现代控制理论

（二）

（线性系统的最优控制）

哈尔滨工业大学　夏德钤　编著

郑州工学院印

目　录

第四章
变分法及无约束的最优控制

§4—1 最优控制的概念

一个系统在某种条件下寻找它最好的控制过程的问题，称为最优控制问题。在科学技术、经济、国防等部门，特别是在空间技术中，许多控制方案的选定，控制参量的选择等等，都可以归结为最优控制问题。下面举几个例子来说明。

〔例4—1〕 一个连续搅拌槽，槽内原置有与周围环境温度一样温度的液体，为简化计，认为环境温度是0℃。现在入口处流入温度为$u(t)$的液体，流量为每小时若干立升。在槽的下部出口处流出等量的液体，使槽内液面不变，只要经过槽内搅拌，使不同温度液体均匀混合。现在要求一个最优的温度随时间的变化规律$u^0(t)$，以使槽内液体的温度经过一小时能从0℃提高到40℃，并且使散失掉的热量最少。

该槽内液体温度为$x(t)$，温度的变化速度与温度差〔$u(t)-x(t)$〕成正比，为了简单设比例常数为1，则$x(t)$和$u(t)$满足微分方程

$$\dot{x}(t)=u(t)-x(t) \qquad (4-1)$$

散失掉的热量则与下列积分成比例

$$J(u)=\int_0^T [x^2(t)+ru^2(t)]dt \qquad (4-2)$$

式中 T——液体加温的终止时间，即1小时。

r——某个确定的>0的数。

我们面临的问题是，找出一个温度随时间变化的规律$u^0(t)$，使槽内液体的温度由初始的0℃在一小时后升高到40℃，并使热量损失$J(u)$最

小。

这个问题可以这样分析，即液体的初始温度$x(0)=0$℃和终端温度$x(T)=40$℃都已给定的情况下，如果我们先确定一个温度变化规律$u_1(t)$，则代入式（4－1），就可解出槽内液体温度随时间变化的规律$x_1(t)$，然后由式（4－2）就算出当$u(t)=u_1(t)$，$x(t)=x_1(t)$的情况下，将槽内液体在1小时时间内从0℃提高到40℃的过程中热量损失

$$J(u_1)=\int_0^T [x_1^2(t)+ru_1^2(t)]dt$$

如果有几种不同的温度变化规律$u_1(t)$，$u_2(t)$，$u_3(t)$……都可以在1小时后将槽内的液体的温度由0℃提高到40℃，相应地槽内液体的不同温度有$x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$……，损失的热量也分别为$J(u_1)$、$J(u_2)$、$J(u_3)$……，它们有的大有的小。最优控制问题就是要找到一个唯一的控制$u^0(t)$，使系统的状态（槽内液体温度）由$x(0)=0$转移到$x(T)=40$，并使性能指标函数（又称目标函数）$J(u)$最小。

〔例4－2〕 电枢控制的他激直流电动机，其动态方程为

$$J\frac{d\omega}{dt}+M_L=C_M I_a$$

式中 M_L ——恒定负载转矩；

J ——转动惯量；

I_a ——电枢电流；

ω ——电机之角速度；

C_M ——转矩常数。

希望电动机在t_f时间内，从静止状态起动，转过一定的角度θ后停止，即有

$$\omega(0)=0\;;\quad \omega(t_f)=0\,,\quad \int_0^{t_f}\omega\,dt=\vartheta.$$

现要求解在〔0, t_f〕时间内使电枢绕组上的损耗

$$Q=\int_0^{t_f}RI_a^2\,dt$$

为最小的电枢电流I_a，式中R是绕组电阻。

这也是一个最优控制问题，我们还可以将它写成更典型的形式。

设电动机转角为$x_1(t)$，角速度为$x_2(t)$，$I_a-\dfrac{M_f}{C_M}=u(t)$，则可写出状态方程

$$\dot{X}(t)=AX(t)+Bu(t) \qquad (4-3)$$

式中

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{C_M}{J}\end{pmatrix}$$

其初始状态和终端状态给定为

$$x_1(0)=0 \qquad x_1(t_f)=\vartheta$$

$$x_2(0)=0 \qquad x_2(t_f)=0$$

求最优控制$u^0(t)$，以使下列性能指标函数为最小

$$J(u)=\int_0^{t_f}R\left[u(t)+\frac{M_f}{C_M}\right]^2dt \qquad (4-4)$$

〔例4—3〕 例〔4—2〕也可以不要求使电枢绕组的损耗最小，而要求电动机的转角$x_1(t)$从$x_1(0)=0$转到$x_1(t_f)=\vartheta$所经历的时间

t_f 最短，但是需要满足约束条件 $|u(t)| \leqq 1$。这时问题的提法是

已知状态方程

$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}X(t)+B\,u(t)$$

和给定的初始状态及终端状态

$$x_1(0)=0 \qquad x_1(t_f)=\vartheta$$

$$x_2(0)=0 \qquad x_2(t_f)=0$$

在约束条件 $|u(t)| \leqq I$ 之下，确定出最优控制 $u^0(t)$，使性能指标函数

$$J(u)=\int_0^{t_f} dt=t_f \tag{4—5}$$

达到极小值。

从以上这些例子可以总结出以下这一点，即最优控制问题都有一个描述受控系统过程的状态方程，又都有一个评价性能是否优良的性能指标函数。这种性能指标函数是依赖于控制 $u(t)$ 的泛函，能使指标泛函取最小值或最大值的控制 $u^0(t)$ 称为最优控制。以下如果不指明，均指取最小值意义下的最优。

下面对最优控制问题的状态方程和指标泛函分别作一些讨论。

(1) 求解最优控制时对系统状态方程有些要求。将状态方程写成

$$\dot{X}(t)=f(X,U) \tag{4—6}$$

式的 $X=[x_1, x_2, \cdots\cdots x_n]^T$ 是n维向量，$U=[u_1, u_2, \cdots\cdots, u_r]^T$ 是r维向量，$f(X,U)=[f_1(X,U), f_2(X,U), \cdots\cdots, f_n(X,U)]^T$ 是n维向量函数。

在最优控制问题中，要求对于向量变量X(t)的每一个值和控制向量变量U(t)的每一个值，向量函数$f[X(t), U(t)]$的诸分量，即函数f_i（$f=1, 2, \cdots\cdots, n$）是有定义的，又设f_i（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）对于一切变量$x_i(t)$，$u_j(t)$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$；$j=1, 2, \cdots\cdots, r$）连续，对于变量$x_i(t)$（$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）连续可微，换句话说，函数

$$f_i(x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots\cdots u_r(t))$$

及 $$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x_1(t), x_2(t), \cdots\cdots x_n(t), u_1(t), u_2(t), \cdots\cdots, u_r(t))$$

$$(i, j=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

对变量x_i，u_j是连续的。

(2) 有的系统对于U(t)不加约束，有的系统对U(t)要加以约束，即要求控制函数U(t)满足如下的约束条件：

$$\varphi_j(X, U) \leqq 0 \quad (j=1, 2, \cdots\cdots l, \ l \leqq r) \quad (4-7)$$

例如我们在〔例4—3〕中给出的$|u(t)| \leqq I_a$或$\left|\frac{u(t)}{I_a}\right| -1 \leqq 0$，就是对控制U(t)经常使用的一种约束条件。

如果认为对U(t)不加约束时，是表示U(t)在空间R^r中取值，即认为U(t)属于R^r空间，往往表示为

$$U(t) \in R^r，对于每一个 t \in [t_0, t_f] \quad (4-8)$$

上式中的符号$\in$表示“属于”，$[t_0, t_f]$表示时间闭区间。

对控制U(t)加约束条件时，则认为控制U(t)在R^r空间中的某一有界闭集U内取值，表示为

$$U(t) \in U \text{，对于每一个 } t \in [t_0, t_f] \tag{4-9}$$

我们今后对于U(t)不加形 如式（4—7）那样的不等式约束条件的最优控制问题称为无约束的最优控制，反之则称为有约束的最优控制。

(3) 对于系统的初始状态都是给定的，即

$$X(t_0) = X^{(0)}$$

而在终端时刻 $t = t_f$，要求满足终端约束条件：

$$\psi_i(X(t_f), t_f) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, m, \quad (m \leq n) \tag{4-10}$$

满足终端条件式（4—10）的 $X(t_f)$ 可能是一个固定的点，则称为固定终端的最优控制问题，例如〔例4—1〕，〔例4—2〕，〔例4—3〕都是这一类。

无终端约束的问题称为自由端点的最优控制问题。

(4) 指标泛函一般的形式是

$$J(U) = \varphi(X(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(X(t), U(t))\,dt \tag{4-11}$$

式（4—11）等号右侧第一项称为末值项或终端代价，第二项称为积分项。在指标泛函中设置末值项的目的是为了保证在终端时间 t_f 时，系统的终端状态能与给定终端状态尽量接近，而积分项则是为了保证系统的某些综合性能。

如果在指标泛函J(U)的表示式中无末值项，即 $\phi(X(t_f), t_f) = 0$，则称

$$J(U) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(X(t), U(t))\,dt \tag{4-12}$$

为积分型性能指标。

如果在指标泛函 $J(U)$ 的表示式中无积分项，即

$$J(U)=\phi(X(t_f)) \tag{4-13}$$

则称 $J(U)$ 为末值型性能指标。

如果指标泛函 $J(U)$ 是有积分项，而且其被积函数

$$f_0(X(t),\ U(t))=1$$

即

$$J(U)=\int_0^{t_f} dt=t_f \tag{4-14}$$

则称为快速控制问题，例如前面举出的〔例4—3〕即属此类。

(5) 解最优控制问题要求指标泛函中的被积函数 $f_0(X(t),\ U(t))$ 对于 $n+r$ 个变量 $x_i(t)$, $u_j(t)$ （$i=1, 2, \cdots\cdots, n$; $j=1, 2, \cdots\cdots, r$）连续，而对于所有的 $x_i(t)$ （$i=1, 2, \cdots\cdots, n$）连续可微。

(6) 状态方程不明显地依赖于时间 t 的系统称为自治系统。自治系统解的轨迹相对于沿时间轴 t 来回移动都是不变的。因此对于自治系统，重要的仅是过程的持续时间，并且可以认为初始时间 $t_0=0$。

对于非自治系统，其状态方程和指标泛函将是

$$\dot{x}_i(t)=f_i(t,\ X(t),\ U(t)),\quad i=1, 2, \cdots\cdots, n \tag{4-15}$$

$$J(U)=\varphi(X(t_f),\ t_f)+\int_{t_0}^{t_f} f_0(t,\ X(t),\ U(t))\,dt \tag{4-16}$$

这里初始时间 t_0 是给定的。

我们可以引入一个新的辅助变量 $x_{n+1}(t)$，它服从以下状态方程

$$\dot{x}_{n+1}(t)=1 \qquad x_{n+1}(t_0)=t_0 \tag{4-17}$$

于是$x_{n+1}(t)=t$，利用引入$x_{n+1}(t)$，则可将非自治系统的方程式（4—15）写成

$$\dot{x}_i(t)=f_i(X, U),\quad i=1, 2, \cdots\cdots, n, n+1,\quad f_{n+1}(X, U)=1 \tag{4—18}$$

这样，非自治系统与自治系统就无本质的区别了，只是将状态变量的维数扩大了。

对于离散系统，其状态方程是

$$X_{k+1}=\varphi(k, X_k, U_k),\qquad X_0=X^{(0)}$$
$$k=1, 2, \cdots\cdots N \tag{4—19}$$

其中$X_k=[x_{1k}, x_{2k}, \cdots\cdots, x_{nk}]^T$是n维向量，而$U_k=[u_{1k}, u_{2k}, \cdots\cdots, u_{rk}]^T$是r维向量，$\varphi=[\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots\varphi_n]^T$是n维向量函数。

终端约束条件是

$$\psi_i(X_N, N)=0,\quad i=1, 2, \cdots\cdots, m\ (m\leqq n) \tag{4—20}$$

对控制U_k的约束是

$$\rho_i(k, X_k, U_k)\leqq 0,\quad i=1, 2, \cdots\cdots l\ (l\leqq r) \tag{4—21}$$

要求解出最优控制U_k^0，使指标泛函

$$J(U)=\phi(X_N, N)+\sum_{k=1}^{N}\varphi_0(k, X_k, U_k) \tag{4—22}$$

达到最小值。

对于非确定性的随机系统，其状态方程和指标泛函将在第八章中去介绍。

§ 4—2 多元函数的极值

最优控制问题就是求指标泛函的最小值的问题，对于无约束的最优控制通常用变分方法就可以求解，对于有约束的最优控制通常用以变分法为基础的极小值原理（也可以称为极大值原理）去求解，当然对以上两种最优控制也可以用动态规划方法去求解。变分法可以称为解最优控制问题的一个重要工具。变分法与函数求极值的方法是类似的，这一节先简单地将多元函数求极值的方法回顾一下，然后介绍变分法。

设两个自变量 x_1, x_2 的函数 $f(x_1, x_2)$ 在区间 $a < x_1 < b$；$c < x_2 < d$ 上有定义，并且存在二阶连续偏导数，又设函数 $f(x_1, x_2)$ 在定义区间有极小点 (x_1^0, x_2^0)。当任意给变量 x_1 和 x_2 一个充分小的变分 δx_1, δx_2（微分），则可求得函数 f 的增量 Δf。根据泰勒公式，如果只取 δx_1, δx_2 的线性和二阶部分，则

$$\Delta f = f(x_1^0+\delta x_1, x_2^0+\delta x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

$$= \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^0, x_2^0)} \delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1^0, x_2^0)} \delta x_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\left[\delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right]^2 f\right|_{(x_1^0, x_2^0)} \geq 0 \qquad (4-23)$$

式中：$\left[\delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \delta x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right]^2 f$ 表示

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\delta x_1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\delta x_1 \delta x_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\delta x_2)^2$$

它是比 $(|\delta x_1|, |\delta x_2|)$ 高阶的无穷小量。

式（4—23）对任意的δx_1和δx_2都成立，所以函数在点（x_1^0, x_2^0）取极小值（局部的）的必要条件是Δf 中的线性部分等于零，即应有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_1^0,\ x_2^0)}=0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{(x_1^0,\ x_2^0)}=0 \tag{4-24}$$

如若式（4—24）的解确实是使函数 f 取极小值，还必须将式（4—24）代入到式（4—23）中得到的Δf 满足

$$\Delta f=\frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|_{(x_1^0,\ x_2^0)}(\delta x_1)^2+\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right|_{(x_1^0,\ x_2^0)}(\delta x_2)^2+2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{(x_1^0,\ x_2^0)}\delta x_1 \delta x_2\right]>0 \tag{4-25}$$

将式（4—25）写成矩阵的形式，即

$$\Delta f=(\delta X)^T\left.\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}\right|_{(x_1^0,\ x_2^0)}(\delta X)>0 \tag{4-26}$$

式中　$\delta X=[\delta x_1,\ \delta x_2]^T$

当矩阵

$$\left.\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}\right|_{(x_1^0,\ x_2^0)}$$

是正定的，则式（4—24）就是函数$f(x_1, x_2)$在点(x_1^0, x_2^0)取极小值（当然还是局部的）的必要而且充分的条件。

以上结果很容易推广到多元函数。

如果多元函数$f(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n)$在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots x_n^0)$存在二阶连续偏导数且有极小值，则

$$\left.\frac{\partial f(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n)}{\partial x_i}\right|_{(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_n^0)} = 0,$$

$$i = 1, 2, \cdots\cdots, n \qquad (4-27)$$

矩阵

$$\left[\frac{\partial^2 f(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_n^0)},$$

$$1 \leqq i \leqq n, \quad 1 \leqq j \leqq n \qquad (4-28)$$

是正定的。

式（4—27）、（4—28）是函数$f(x_1, x_2 \cdots\cdots, x_n)$在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_n^0)$处取极小值（局部的）的必要而且充分的条件。

§ 4—3 求泛函的极值和条件极值的变分法

依赖于某一类函数中的一个函数或几个函数的函数称为泛函。象上一节所介绍的性能指标J取决于向量函数$x(t)$及$U(t)$的选取而定，故称为指标泛函，记作

$$J(u(t)) \quad 或 \quad J(u(t), x(t))$$

当函数$u(t)$及$x(t)$之间又必须满足一定的关系（例如前述状态方程），$u(t)$的选取又影响到$x(t)$的选取，往往又将泛函只记作

$$J(u(t))$$

函数 u(t)称为泛函 J(u(t))的宗量。宗量 u(t)的变分 δu 是指两个函数间的差，即

$$\delta u \triangleq u(t)-u'(t) \qquad (4-27)$$

式中符号“$\triangleq$”代表“定义为”的意思。

当宗量的变分取无穷小时，泛函的变化也趋于无穷小，则称泛函对于宗量是连续的。当然这是很不严格的说法。

泛函的变分与函数的微分的定义类似。若连续泛函 J(u)的增量按泰勒公式，可以表示为

$$\Delta J(u)=J(u+\delta u)-J(u)$$

$$=L(u,\delta u)+0(\delta u) \qquad (4-28)$$

上式等号右侧第一项 $L(u,\delta u)$ 是关于 δu 的线性连续泛函，第二项是关于 δu 的高阶无穷小（$0(\delta u)$中当然也包含有 u，但此时 u 是做为给定的函数）。将式（4-28）右侧第一项称为泛函的变分，并记为

$$\delta J=L(u,\delta u)$$

$$=\frac{\partial J}{\partial u}\delta u \qquad (4-29)$$

亦即，泛函的变分就是泛函增量的线性的主部。有时也将线性主部称为一次变分。

和函数求极值类似，泛函 J(u)在 $u^0(t)$ 上达到极值的必要条件是泛函的一次变分等于零，即

$$\delta J=\left.\frac{\partial J(u)}{\partial u}\right|_{u=u^0}\delta u=0 \qquad (4-30)$$

由于 δu 是任意的，所以上述必要条件又可写成

$$\left.\frac{\partial J(u)}{\partial u}\right|_{u=u_0}=0 \qquad (4-31)$$

现在就根据上述原理，求无其他附加条件时泛函的极值条件。

现在我们研究下述泛函

$$J(u)=\int_{t_0}^{t_f} f_0(t,u,\dot{u})dt \qquad (4-32)$$

式中 $\dot{u}(t)=\frac{d}{dt}u(t)$，设在区间 $t_0\leq t\leq t_f$，$f_0(t,u,\dot{u})$ 是关于 t，$u(t)$，$\dot{u}(t)$ 的连续函数，且对 t，$u(t)$，$\dot{u}(t)$ 有连续的偏导数。现在需要确定函数 $u^0(t)$，使泛函 $J(u)$ 取极小值。我们分析一种比较简单的情况，就是端点固定的情况。这时 $u(t_0)$ 和 $u(t_f)$ 固定。于是端点的边界条件就给定为

$$u(t_0)=u_0, \quad u(t_f)=u_f \qquad (4-33)$$

这就意味着，在端点 $u(t)$ 的变分必须满足

$$\delta u(t_0)=0, \quad \delta u(t_f)=0 \qquad (4-34)$$

的条件。

假定已经找到了 $u^0(t)$，现给 $u^0(t)$ 一个变分 δu，则泛函式 (4-32) 的变分

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial f_0}{\partial u}\delta u+\frac{\partial f_0}{\partial \dot{u}}\delta\dot{u}\right]dt \qquad (4-35)$$

由于 $$\delta\dot{u}=\frac{d}{dt}\delta u$$

所以由分部积分法得

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial u}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{u}}\right)\delta u\right]dt+\frac{\partial f_0}{\partial \dot{u}}\delta u\Big|_{t_0}^{t_f} \qquad (4-36)$$

根据式(4—34)的条件知，上式等号右侧中的第二项等于零，所以

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial f_0}{\partial u}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0}{\partial \dot{u}}\right)\delta u\right]dt \qquad (4-37)$$

泛函J（u(t)）取极小值的必要条件是其一次变分等于零，即有

$$\delta J\ (u^0(t))\equiv 0 \qquad (4-38)$$

由于δu是任意变分，所以式(4—38)的条件又可以成为$u^0(t)$必须满足微分方程

$$\frac{\partial f_0}{\partial u}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \dot{u}}\right)=0 \qquad (4-39)$$

式(4—39)就是Euler 方程。

为了求出使泛函式(4—32)取极值的函数，就须求解欧拉方程。欧拉方程是二阶微分方程，它的通解包含两个任意常数。在端点固定的情况下，这两个积分常数正好可以利用两个边界条件式(4—34)去决定。一般地说，二阶微分方程在很多情况下，还不能很容易地求得解析解。但在几种特定的情况下，Euler 方程是能够积分求解的。

〔例4—4〕 求泛函

$$J(x(t))=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-x^2)dt$$

在边界条件 $x(0)=0$， $x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

下的极值函数。

解：写出欧拉方程

$$\ddot{x}(t)+x=0$$

这个方程是熟悉的，其通解为

$$x(t)=C_1\cos t+C_2\sin t$$

利用边界条件得 $C_1=0$，$C_2=1$，所以泛函的极值函数是

$$x(t)=\sin t$$

现在分析含多个未知函数的泛函的极值问题，这时泛函的形式是

$$J(u_1\ u_2\ \cdots\cdots,\ u_n)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_f} f_0(t,\ u_1,\ u_2,\ \cdots\cdots,\ u_n,\ \dot{u}_1,\ \dot{u}_2,\ \cdots\cdots,\ \dot{u}_n)dt \tag{4-40}$$

其中 $u_1=u_1(t)$，$u_2=u_2(t)$，……，$u_n=u_n(t)$ 都是 t 的函数。

为了说明问题，首先从只含有两个未知函数的泛函开始，即泛函取取如下的形式

$$J(u_1,\ u_2)=\int_{t_0}^{t_f} f_0(t,\ u_1,\ u_2,\ \dot{u}_1,\ \dot{u}_2)dt \tag{4-41}$$

已知边界条件

$$u_1(t_0)=u_{10},\ u_2(t_0)=u_{20},\ u_1(t_f)=u_{1f},\ u_2(t_f)=u_{2f} \tag{4-42}$$