几 何 与 代 数

吉林师范大学

目　　录

第一章 行列式論

§1. 数环与数体

对于任意給定的多項式和方程来說，它是被它的系数和次数所决定的．而多項式与方程的系数取在那个范圍，对于多項式和方程的討論来說，有很大关系，比方說，对多項式

$$x^5+x^4-4x-4$$

作因子分解．

在整数或有理数的范圍內，它的結果是：

$$(x+1)(x^2-2)(x^2+2).$$

在实数范圍內它的結果是：

$$(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2)$$

在复数范圍內它的結果是：

$$(x+1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$$

因此可見，在不同的范圍內討論多項式，所得的結果可能不同，所以系数取在那个范圍，对于多項式理論的探討是有很大关系的．在中学代数里，多項式的系数在初中阶段是取在所有整数和有理数这个范圍里；而在高中一年級多項式的系数則是取在所有实数这个范圍；最后当数的知識扩張到复数以后，那时多項式的系数則是取在所有复数这个范圍之內．不过在当时沒有把这个問題特殊明确出来．为了明确多項式和

方程的系数范圍，我們先来介紹数环和数体的概念。

为了以后叙述問題方便起見，我們把若干个数的全体叫做数集，并且把在中学代数里所曾遇到过的所有整数的全体叫做整数集；所有有理数的全体叫做有理数集，所有实数的全体叫做实数集；所有复数的全体叫做复数集；并且分别用 Z，R，D，K 来表示它們。下面我們就来研究一下，什么样的数集可以取为多項式和方程的系数范圍，来研究多項式。

为此，我們先来考查一下，在討論多項式时，Z，R，D，K 这四个数集可以作为多項式的系数范圍，到底是由于它們具备那些特性？

先来看，由 1，2，3，4，5 五个数所組成的数集。这个数集不能作为多項式的系数范圍来討論多項式。这是因为，对于系数是取自这个数集的某兩个多項式来說，比如

$$x+3 \qquad 3x+4$$

的系数属于給定的数集，但是，当把它們加一加，減一減，乘一乘，这时所得的多項式其系数就都已不在上面給定的数集里边了。由此可見，若以这个数集作为討論多項式的系数范圍，甚至連最基本的加、減、乘三个运算都不能作，当然更談不到对多項式作进一步的討論。

現在我們再反回来观察一下，Z，R，D，K 这四个数集。

首先看整数集 Z。我們知道，任意兩整数的和，差，积，自然是一个整数，其結果仍然在整数集里边。至于 R，D，K 这三个数集，它們也具有上面这个特征。其和，差，积仍然属于原来的数集。事实上，正由于这四个数集具有这个共同特征，才使得它們可以作为多項式的系数范圍。为了把具有上述性質的数集与其他数集区分开，我們把这样的数集命名为数环。

定义1. 令 S 是一个数集。結果对于 S 中任意二元素 a、b 来說，$a+b$，$a-b$，$a \cdot b$ 也属于 S 时，則称 S 为数环。

Z，R，D，K这四个数集都是数环，除此之外，还有很多数环，我們看几个例子．

例1．数零組成一个数环．

例2．全体偶数組成一个数环．

事实上，任意二偶数之和，差，积仍为偶数．

例3．令a是一个固定整数，则一切形如na的数，組成一个数环，此处n为任意整数．

事实上，对于任意形如na的二数，

$$n_1a\text{与}n_2a\text{，由于}n_1a\pm n_2a=(n_1\pm n_2)a$$

而$n_1\pm n_2$仍为整数，所以由定义，此数集是一个数环．

例4．一切形如$a+b\sqrt{2}$的数，組成一个数环．此处a，b是任意有理数．

事实上，令$a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}$是此数集中任意二数，由于

$$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}$$

$$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}$$

所以此数集是数环．

例5．全体奇数不是一个数环．

事实上，二奇数之和已不是奇数，所以此数集不是数环．

数环的例子是不胜枚举的，同学們可以自己再去找一些例子．

在数环当中，还有一种比較特殊的数环，这种数环就是数体．

定义2．令P是一个数环．結果下列条件成立，即P叫做一个数体（域）

1）P至少含有一个不等于零的数；

2）对于P中的任意二数，a，b来說当$b\neq0$，$\frac{a}{b}$也属于P．

容易看出，R，D，K这三个数环是数体．

例6． 例4的数环P是数体．

事实上，設$a_1+b_1\sqrt{2}$，$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$是此数集中任意兩个数．由于$a_2+b_2\sqrt{2}\neq 0$，故有

$$a_2-b_2\sqrt{2}\neq 0.$$

反之，若$a_2-b_2\sqrt{2}=0$，則由于$\sqrt{2}$是无理数，必須$a_2=0$，$b_2=0$因而$a_2+b_2\sqrt{2}$也等于零．这与假設矛盾．因此

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}=\frac{(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}{(a_2+b_2\sqrt{2})(a_2-b_2\sqrt{2})}=$$

$$=\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}\sqrt{2}.$$

由于a_1，a_2，b_1，b_2都是有理数，所以

$$\frac{a_1a_2-2b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2},\quad \frac{b_1a_2-b_1b_2}{a_2^2-2b_2^2}$$

也都是有理数．則$\dfrac{a_1+b_1\sqrt{2}}{a_2+b_2\sqrt{2}}$属于$P$，故$P$是数体．

例7． 一切形如$a+bi$的数組成一个数体，此处a，b是任意有理数（証法与例6类似）

下面我們証明数体的一个重要性質．

定理．任何数体都包含有理数体．

証明．設P是任意一个数体．因为P至少含一个不等于零的数a．因此，由数体定义的条件2）知$\dfrac{a}{a}=1$也属于P，以1与自己重复相加則得出全体正整数，因而全体正整数都属于P．另一方面，$a-a=0$也属于P（由数体定义的前提），从而0与任意正整数之差也含在P里边．因此P含全体負整数．从而，P含全体整数．于是P也包含任意二整数之商（分母不为零），因而P包含全体有理数，定理得到証明．

以后我們將以数体作为我們討論問題的范圍，所以如此，是由于在

数体內，加，減，乘，除这四种运算都可以施行，也就是說，对于数体中任意二数之和，差、积、商（分母不为0）仍然属于此数体．

而在我們的討論当中，只能遇到这四种运算，所以数体作为我們討論問題的范圍，恰好够用．

另一方面，由于就着任一数体所討論的結果，对于任一具体的数体都能适用，所以就不必將一个結論就着各个具体数体都做討論．这样一来，既簡化了討論的程序又使所得的結果能以有广泛的应用．

習　题

1． 試判定下列数集是否是数环．

1） 全体正整数；

2） 全体眞分数；

3） 一切形如$\dfrac{\beta}{2^k}$的数所組成的数集（β为奇数，k为一切非負整数）

2． 試証任意数环都含有数0．

3． 試証一切形如 $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ 的数所組的数集構成数环．（a，b，c 为任意有理数）．

4． 設P_1和P_2是兩个数体，P是一切既属于P_1又属于P_2的数所組成的数集．試証P是一个数体．

5． 有沒有只含兩个数的数环？假如有，举出实例；假如沒有，严格証明之．

§2． 二、三阶行列式

在中学我們曾經討論了二元和三元一次联立方程組，知道了求解的方法．但通常会遇到未知量的个数和方程的个数多于三个的方程組．为

了掌握普遍的理論，在第一、二兩章里我們研究帶有多个未知量的綫性方程組，即多元一次联立方程組．为了討論方便起見，首先规定用x_1，x_2，…，x_n表示未知量．用a_{ij}表示第i个方程第j个未知量的系数．用b_i表示第i个方程的常数項．我們所討論的方程，其系数属于某一个固定的数体P，即a_{ij}及b_i，都是数体P中的数．于是綫性方程組的一般形式可以写成：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s \end{array}\right\} \qquad (1)$$

如果在数体P內有一組数k_1，k_2，…，k_n，用k_i代替对应的未知量x_i以后，方程組（1）都成为等式时，則这組数k_i就叫做方程組（1）的一个解．

如同在中学看到的情形一样，綫性方程組可能只有一解，可能有无限多个解，也可能沒有解．例如：方程組

$$\left.\begin{array}{l} x_1+2x_2=7, \\ x_1+x_2=4, \end{array}\right\}$$

就有一个解：$x_1=1$，$x_2=3$ 而且这个解是它的唯一解．而方程組

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1-x_2=1, \\ 6x_1-2x_2=2, \end{array}\right\}$$

有无穷多个解：$x_1=k$，$x_2=3k-1$，不論k为任何数都是方程組的解．而方程組

$$\left.\begin{array}{l} x_1+5x_2=1, \\ x_1+5x_2=7, \end{array}\right\}$$

就沒有解．任何一組数都不能使这个方程成为等式．这样的方程組叫做矛盾方程組．

討論綫性方程組的問題，主要是判断方程組是否有解？有若干个解？如何求解？关于它的普遍理論要在第二章中討論．在本章只討論比較特殊的綫性方程組，即方程的个数与未知量的个数相等，而且仅有一个解的情形．

这种情形的討論我們要以行列式为工具，行列式是一个很重要的概念，它在数学及其它科学部門中都有着广泛的应用，其功用並不仅限于解綫性方程組．比如，在数学分析上，連分数理論上，几何学上，特别是解析几何上都有广泛的应用．

行列式的概念，起源于解含二个和三个未知量的綫性方程組．

我們考虑含有兩个未知量的綫性方程組：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

我們假定組（2）有解，为了求这个方程組的解，我們用a_{22}乘第一个方程，用$-a_{12}$乘第二个方程，然后相加，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \tag{3_1}$$

类似的，用$-a_{21}$和a_{11}分别乘第一个和第二个方程可得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \tag{3_2}$$

我們現在来研究一下（3_1）与（3_2）这兩个方程．在这兩个方程里x_1与x_2的系数都是$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，它只含有方程組（2）的未知量系数．如果把（2）的系数排成下表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{4}$$

那么就可以看出来（3_1）与（3_2）这兩个方程中x_1与x_2的系数，可經表（4）的数按下边的規則表示出来，它等于左上角与右下角这兩个数的乘积減去位于右上角与左下角的兩个数的乘积．我們把代数和

$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做二阶行列式，并用下面符号表示：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

乘积 $a_{11}a_{22}$ 及 $a_{12}a_{21}$ 称为二阶行列式的項．而 $a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为二阶行列式的元素．

一般地，对于数体 P 中任意四个数：a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 所組成的代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做元素在数体 P 上的二阶行列式，并且用記号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{4'}$$

来表示．

这里的 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 并不一定非是二元一次方程的系数．

我們約定在一个行列式里，把横排叫做行，縱排叫做列．

現在再来考查一下（3_1）与（3_2）兩式的常数項．比较这兩个常数項与未知量的系数，我們看到把未知量系数中的 a_{11}，a_{21} 依次換成方程組（2）的常数項 b_1 与 b_2，就得到（3_1）的常数項；把未知量系数中的 a_{12} 与 a_{22} 依次換成常数項 b_1 与 b_2 就得到（3_2）的常数項．于是用二阶行列式的記法，这兩个常数項可写成：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22}-b_2a_{12};\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

我們称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 为組（2）的系数行列式．

当組（2）的系数行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时，則有

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}};\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{5}$$

將組（5）代入方程組（2）后，可以驗証組（5）是組（2）的一个解．而且組（5）是組（2）的唯一解．

事实上，令x_1'与x_2'是方程組的一个解．代入組（2）后得到兩个等式：

$$a_{11}x_1'+a_{12}x_2'=b_1$$
$$a_{21}x_1'+a_{22}x_2'=b_2$$

經过与消去x_1或x_2的相同步驟，即可得到：

$$x_1'=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}};\ x_2'=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

这就是說，組（5）是組（2）的唯一解．

由于組（2）是任意一个二元綫性方程組，所以对于任意一个含有兩个二元一次方程的方程組，当它的系数行列式不等于零时，都可用（5）式求出解来．

例1．解方程組

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2&=7, \\ x_1-3x_2&=-2. \end{aligned}\right\}$$

这个方程組的系数行列式为

$$d=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7.$$

其值不为零，故可应用公式（5）求解，分子各数：

$$\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -19, \quad \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -11.$$

于是得到方程組的解为

$$x_1 = \frac{19}{7}, \quad x_2 = \frac{11}{7}.$$

現在我們来看一个含有三个未知量三个方程的綫性方程組

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + a_{33}x_3 = b_3 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

此綫性方程組的系数可排成下表:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{7}$$

与解組（2）同样我們假定方程組（6）有解，为了求方程組(6)的解，我們分别用 $a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}$，$a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}$，$a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}$乘第一，第二，第三个方程，然后相加．經过計算，得出x_2与x_3的系数等于零，把x_2与x_3这兩个未知量同时消去．我們得出方程:

$$\begin{aligned} (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{33}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{32})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + \\ + a_{13}b_2a_{32} - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}b_2a_{33} - b_1a_{23}a_{32}). \end{aligned} \tag{8}$$

在(8)式中，x_1 的系数是$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$.　　(9)

我們把这个代数和叫做一个三阶行列式，并用下面符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示.

一般地，我們把数体P上的元素a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}所構成的代数和：

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$
$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{21}a_{23}a_{32}$$

叫做元素在数体P上的三阶行列式，并且用記号：

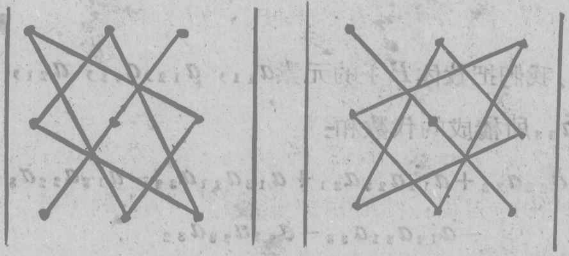
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{10}$$

来表示.

这里的a_{ij}并不一定必須是方程的系数．与二阶行列式类似，我們把（10）中的横排叫做行，縱排叫做列．a_{11}，a_{12}…，a_{33}等叫做三阶行列式的元素.

从形式上看，三阶行列式是很繁杂的，但是通过表(7）上的元素，再利用所謂对角綫規則来表述它时，將变得很簡單．为此，先介紹兩个术語.

在行列式的記号中，从左上角到右下角的对角綫称为第一对角綫（或称为主对角綫.）从右上角到左下角的对角綫叫做第二对角綫．在表示式（9）中，有三項符号是正的．其中的一項是位在主对角綫上三个元素的乘积；其它兩項中的每一項都是位在主对角綫的一条平行綫上的兩个元素与对角上元素的乘积．利用第二对角綫可以类似的得出(9)式中有負号的三項的構成規律．这样我們就得到了計算三阶行列式的一个方法．这个方法通常被叫做对角綫規則．我們把計算規則用下面兩个圖来表示：



右圖指出計算三阶行列式的正項的規則，左圖指出計算負項的規則.

例 2：

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+1\cdot1\cdot2+2\cdot(-4)\cdot3-2\cdot3\cdot2- -1\cdot(-4)\cdot5-2\cdot1\cdot3=30+2-24-12+20 -6=10.$$

例 3：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot0+0\cdot2\cdot1+(-5)(-2)(-2)-(-5)\cdot3\cdot \cdot1-0\cdot(-2)\cdot0-1\cdot2\cdot(-2)=-20+15+1=-1.$$

例 4：

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot3\cdot5+(-4)\cdot3\cdot2+1\cdot1\cdot2-2\cdot3\cdot2-2\cdot3\cdot1-1\cdot (-4)\cdot5=30-24+2-12-6+20=-10+20=10.$$

現在我們再来看（８）式，它的右端剛好就是把左端 x_1 的系数中的a_{11}，a_{21}，a_{31}分别換成（６）的常数項b_1，b_2，b_3，換句話說，就是把行列式（10）的第一列換成（６）的常数項而得到的一个三阶行列式，这个行列式用 d_1 表示：

$$d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若以 d 表示行列式（10）（d 叫做方程組（６）的系数行列式），那么