

O'Neil高等工程數學習題詳解

(上冊目錄)

第零章 緒論 1

第一章 一階微分方程式 7

0. 緒論 7 / 1. 可分離微分方程式 10 / 可分離微分方程式的一些應用 23 / 3. 齊次和“近似齊次”方程式 31 / 4. 恰當微分方程式 50 / 5. 積分因子及柏努利方程式 65 / 6. 線性一階微分方程式 86 / 7. 黎卡迪方程式 105 / 8. RL 和 RC 電路 114 / 9. 混合問題和正交軌跡 143 / 10. 初始值問題中，解的存在性和唯一性 166 / 11. 方向場 176 / 補充題 195

第二章 線性二階微分方程式 231

0. 簡介 231 / 1. 線性二階微分方程式：解的存在性與唯一性 231 / 2. 線性齊次二階微分方程式的原理 236 / 3. 微分方程的降階 248 / 4. $A^2 - 4B \geq 0$ 時， $y'' + Ay' + By = 0$ 之通解 266 / 5. 複指數函數 273 / 6. $A^2 - 4B < 0$ 時， $y'' + Ay' + By = 0$ 之通解 276 / 7. 尤拉方程式 284 / 8. 二階微分方程式以及機械系統 308 / 9. 線性非齊次二階微分方程式論 334 / 10. 未定係數法 346 / 11. 參數變換法 375 / 12. 振盪共振節拍與電路問題分析 396 / 補充題 416

第三章 高階微分方程 467

1. 理論的考慮 467 / 2. 常係數齊性方程式 474 / 3. 第 N 階尤拉型方程式 482 / 4. 未定係數法和參數變異法 491 / 補充題 509

第四章 拉普拉斯變換 533

1. 拉普拉斯變換的定義和理論 533 / 2. 利用拉普拉斯變換解初始值問題 543 / 3. 第一移位定理 551 / 4. 黑維塞函數和第二移位定理 554 / 5. 部份分式和黑維塞公式解拉普拉斯逆變換 575 / 6. 摺積 595 / 7. 多項式係數微分方程式和狄拉克 δ 函數 615 / 8. 由拉普拉斯變換求系統的解 631

第五章 微分方程式的級數解 665

1. 冪級數的回顧 665 / 2. 微分方程式的冪級數解法 680 / 3. 奇異解和 Frobenius 法 705 / 4. 第二解和對數項 724

O'Neil高等工程數學習題詳解

(中冊目錄)

第六章 初值問題的數值解 753

1. 歐拉法 753 / 2. 單步驟法 773 / 3. 多步驟及預測-修正法
786

第七章 特殊函數、司徒-呂維爾原理和固有函數展開 799

1. 貝色方程式和第一類貝色函數 799 / 2. 第二類貝色函數
812 / 3. 貝色函數的三種應用 819 / 4. 雷建德方程式和雷建
德多項式 822 / 5. 雷建德多項式的其他性質 833 / 6. 級數
展開和函數的正交集合 853 / 7. 司徒-呂維爾原理和邊界值問
題 862 / 8. 司徒-呂維爾原理與雷建德多項式和貝色函數 868

第八章 非線性微分方程式 879

1. 穩定點、臨界點、計量行為的介紹 879 / 2. 微分方程式的自
主系統 883 / 3. 穩定度以及臨界點的區分 893 / 4. 類線性系
統 898 / 5. 掠奪-被掠奪以及競爭模式 913 / 6. 極限環 919

第九章 變分法 933

1. 變分法的第一類問題 933 / 2. $\int_a^b f(x, y, y', y'') dx$ 的
歐拉方程式 940 / 3. $\iint_D f(x, y, w, w_x, w_y) dA$ 的歐拉方

程式 945 / 4 等周問題 948

第十章 差分方程 959

1. 符號、專有名詞和一階線性差分方程式 959 / 2. 二階線性齊次差分方程式 963 / 3. 非齊次二階線性差分方程式 969 / 4. 歐西-歐拉差分方程式 973 / 5. 差分方程式和負荷弦 977

第十一章 向量與向量空間 985

1. 向量的幾何及代數運算 985 / 2. 向量的點積 995 / 3. 向量的叉積 1006 / 4. 純量三重積和向量恆等式 1028 / 5. 向量空間 R^n 1032 / 6. 線性獨立和維度 1038 / 7. 抽象向量空間 1045 / 補充題 1053

第十二章 矩陣、行列式及線性方程式 1077

1. 符號及矩陣代數 1077 / 2. 矩陣乘法及晶體中之隨機路徑 1083 / 3. 一些特殊矩陣 1086 / 4. 基本列運算與基本矩陣 1089 / 5. 矩陣的簡化型 1095 / 6. 矩陣的秩和列空間 1100 / 7. 線性方程組之解：齊次型 1108 / 8. 非齊次線性方程組之解 1119 / 9. 反矩陣 1134 / 10. 行列式：定義及基本性質 1145 / 11. 行列式在電路上的應用 1165 / 12. 反矩陣之行列式公式 1171 / 13. Cramer's 法則 1178 / 補充題 1188

第十三章 固有值，固有向量以及對角線化 1201

1. 固有值及固有向量 1201 / 2. 對角化 1219 / 3. 實對稱矩陣之固有值及固有向量 1230 / 4. 正交矩陣及實對稱矩陣之對角化 1238 / 5. 正交矩陣在實二次型上的應用 1245 / 6.

單位、賀米遜及反賀米遜矩陣 1255 / 補充題 1261

第十四章 微分方程式系統的矩陣解 1277

1. 線性一階微分方程式系統的理論 1277 / 2. 常係數的齊次線性系統 1283 / 3. 當 A 具有複數固有值時 $X' = AX$ 的實數解 1293 / 4. 利用將 A 對角化解 $X' = AX$ 1302 / 5. 非齊次系統 $X' = AX + G$ ，其中 A 可對角化 1309 / 6. $X' = AX$ 的矩陣指數解 1321 / 7. 利用改變參數解 $X' = AX + G$ 1334 / 8. 變換 n 階微分方程式為一階微分方程式系統 1346 / 9. 技巧的應用及說明 1356

第十五章 向量分析 1379

1. 單變數向量函數 1379 / 2. 速度、加速度、曲率 1388 / 3. 向量場、力線 1400 / 4. 梯度 1407 / 5. 散度及旋度 1416 / 補充題 1424

第十六章 向量積分 1435

1. 線積分 1435 / 2. 葛林定理 1444 / 3. 平面中和路徑無關的勢函數理論 1450 / 4. 曲面和曲面積分 1456 / 5. 高斯及史托克定理的準備 1463 / 6. 高斯散度定理 1465 / 7. 高斯散度定理的應用 1473 / 8. 史托克定理 1477 / 9. 麥斯威爾方程式以及三度空間的位能理論 1482 / 補充題 1487 / 附錄 A 正交曲線座標 1499 / 附錄 B 葛林定理進一步的應用 1505 / 附錄 C 複習雙重積分 1508 / 附錄 D 複習三重積分 1511 / 附錄 E 多重積分的參數變換 1518

O'Neil高等工程數學習題詳解

(下冊目錄)

第十七章 傅立葉分析 1531

1. 傅立葉級數 1531 / 2. 傅立葉級數的收斂，微分以及積分 1537 / 3. 傅立葉正弦、餘弦級數 1561 / 4. 多重傅立葉級數 1569 / 5. 有限傅立葉正弦、餘弦轉換 1576 / 6. 振幅光譜的週期函數 1582 / 7. 複數傅立葉級數以及頻率光譜 1600 / 8. 傅立葉積分 1607 / 9. 傅立葉轉換 1621 / 10. 傅立葉轉換的補充特質 1629 / 11. 傅立葉轉換的一些應用 1640 / 12. 傅立葉正弦以及餘弦轉換 1652 / 13. 離散傅立葉轉換 1659 / 14. 快速傅立葉轉換 1666

第十八章 部分微分方程式的邊值問題 1671

0. 簡介 1671 / 1. 波動方程式的傅立葉級數解 1680 / 2. 熱傳方程式之傅立葉級數解 1705 / 3. 平板穩定狀態的溫度 1717 / 4. 無法運用分離變數法的問題 1732 / 5. 有關無限長圓柱的熱方程式 1742 / 6. 實心球的熱方程式 1749 / 7. 邊界值問題之多重傅立葉級數解 1752 / 8. 圓形彈性薄膜的振動 1778 / 9. 無邊界區域的熱，波動方程式之解 1783 / 10. 利用拉普拉斯變換解邊界值問題 1805 / 11. 利用傅立葉變換解邊界值問題 1814 / 12. 存在、唯一、分類及適定問題 1826

第十九章 複數和複數函數 1833

1. 複數 1833 / 2. 複數的極式 1844 / 3. 複數函數的極限和微分 1848 / 4. 柯西-里曼方程式 1851 / 5. 有理乘冪及根 1857 /
6. 複數指數函數 1865 / 7. 複數對數函數 1868 / 8. 複數乘冪 1874 / 9. 複數三角及雙曲函數 1878 / 補充題 1885

第二十章 複平面的積分 1893

1. 複數的線性積分 1893 / 2. 柯西 (Cauchy) 積分定理 1901 /
3. 柯西 (Cauchy) 定理的一些結果 1905 / 補充題 1911

第二十一章 複數數列和級數，泰勒和勞倫展開式 1919

1. 複數數列 1919 / 2. 常複數級數 1923 / 3. 複數、冪級數 1927 / 4. 複數泰勒級數 1936 / 5. 勞倫級數 1946 / 補充題 1951

第二十二章 奇異點和殘數定理 1963

1. 奇異點之分類 1963 / 2. 殘數及殘數定理 1969 / 3. 實數積分的計算 1980 / 4. 由殘數定理求級數和 2010 / 5. 幅角定理 2015 / 補充題 2019

第二十三章 保角映射 2033

1. 常見函數的映射 2033 / 2. 保角映射和線性分式轉換 2045 /
3. 已知區域間保角映射之形式 2055

第二十四章 複變分析的應用 2065

1. 流體分析的複變分析法 2065 / 2. 逆拉普拉斯轉換的殘數公式 2072 / 3. 諧和函數和狄利克雷問題 2076

第〇章 緒 論

下列各問題均描述一個物理過程，綜合一些經實驗證實的觀察，以及在某些情況下，將其簡化的假定。在例題 1 至 5 的內容中，導出一個支配著過程的微分方程式。在標示及定義一些變數，或對於導數每個基本步驟予以說明時，均需清楚交代。若有幫助，可利用繪圖來說明變數。

1. 牛頓冷卻定律。牛頓以實驗證明出，一物體的表面溫度藉物體溫度與其周遭介質（如空氣）的差，以正比的變率而改變。假設空氣溫度為恒定。試依據牛頓定律，對於在空氣中冷卻之物體溫度，寫出一微分方程式。

圖 設物體表面溫度為 T ，周遭空氣溫度為 C （常數）

由物理現象知，物體表面溫度變率 $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ 和物體表面溫度與周遭介質（空氣）之差 $(T - C)$ 成正比，即

$$\frac{dT}{dt} \propto (T - C) \quad \therefore \frac{dT}{dt} = -K(T - C)$$

K 為常數（通常前加一負號，以使在解微分方程時使 K 為正值。）

2. 人口數模型 假設在任何時間 t ，培養皿中細菌總數的變化率是以與細菌總數成比例的速率變化，寫出細菌數 $P(t)$ 對任一時間 t 的微分方程。

圖 設任一時間 t 時，細菌總數為 $P(t)$ ，由題意知細菌總數變化率

$$\frac{d}{dt} P(t) \text{ 正比於細菌總數 } P(t), \text{ 即 } \frac{d}{dt} P(t) \propto P(t),$$

$$\therefore \frac{d}{dt} P(t) = KP(t), \text{ 其中 } K \text{ 為某一常數。}$$

3. 人口模式。假設在任何時間 t ，美國的出生率和死亡率均為該時刻人口的恒定倍數（不一定為相同的常數）。假設移入及移出的人口為零，試對時間 t 的人口寫出一微分方程式。

圖 設在任一時間 t 時，人口為 $P(t)$

則由題意知，出生人口為 $A \cdot P(t)$

死亡人口為 $B \cdot P(t)$ A, B 為常數

$$\therefore \frac{dP(t)}{dt} = (A - B) P(t)$$

2 第零章 緒 論

4. Boyle-Mariotte 氣體定律。在恒溫及低壓 P 時，在壓力下，氣體體積 V 的改變率，與 $-V/P$ 成比例，試對 V ，以 P 的形式求一微分方程式，然後以積分解此方程式。

解 由題意知，氣體體積的變化率 $\frac{dV(p)}{dp}$ 和 $-\frac{V}{P}$ 成比例

$$\therefore \frac{dV(p)}{dp} = -C \frac{V}{p} \quad \therefore \frac{dV}{V} = -C \frac{dp}{p}$$

積分上式 $\int \frac{dV}{V} = -C \int \frac{dp}{p}$

$$\therefore \ln V = -C \ln P + K \quad \therefore V = -AP^{-C}$$

(A, K, C 為常數)

5. 有一質量 m 的球，由地球表面向上拋，作用於球上的力是重力引起的定加速度，以及正比於速度的空氣阻力。試對球的運動寫出一微分方程式。

解 球在運動過程中所受的力為

① 重力 $G = m \cdot g$

② 空氣阻力 $R = Kv(t)$

由牛頓第二運動定律 $F = m \cdot a$ 知

$$m \cdot g + Kv(t) = m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

6. 有一道光束朝下射入海洋中，當穿過海水時，有部份被吸收，其強度以正比於任何已知深度時強度的比率減少。以強度作為深度的函數，試寫出其微分方程式。

解 設深度 h 時之強度為 $I(h)$

由題意知 $\frac{dI(h)}{dh} = -CI(h)$ (負號表減少)

7. 冰凍湖上冰的厚度，以正比於時間平方根的比率增加。在任何時間 t ，試對厚度寫出一微分方程式。

解 設在時間 t 時，冰的厚度為 $h(t)$

由題意知 $\frac{dh(t)}{dt} \propto \sqrt{t}$

$$\therefore \frac{dh(t)}{dt} = K\sqrt{t} \quad (K \text{ 為常數})$$

8. 子彈的速度。有一重 1 盎斯的子彈由地表垂直向上發射。槍口速度是 1500 feet/second，作用在子彈上的力為(1)空氣阻力，此約為 $v^2/1000$ (v 為速度)，及(2)地心引力。忽略其他的力(如風)，在時間 t 時，對

速度 $v(t)$ 求出一微分方程式。
 今子彈所受之力為：①空氣阻力—— $\frac{v^2(t)}{1000}$

②重力—— $m \cdot g = \frac{1}{16}$ 磅

由牛頓第二運動定律 $F = m \cdot a$ 知 (設力往上 \uparrow 為 (+))

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = -mg - \frac{v^2(t)}{1000}$$

$$\therefore \frac{dv(t)}{dt} = -g - \frac{v^2(t)}{1000m} = -32 - \frac{64v^2(t)}{125}$$

9. 複利。有一人以 6% 的利息投資 \$4000 元，以連續複利計算。試對於此人在任何稍後的時間 (假設沒有收回)，於帳戶內將會有的數量寫出一微分方程式，以積分解此式。在什麼時間 t 時他將成爲一個百萬富翁？

設於時間 t 時之本利和爲 $A(t)$

由題意知 $\frac{dA(t)}{dt} = 0.06A(t)$

積分上式 $\int \frac{dA}{A} = \int (0.06) dt$

$$\therefore \ln A = 0.06t + C \Rightarrow A = Ke^{0.06t}$$

邊界條件 $t = 0$ 時 $A = 4000$ 代入 $\therefore A = 4000e^{0.06t}$

如欲達到一百萬 $\Rightarrow 10^6 = 4000e^{0.06t}$

$$\therefore t = 16.67 \ln(250) \doteq 92 \text{ (year)}$$

10. 斜面上的運動。一個 50 磅的木塊，在一個與水平成 30° 角的斜面頂端由靜止釋放。空氣阻力爲 $v/2$ ，在此 v 爲速度，摩擦係數爲 0.34。因此作用於物體上的摩擦力爲 $0.34N$ ，其中 N 是由物體上的平面垂直於斜邊的作用力。假設物重、空氣阻力和摩擦力爲作用於木塊上的所有力，在時間 t 時，對其速度 $v(t)$ ，寫出一微分方程式。

木塊所受的力爲空氣阻力—— $R = \frac{1}{2}v(t)$

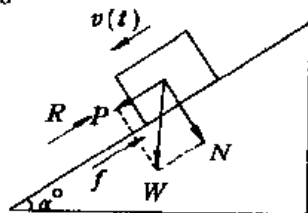
摩擦力—— $f = \mu N$

下滑力—— $P = W \sin \alpha$

由牛頓第二運動定律知 $F = m \cdot a$ 知

$$P - f - R = \frac{W}{g} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\therefore W \sin \alpha - \mu N - \frac{1}{2}v(t) = \frac{W}{g} \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$



4 第零章 緒 論

將數值代入 ($\alpha = 30^\circ$, $\mu = 0.34$, $W = 50$, $g = 32.2$,
 $N = 50 \cos 30^\circ$)

$$\Rightarrow 25 - 14.72 - 0.5v(t) = 1.55 \frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow 10.28 - 0.5v(t) = 1.55 \frac{dv(t)}{dt}$$

11. 水中鹽份的混合。在起始時間 $t = 0$, S_0 磅的鹽溶於槽中 500 加侖的水內。在每個 $t > 0$ 的時間, 2 磅/加侖的鹽以 6 加侖/分的速率倒入槽中。攪拌使鹽溶解, 然後鹽水以 6 加侖/分的速率由開口抽出。在任何時間 $t > 0$ 時, 對槽中鹽的數量寫出一微分方程式。用直接積分來解所得的微分方程式。利用此解, 描述當 $t \rightarrow \infty$ 時, 槽中鹽的數量會有何結果?

解 設鹽總重 W

由題意知, 鹽以定速率 2 磅/加侖 \times 6 加侖/分 = 12 磅/分 加入槽中
 同理, 溶液以定速率 6 加侖/分 抽出

\therefore 鹽以 $\frac{W}{500}$ 磅/加侖 \times 6 加侖/分 = $\frac{3}{250}W$ 磅/分 由槽中取出

$$\text{即 } \frac{dW}{dt} = 12 - \frac{3}{250}W = \frac{-3}{250}(W - 1000)$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{W - 1000} = \frac{-3}{250} dt$$

$$\text{積分之 } \ln |W - 1000| = \frac{-3}{250} t + C' \Rightarrow W = 1000 + Ce^{\frac{-3}{250}t}$$

$$\text{B.C. } t = 0, W = S_0 \quad \therefore S_0 = 1000 + C \quad C = S_0 - 1000$$

$$\therefore W = 1000(1 - e^{\frac{-3}{250}t}) + S_0 \cdot e^{\frac{-3}{250}t}$$

$$\text{當 } t \rightarrow \infty \text{ 時, } e^{\frac{-3}{250}t} \rightarrow 0 \quad \therefore W \rightarrow 1000$$

12. 質量 m 的物塊, 通過一油性混合物中而落下, 在其中所作用的力為重力引起的加速度, 及正比於 v 的阻力, 此處 v 為在時間 t 的速度。對 v 導出一微分方程式。

解 物塊所受的力為 ① 重力—— $m \cdot g$ g 為重力加速度

② 阻力—— $K \cdot v(t)$ K 為常數

由牛頓第二運動定律 $F = m \cdot a$ 知

$$-K \cdot v(t) + m \cdot g = m \cdot \frac{dv(t)}{dt} \quad (\text{往下為正})$$

$$\therefore \frac{dv(t)}{dt} = \frac{-K}{m} \cdot v(t) + g$$

13. 有一球體，半徑 R ，質量 m ，掉入一稠密的油性物質內，在此液體中，作用在球體 t 的力為(1)重力引起的加速度，(2)相當於由球體所排開油性物重量的浮力，及(3)由 $6\pi\mu Rv$ 所得的阻力，其中 v 是球體速度， μ 是油性物質的黏滯係數，為一常數。對 v 求一微分方程式。

解 球體在稠密油性物質中所受的力為

① 重力—— $G = m \cdot g$

② 浮力—— $B = g \cdot V \cdot \rho = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) \cdot \rho \cdot g \dots$ (ρ 為油質之密度)

③ 阻力—— $P = 6\pi\mu Rv(t)$

由牛頓第二運動定律 $F = m \cdot a$ 知

$$mg - 6\pi\mu Rv(t) - \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)\rho g = m \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

14. 有一木塊浮在水中，設此木塊上下浮動，故其頂端與底部均保持水平，而側邊為垂直，試對其運動導出微分方程式。

解 設木塊靜止在水中，深度為 h 時，所受的力為

① 浮力—— $B = \rho_w abhg$

(ab 為木塊之截面積， ρ_w 為水的密度)

② 重力—— $G = m \cdot g$

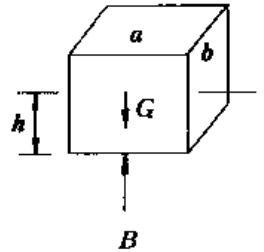
由阿基米德原理知，兩者達成平衡

$$B = G \Rightarrow m = \rho_w abh$$

若木塊再往下壓 y ，則 $F = mg - \rho_w ab(h+y)g$

$$\Rightarrow m \frac{d^2y}{dt^2} = -\rho_w g aby \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{h} y$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{g}{h} y = 0$$



15. 有一簡諧單擺，長度以 v 的穩定變率而增加，單位是英尺/分。在此， t 是時間， L_0 為起始長度，且

$$x = \frac{L_0 + vt}{v}$$

試導微分方程式

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\theta}{dx} + \frac{g}{v} \frac{1}{x} \theta = 0$$

解 由右圖知切線方向的力為 $mg \sin \theta$ ，切線方向的加速度為 $\ell \ddot{\theta} + 2\dot{\ell} \dot{\theta}$ 其中 $2\dot{\ell} \dot{\theta}$ 為科氏加速度，由於運動方向和角度增加方向相反

$$\therefore -mg \sin \theta = m(\ell \ddot{\theta} + 2\dot{\ell} \dot{\theta}) \dots \dots \dots ①$$

6 第零章 緒 論

$$\because \frac{d\ell}{dt} = v \quad \therefore \ell = vt + C \text{ 代入 B.C. } \ell(0) = L_0 \Rightarrow \ell = vt + L_0$$

$$\because x = \frac{L_0 + vt}{v} \Rightarrow \ell = v \cdot x \text{ 且 } \frac{dx}{dt} = 1$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\theta}{dx}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{dx} \right) = \frac{d^2\theta}{dx^2} \text{ 代入①式, 取 } \sin \theta \approx \theta$$

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\dot{\ell}}{\ell} \dot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{\dot{\ell}}{\ell} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

$$\because \frac{d\ell}{dt} = v, \ell = vx \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{2}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} + \frac{g}{v} \cdot \frac{1}{x} \theta = 0$$

第一章 一階微分方程式

1.0 緒 論

在1~10各題中，試求已知函數是否為已知微分方程式的一解，C恆表一常數。

1. $2yy' = 1$; $\varphi = \sqrt{x-1}$

解 $y' = \{ (x-1)^{\frac{1}{2}} \}' = \frac{1}{2} (x-1)^{-\frac{1}{2}}$

$$\therefore 2yy' = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1$$

$\therefore y = \sqrt{x-1}$ 為其一解。

2. $y' + y = 0$; $\varphi = Ce^{-x}$

解 $y = Ce^{-x} \Rightarrow y' = -Ce^{-x}$

$$\therefore y' + y = -Ce^{-x} + Ce^{-x} = 0$$

$\therefore y = Ce^{-x}$ 為其一解。

3. $y' = -\frac{2y+e^x}{2x}$, $x > 0$; $\varphi = \frac{C-e^x}{2x}$, $x > 0$

解 $y = \frac{C-e^x}{2x}$

$$y' = \frac{(-e^x)(2x) - (C-e^x)(2)}{4x^2} = \frac{-2xe^x - 2C + 2e^x}{4x^2} = \frac{2y+e^x}{2x}$$

$$= -\left(\frac{\frac{2C-2e^x}{2x} + e^x}{2x} \right) = \frac{-2xe^x - 2C + 2e^x}{4x^2}$$

$$\therefore y = \frac{C-e^x}{2x} \text{ 為 } y' = -\frac{2y+e^x}{2x} \text{ 之一解。}$$

8 第一章 一階微分方程式

4. $y' = \frac{2xy}{2-x^2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$; $\varphi = \frac{C}{x^2-2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$

解 $y = \frac{C}{x^2-2} \Rightarrow y' = \frac{-2Cx}{(x^2-2)^2} = -\frac{(2x)\frac{C}{x^2-2}}{(x^2-2)} = \frac{2yx}{2-x^2}$
 $\therefore y = \frac{C}{x^2-2}$ 爲其之一解。

5. $xy' = -y + x$; $\varphi = \frac{x^2-3}{2x}$, $x \neq 0$

解 $y = \frac{x^2-3}{2x} \Rightarrow y' = \frac{(2x)(2x) - 2(x^2-3)}{(4x^2)} = \frac{2x^2+6}{4x^2}$
 $x\left(\frac{2x^2+6}{4x^2}\right) + \frac{x^2-3}{2x} - x = \frac{x^2}{x} - x = 0$
 $\therefore y = \frac{x^2-3}{2x}$ 爲其之一解。

6. $y' + y = 1$; $\varphi = 1 + Ce^{-x}$

解 $y' = 0 - Ce^{-x}$
 $\therefore y' + y = -Ce^{-x} + 1 + Ce^{-x} = 1$
 $\therefore y = 1 + Ce^{-x}$ 爲其解。

7. $x^2yy' = -1 - xy^2$; $\varphi = \frac{4-x^2}{2x}$, $x \neq 0$

解 $y' = \frac{(-2x)2x - 2(4-x^2)}{(2x)^2} = \frac{-2x^2-8}{4x^2}$
 $x^2yy' = x^2\left(\frac{4-x^2}{2x}\right)\left(\frac{-2x^2-8}{4x^2}\right) = \frac{x^4-16}{4x}$
 $-1 - xy^2 = -1 - \frac{16-8x^2+x^4}{4x} \neq \frac{x^4-16}{4x}$
 $\therefore y = \frac{4-x^2}{2x}$ 不爲其解。

8. $y' + 2y = 0$; $\varphi = \sin(3x) - 4$

解 $y = \sin(3x) - 4 \Rightarrow y' = 3\cos(3x)$
 $\therefore y' + 2y = 3\cos(3x) + 2\sin(3x) - 8 \neq 0$

$\therefore y = \sin(3x) - 4$ 不為其解。

9. $\sinh(x)y' + y \cosh(x) = 0$; $\varphi = \frac{-1}{\sinh(x)}$

解 $y = \frac{-1}{\sinh(x)} \Rightarrow y' = \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)}$

$$\begin{aligned} \therefore \sinh(x)y' + y \cosh(x) \\ = \sinh(x) \frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)} + \frac{-1}{\sinh(x)} \cosh(x) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore y = \frac{-1}{\sinh(x)}$ 為其一解。

10. $y' - 3y = x$; $\varphi = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} + Ce^{3x}$

解 $y' = -\frac{1}{3} + 3Ce^{3x}$

$$\begin{aligned} \therefore y' - 3y &= -\frac{1}{3} + 3Ce^{3x} - 3\left(-\frac{x}{3} + \frac{1}{3} + Ce^{3x}\right) \\ &= x - \frac{4}{3} \neq x \end{aligned}$$

$\therefore y = \frac{x}{3} + \frac{1}{3} + Ce^{3x}$ 不為其解。

問題 11 到問題 15 中，證明隱函數為微分方程式的解。

11. $y^2 + xy - 2x^2 - 3x - 2y = C$;
 $(y - 4x - 3) + (x + 2y - 2)y' = 0$

解 原式對隱函數 x 微分，

得 $2yy' + y + xy' - 4x - 3 - 2y' = 0$

整理得 $(y - 4x - 3) + (x + 2y - 2)y' = 0$

12. $xy^2 - y = C$; $y^2 + (3xy^2 - 1)y' = 0$

解 原式對隱函數 x 微分，

得 $y^2 + 3xy^2y' - y' = 0$

整理得 $y^2 + (3xy^2 - 1)y' = 0$

13. 類似問題 11 的作法。

14、15. 類似問題 12 的作法。

10 第一章 一階微分方程式

在問題16到19中，藉直接積分找出微分方程式的通解，使用相同座標軸，藉由不同參數選定畫出此通解的函數圖形，並找出滿足初始條件的特解，並畫出特解的圖形。

16. $y' = 2x$; $y(2) = 1$

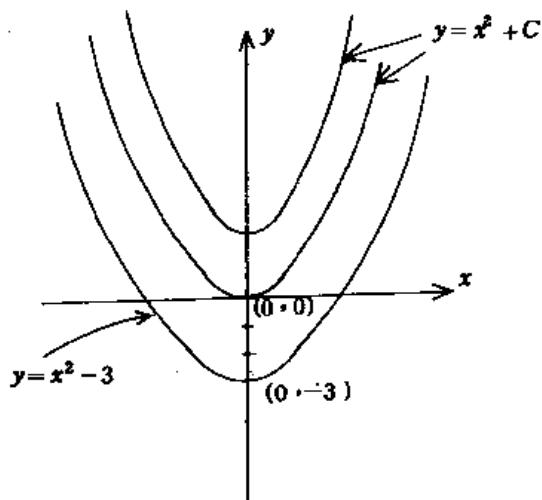
解 $\frac{dy}{dx} = 2x$

通解為： $y = x^2 + C$

$y(2) = 1$

$\therefore C = -3$

特解為： $y = x^2 - 3$



17. $y' = e^{-x}$; $y(0) = 2$

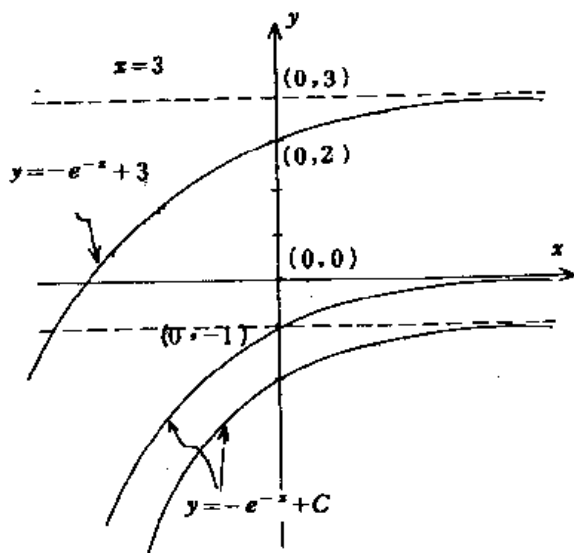
解 $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$

通解為： $y = -e^{-x} + c$

$y(0) = 2$

$\therefore C = 3$

特解為： $y = -e^{-x} + 3$



18、19. 參考問題16的作法。

1.1 可分離微分方程式

在習題1到16中，試求方程式是否為可分離。若是，求其通解；若不是，可以不用再繼續算。並藉著代回微分方程式來驗算各解。