质精练 ……………………………………………………………… 199
3.9 对称问题 …………………………………………………………… 202
优质精练 ……………………………………………………………… 210
3.10 参数方程与极坐标(理科选修)…………………………………… 212
优质精练 ……………………………………………………………… 221

参考答案与提示 …………………………………………………… 223

1 平面向量

1.1 平面向量的概念及线性运算

编者引言

向量知识在中学有着非常重要的地位和教育价值，它的工具性特点在数学的许多分支中都有体现，尤其在高等数学与解析几何中，向量的思想渗透得很广泛. 向量加法运算是平面向量的线性运算(向量加法、向量减法、向量数乘运算以及它们之间的混合运算)中最基本、最重要的运算，减法运算、数乘向量运算都可以归结为加法运算.

经典拉分题 思维点评

一、向量的概念

题 1 给出问题：判断下列各命题的真假.

(1) 若$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，则 A,B,C,D 四点共线；

(2) 若$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$，则 A,B,C 三点共线；

(3) 若 $\lambda\in\mathbb{R}$，则$|\lambda\vec{a}|>|\vec{a}|$；

(4) 平面内任意三个向量中的每一个向量都可以用另外两个向量的线性组合表示.

分析 (1) 把$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线错误地当成 AB 与 CD 共线.

(2) 满足条件的 A,B,C 有共线和不共线两种情况，漏掉了其中一种.

(3) 未对 λ 作分类讨论.

(4) 对基本定理理解不透，忽视了必须是两个不共线向量的线性组合.

满分解答 四个命题均是错误命题.

(1) AB 可能平行于 CD，即四点不一定共线.

(2) 可以构成以 A,B,C 为顶点的三角形.

(3) 当$\vec{a}=\vec{0}$时，$|\lambda\vec{a}|=|\vec{a}|$；当$\vec{a}\neq\vec{0}$时，若$|\lambda|\leqslant 1$，则$|\lambda\vec{a}|\leqslant|\vec{a}|$；若$|\lambda|>1$，则$|\lambda\vec{a}|>|\vec{a}|$，即(3)不正确.

(4) 平面内任何一个向量均可以表示为两个不共线向量的线性组合.

思维点评

对向量的学习要注重向量的代数运算与线段的几何性质和实数的差异.要否定一个命题,只需要举一个反例,换一个角度去考虑,解题不能受命题者所设陷阱的影响,被牵着鼻子走.第(1)小题,向量平行与直线平行是不同的,两向量平行,允许它们所在直线重合,而两直线平行与重合是完全不同的.第(2)小题、第(3)小题、第(4)小题忽视了“不共线”这个关键词.

题 2

平面向量$\vec{a}$,$\vec{b}$共线的充要条件是(　　).

A. $\vec{a}$,$\vec{b}$方向相同

B. $\vec{a}$,$\vec{b}$两向量中至少有一个为$\vec{0}$

C. 存在 $\lambda\in\mathbb{R}$,使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$

D. 存在不全为零的实数 λ_1,λ_2,使 $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=\vec{0}$

分析　$\vec{a}$,$\vec{b}$共线时,$\vec{a}$,$\vec{b}$方向相同或相反,故选项 A 错;$\vec{a}$,$\vec{b}$共线时,$\vec{a}$,$\vec{b}$不一定是零向量,故选项 B 错;当$\vec{b}=\lambda\vec{a}$时,$\vec{a}$,$\vec{b}$一定共线,反之,若$\vec{b}\neq\vec{0}$,$\vec{a}=\vec{0}$,则$\vec{b}=\lambda\vec{a}$不成立,故选项 C 错.排除 A,B,C,故选 D.

满分解答　D

思维点评

两个非零的平面向量$\vec{a}$,$\vec{b}$共线的充要条件是 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

题 3

已知任意四边形 $ABCD$ 的边 AD 和 BC 的中点分别为 E,F,求证:$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$.

分析　构造三角形,利用向量的三角形法则证明.

满分解答　如图 1-1-1 所示,连接 EB 和 EC,

由$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EB}$和$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{EB}$可得,

$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}$　①

由$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EC}$和$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{EC}$可得,

$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC}$　②

①+②得,$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}$　③

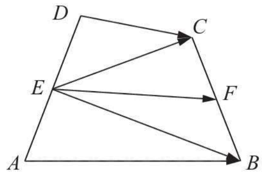

图 1-1-1

因为 E,F 分别为 AD 和 BC 的中点,所以$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$,$\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$,

代入式③得$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{EF}$.

思维点评

运用向量加减法解决几何问题时，需要发现或构造三角形、四边形或其他封闭图形. 此题也可通过寻找封闭图形 $EABF$ 与 $EDCF$，利用构成封闭图形的向量首尾相接和为$\vec{0}$得解.

题 4

设 D,E,F 分别是$\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上的点，且$\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，则$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$与$\overrightarrow{BC}$(　　).

A. 反向平行　　B. 同向平行　　C. 不平行　　D. 无法判断

分析

因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

满分解答

A

思维点评

利用“控制变量”的思想将题目中的 6 个向量转化为 3 个向量，进而再利用这 3 个向量首尾相接和为$\vec{0}$解决问题.

题 5

设 V 是已知平面 M 上所有向量的集合，对于映射 $f:V\to V$，$\vec{a}\in V$，记$\vec{a}$的象为 $f(\vec{a})$. 若映射 $f:V\to V$ 满足：对所有$\vec{a},\vec{b}\in V$ 及任意实数 λ,μ 都有 $f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})$，则 f 称为平面 M 上的线性变换. 现有下列命题：

① 设 f 是平面 M 上的线性变换，$\vec{a},\vec{b}\in V$，则 $f(\vec{a}+\vec{b})=f(\vec{a})+f(\vec{b})$；

② 若$\vec{e}$是平面 M 上的单位向量，对$\vec{a}\in V$，设 $f(\vec{a})=\vec{a}+\vec{e}$，则 f 是平面 M 上的线性变换；

③ 对$\vec{a}\in V$，设 $f(\vec{a})=-\vec{a}$，则 f 是平面 M 上的线性变换；

④ 设 f 是平面 M 上的线性变换，$\vec{a}\in V$，则对任意实数 k 均有 $f(k\vec{a})=kf(\vec{a})$.

其中的真命题是__________. (写出所有真命题的编号)

分析

① 令 $\lambda=\mu=1$，则 $f(\vec{a}+\vec{b})=f(\vec{a})+f(\vec{b})$故①是真命题；同理，④令 $\lambda=k,\mu=0$，则 $f(k\vec{a})=kf(\vec{a})$，故④是真命题.

③ 因为 $f(\vec{a})=-\vec{a}$，则有 $f(\vec{b})=-\vec{b}$，$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=-(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=\lambda\cdot(-\vec{a})+\mu\cdot(-\vec{b})=\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})$是线性变换，故③是真命题. ②由 $f(\vec{a})=\vec{a}+\vec{e}$有 $f(\vec{b})=\vec{b}+\vec{e}$，$f(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})=(\lambda\vec{a}+\mu\vec{b})+\vec{e}=\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{e})+\mu\cdot(\vec{b}+\vec{e})-(\lambda+\mu-1)\vec{e}=\lambda f(\vec{a})+\mu f(\vec{b})-(\lambda+\mu-1)\vec{e}$

因为 e 是单位向量，所以$\vec{e}\neq\vec{0}$，故②是假命题.

满分解答 ①③④

思维点评

新概念题是近年高考的热门，对学生数学阅读能力有较高的要求. 解答此类问题，首先要正确理解概念中的字、词、句，能正确进行文字语言、图形语言和符号语言的互译；要善于举出正、反两方面的例子促进理解；要弄明白概念的内涵和外延.

二、用向量解决几何问题

题 6 **求证：三角形的“四心”定理的平面向量表达式.**

① O 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$；

② O 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的垂心$\Leftrightarrow\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_1}$；

③ O 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的外心$\Leftrightarrow|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|$；

④ O 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的内心$\Leftrightarrow a\cdot\overrightarrow{OP_1}+b\cdot\overrightarrow{OP_2}+c\cdot\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$(其中 a,b,c 是$\triangle P_1P_2P_3$ 三边).

分析 利用三角形的“四心”性质. 重心：三角形三条中线的交点；垂心：三角形三条高线的交点；外心：三角形三条边的中垂线的交点；内心：三角形三条内角平分线的交点.

满分解答 ①证明：充分性：$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}\Rightarrow O$ 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心

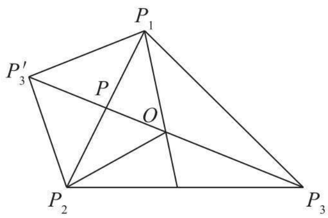

图 1-1-2

若$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$，则$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=-\overrightarrow{OP_3}$，如图 1-1-2 所示，以$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$为邻边作平行四边形 $OP_1P'_3P_2$，设 P'_3P_3 与 P_1P_2 交于点 P，则 P 为 P_1P_2 的中点，有$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP'_3}$，得$\overrightarrow{OP'_3}=-\overrightarrow{OP_3}$，即 O,P_3,P'_3,P 四点共线，故 P_3P 为$\triangle P_1P_2P_3$ 的中线，同理，P_1O,P_2O 亦为$\triangle P_1P_2P_3$ 的中线，所以，O 为$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心.

必要性：O 是$\triangle P_1P_2P_3$ 的重心$\Rightarrow\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$

如图 1-1-3 所示，延长 P_1O 交 P_2P_3 于点 P，则点 P 为 P_2P_3 的中点，由重心的性质得 $|\overrightarrow{P_1O}|=2|\overrightarrow{OP}|$.

因为 $\overrightarrow{OP_1}=-2\ \overrightarrow{OP}=-2\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3})=-(\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3})$，所以 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$.

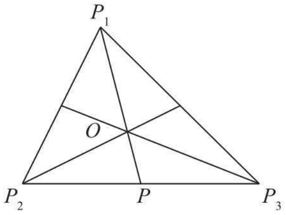

图 1-1-3

② 证明：O 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的垂心 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OP_3}\perp\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{OP_1}\perp\overrightarrow{P_2P_3}$

$\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OP_3}\cdot(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_1}$，同理 $\overrightarrow{OP_1}\perp\overrightarrow{P_2P_3}\Leftrightarrow\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}$，故当且仅当 $\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\overrightarrow{OP_3}\cdot\overrightarrow{OP_1}$.

③ 证明：如图 1-1-4 所示，O 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的外心 $\Leftrightarrow|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|$（或 $\overrightarrow{OP_1}^2=\overrightarrow{OP_2}^2=\overrightarrow{OP_3}^2$）（点 O 到三边距离相等）$\Leftrightarrow(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2})\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=(\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3})\cdot\overrightarrow{P_2P_3}=(\overrightarrow{OP_3}+\overrightarrow{OP_1})\cdot\overrightarrow{P_3P_1}=0$（$O$ 为三边垂直平分线的交点）

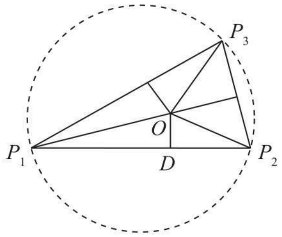

图 1-1-4

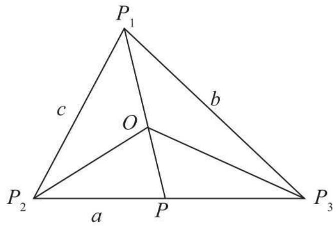

图 1-1-5

④ 证明：充分性：$a\cdot\overrightarrow{OP_1}+b\cdot\overrightarrow{OP_2}+c\cdot\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}\Rightarrow O$ 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内心

如图 1-1-5 所示，$a\cdot\overrightarrow{OP_1}+b\cdot\overrightarrow{OP_2}+c\cdot\overrightarrow{OP_3}=a\cdot\overrightarrow{OP_1}+b\cdot(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2})+c\cdot(\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_3})=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{OP_1}+b\cdot\overrightarrow{P_1P_2}+c\cdot\overrightarrow{P_1P_3}=\vec{0}$

所以 $\overrightarrow{P_1O}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{c}+\frac{\overrightarrow{P_1P_3}}{b}\right)$，而 $\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{c}$，$\frac{\overrightarrow{P_1P_3}}{b}$ 分别是 $\overrightarrow{P_1P_2}$，$\overrightarrow{P_1P_3}$ 方向上的单位向量，所以向量 $\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{c}+\frac{\overrightarrow{P_1P_3}}{b}$ 平分 $\angle P_2P_1P_3$，即 $\overrightarrow{P_1O}$ 平分 $\angle P_2P_1P_3$，同理 $\overrightarrow{P_2O}$ 平分 $\angle P_1P_2P_3$，得到点 O 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内心.

必要性：O 是 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内心 $\Rightarrow a\cdot\overrightarrow{OP_1}+b\cdot\overrightarrow{OP_2}+c\cdot\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$

若点 O 为 $\triangle P_1P_2P_3$ 的内心，延长 P_1O 交 P_2P_3 于点 P，由三角形内角平分线的性质定理，有 $\frac{P_1O}{OP}=\frac{P_1P_2}{P_2P}=\frac{P_1P_3}{P_3P}=\frac{b+c}{a}$，于是 $a\cdot\overrightarrow{OP_1}+(b+c)\cdot\overrightarrow{OP}=\vec{0}$.

再由 $\frac{P_2P}{PP_3}=\frac{c}{b}$，有 $\overrightarrow{OP}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{OP_2}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{OP_3}$（定比分点）代入前式中便得 $a\cdot\overrightarrow{OP_1}+b\cdot\overrightarrow{OP_2}+c\cdot\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$.

思维点评

在三角形中,“四心”是一组特殊的点,它们的向量表达形式具有许多重要的性质,在近年高考试题中,总会出现一些新颖的问题不仅考查向量的知识点,而且可以培养学生分析问题、解决问题的能力.

题 7 如图 1－1－6 所示,在△ABC 中,$AF=\frac{1}{3}AB$,D 为 BC 的中点,AD 与 CF 交于点 E.若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$,且$\overrightarrow{CE}=x\vec{a}+y\vec{b}$,则 $x+y=$________.

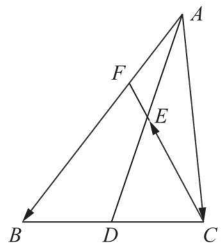

图 1－1－6

分析 如图 1－1－7 所示,设 FB 的中点为 M,连接 MD.

因为 D 为 BC 的中点,M 为 FB 的中点,所以 DM∥CF.

因为 $AF=\frac{1}{3}AB$,所以 F 为 AM 的中点,E 为 AD 的中点.

因为$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$,D 为 BC 的中点,

所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$,

所以$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})$,

所以$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=-\vec{b}+\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$,

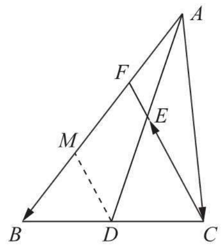

图 1－1－7

所以 $x=\frac{1}{4}$,$y=-\frac{3}{4}$,所以 $x+y=-\frac{1}{2}$.

满分解答 $-\frac{1}{2}$

思维点评

对于平面向量的线性运算问题,要注意其与数的运算法则的共性与不同,两者不能混淆.如向量的加法与减法要注意向量的起点和终点的确定,灵活利用三角形法则、平行四边形法则.同时,要抓住两条主线:一是基于“形”,通过作出向量,结合图形分析;二是基于“数”,借助坐标运算来实现.

优质精练

一、填空题

1 如图 1-1-8 所示，在△ABC 中，点 O 是 BC 的中点，过点 O 的直线分别交直线 AB，AC 于不同的两点 M，N，若 $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{AN}$，则 $m+n$ 的值为________.

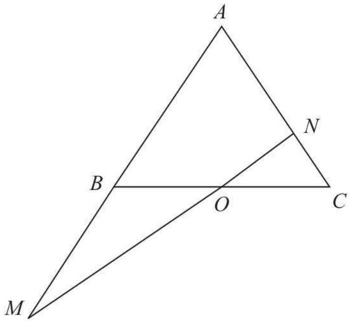

图 1-1-8

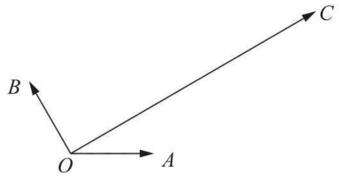

图 1-1-9

2 如图 1-1-9 所示，平面内有三个向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，其中与 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $120°$，$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 的夹角为 $30°$，且 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OC}|=2\sqrt{3}$，若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\lambda+\mu$ 的值为__________.

3 设 F 为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，A，B，C 为该抛物线上三点，若 $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\vec{0}$，则 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=$__________.

4 已知△ABC 和点 M 满足 $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$. 若存在实数 m 使得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AM}$ 成立，则 $m=$__________.

5 如图 1-1-10 所示，直线 $x=2$ 与双曲线 Γ：$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于 E_1，E_2 两点，记 $\overrightarrow{OE_1}=\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{OE_2}=\overrightarrow{e_2}$，任取双曲线 Γ 上的点 P，若 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}(a,b\in\mathbf{R})$，则 a，b 满足的一个等式是________.

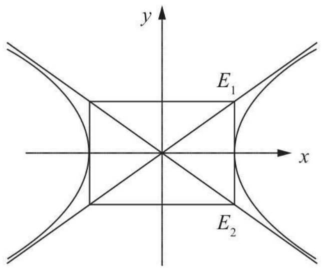

图 1-1-10

二、选择题

6 若 A，B，C，D 是平面内任意四点，给出下列式子：

① $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$；

② $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$；

③ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}$.

其中正确的有（　　）.

A. 0 个　　B. 1 个　　C. 2 个　　D. 3 个

7 设 P 是△ABC 所在平面内的一点，$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$，则（　　）.

A. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\vec{0}$　　B. $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　　D. $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$

8 已知 O,A,B 是平面上不共线的三个点，直线 AB 上有一点 C，满足 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$，则$\overrightarrow{OC}$等于（　　）.

A. $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

B. $-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

C. $\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

D. $-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

9 已知 O 是$\triangle ABC$ 所在平面内一点，D 为边 BC 的中点，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，那么（　　）.

A. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$　　B. $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{OD}$　　C. $\overrightarrow{AO}=3\overrightarrow{OD}$　　D. $2\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$

10 在$\triangle ABC$ 中，已知 D 是边 AB 上的一点，若$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\lambda\overrightarrow{CB}$，则 $\lambda=$（　　）.

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $-\dfrac{1}{3}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

11 在直角$\triangle ABC$ 中，CD 是斜边 AB 上的高，则下列等式不成立的是（　　）.

A. $|\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$

B. $|\overrightarrow{BC}|^2=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

C. $|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$

D. $|\overrightarrow{CD}|^2=\dfrac{(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}|^2}$

三、解答题

12 如图 1－1－11 所示，在平行四边形 $ABCD$ 中，M,N 分别为 DC,BC 的中点，已知$\overrightarrow{AM}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AN}=\vec{d}$，试用$\vec{c}$，$\vec{d}$表示$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$.

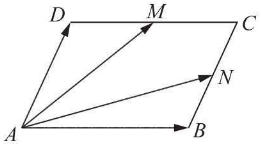

图 1－1－11

13 设两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$不共线.

（1）若$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\vec{a}+8\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=3(\vec{a}-\vec{b})$. 求证：$A,B,D$ 三点共线.

（2）试确定实数 k，使 $k\vec{a}+\vec{b}$和$\vec{a}+k\vec{b}$共线.

1.2　平面向量的分解定理及坐标表示

编者引言

向量是一种具有几何和代数双重身份的数学概念，具有完整的运算体系和良好的分析方法及结构. 它有非常直观的几何意义，是数与形的完美结合. 一方面，它可以把几何问题通过坐标表示转化为代数运算；另一方面，它也可以结合图形对向量的有关问题进行分析求解，向量在数学等领域中有着重要的作用，向量是解决数学问题和实际问题的有力工具. 掌握平面向量的坐标表示法，会用坐标法进行加减法及数乘向量的运算，理解平面向量的分解定理，掌握三点共线的判断方法. 掌握定比分点的坐标公式，会利用向量坐标讨论两个向量平行的条件.

经典拉分题 思维点评

一、平面向量分解定理

题 1　**如图 1－2－1 所示，平行四边形 $OADB$ 中，设向量 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，又已知 $BM=\frac{1}{3}BC$，$CN=\frac{1}{3}CD$，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{MN}$.**

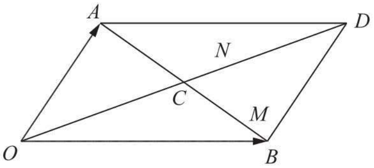

图 1－2－1

分析　由于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为两个不共线的向量，根据向量的分解定理，可以将给定的向量用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示.

满分解答　因为 $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\frac{1}{6}(\vec{a}-\vec{b})$，

所以 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$.

又 $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{OD}$，

所以 $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})$.

所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}(\vec{a}+\vec{b})-\frac{1}{6}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}$.

思维点评

用已知向量来表示另外一些向量是向量的分解定理的重点应用，在解题过程中应充分利用平面几何的一些定理，如三角形中的中位线、相似三角形对应边成比例等. 因此在求向量时要尽可能转化到平行四边形或三角形中，选用从同一顶点出发的两个基本向量或首尾相连的向量，把已知向量与未知向量转化为有直接关系的向量来求解.

题 2 如图 1-2-2 所示，将两块斜边长相等的直角三角板拼在一起，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则 $x=$________，$y=$________.

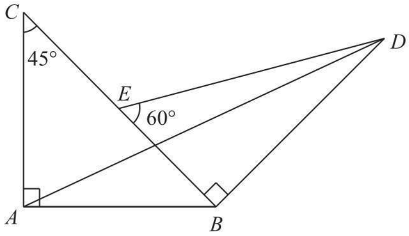

图 1-2-2

分析 如图 1-2-3 所示，作 $DF\perp AB$，设 $AB=AC=1\Rightarrow BC=DE=\sqrt{2}$，因为 $\angle DEB=60°$，所以 $BD=\frac{\sqrt{6}}{2}$，由 $\angle DBF=45°$ 解得 $DF=BF=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

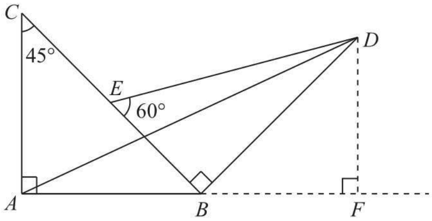

图 1-2-3

满分解答 $x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

思维点评

直角坐标系是平面向量分解定理的特例，平面的基底是一对垂直的单位向量. 在向量的应用问题中，通过建立直角坐标系来解决几何问题是一种常用的方法.

题 3 如图 1-2-4 所示，A，B，C 是圆 O 上的三点，线段 CO 的延长线与线段 BA 的延长线交于圆 O 外的点 D，若$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，则 $m+n$ 的取值范围是(　　).

A. $(0,1)$　　　　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　　　　D. $(-1,0)$

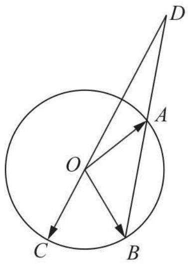

图 1-2-4

分析 构造三点共线图形，得到平面向量的三点共线结论，将此结论与$\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$对应.

依题意，由点 D 是圆 O 外一点，可设$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BA}(\lambda>1)$，则$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\lambda\overrightarrow{BA}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$.

又 C，O，D 三点共线，令$\overrightarrow{OD}=-\mu\overrightarrow{OC}(\mu>1)$，则$\overrightarrow{OC}=-\frac{\lambda}{\mu}\overrightarrow{OA}-\frac{1-\lambda}{\mu}\overrightarrow{OB}(\lambda>1,\mu>1)$，

所以 $m=-\frac{\lambda}{\mu}$，$n=-\frac{1-\lambda}{\mu}$.

故 $m+n=-\frac{\lambda}{\mu}-\frac{1-\lambda}{\mu}=-\frac{1}{\mu}\in(-1,0)$. 故选 D.

满分解答 D