高考导航系列丛书
丛书主编/徐希龙

2013冲A精典
Red A Classic

普通高中学业水平测试
考点必备手册

数学

目　录

必修 1

第一章　集合与函数概念

1.1　集合

一、元素与集合

1. 定义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合（简称集）. 只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

2. 元素与集合的关系

我们一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，就说 a 不属于集合 A，记作 $a\notin A$. 例如，$3\in\{1,2,3\}$，$4\notin\{1,2,3\}$.

3. 集合中元素的特征

（1）确定性：给定一个集合，它的元素必须是确定的. 这就是说，对于给定的一个集合，任何一个元素在不在这个集合中是确定的，不确定的元素不能构成集合. 如“高一（1）班的高个子同学”就不能构成一个集合，因为组成它的元素是不确定的.

（2）互异性：对于给定的一个集合，它的元素一定是互不相同的（或说是互异的）. 也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

（3）无序性：组成集合的元素没有次序，如 $\{1,2,3\}=\{3,2,1\}=\{2,3,1\}$.

4. 集合的表示方法

（1）列举法：把集合中的元素一一列举出来，并用花括号括起来表示集合的方法叫做列举法. 如 $\{1,3,5\}$.

（2）描述法：用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法. 其具体方法是：在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值（或变化）范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

如 $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2x-3=0\}=\{-1,3\}$.

（3）图示法：把集合中的元素写在一条封闭的曲线（如圆、椭圆、矩形等）内.

二、集合间的基本关系

1. 子集：一般地，对于两个集合 A，B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说这两个集合有包含关系，称集合 A 为集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$），读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）.

2. 真子集：如果集合 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，我们称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（或 $B\supsetneqq A$）.

3. 空集：不含任何元素的集合叫做空集，记为 $\varnothing$.

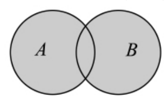
规定：空集是任何集合的子集.

4. 集合相等：如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则集合 A 与集合 B 中的元素是一样的，称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$.

三、集合的基本运算

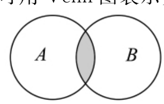
1. 并集和交集

（1）并集：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的并集，记作 $A\cup B$（读作“A 并 B”），即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$. 可用 Venn 图表示如下：



$A\cup B$

（2）交集：由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为集合 A 与集合 B 的交集，记作 $A\cap B$（读作“A 交 B”），即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$. 可用 Venn 图表示如下：

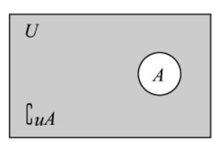


$A\cap B$

2. 全集与补集

（1）全集：如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素，那么就称这个集合为全集，通常记作 U.

（2）补集：对于一个集合 A，由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集，简称为集合 A 的补集，记作 $\complement_U A$，即 $\complement_U A=\{x\mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$. 可用 Venn 图表示如下：



1.2　函数及其表示

一、函数的概念

1. 定义

一般地，我们设 A，B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任

意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f:A\rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作

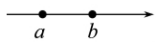
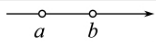
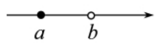
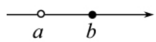
$y=f(x)$，$x\in A$.

其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域，与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 叫做函数的值域.

2. 函数的三要素

函数的三要素就是指定义域、对应关系和值域. 在多数情况下，一旦定义域和对应关系确定，函数的值域也随之确定，因而定义域与对应关系是两大基本要素.

3. 区间

定义	名称	符号	数轴表示
$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	闭区间	$[a,b]$	
$\{x\mid a<x<b\}$	开区间	(a,b)	
$\{x\mid a\leqslant x<b\}$	半开半闭区间	$[a,b)$	
$\{x\mid a<x\leqslant b\}$	半开半闭区间	$(a,b]$	

4. 无穷大

无穷大是个符号，不是一个数，表示为"∞".

实数集 **R** 可以用区间表示为 $(-\infty,+\infty)$. 我们可以把满足 $x\geqslant a$，$x>a$，$x\leqslant b$，$x<b$ 的实数 x 的集合分别表示为 $[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,b]$，$(-\infty,b)$.

二、函数的表示方法

1. 函数的三种表示方法

解析法	定义	就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系.
	优点	简明、全面地概括了变量的关系，并可以通过解析式求出任意一个自变量所对应的函数值.
	缺点	不够形象、直观、具体，而且并不是所有的函数都能用解析式表示出来
图象法	定义	就是用图象表示两个变量之间的关系
	优点	形象、直观地表示随自变量的变化，相应的函数值变化的趋势，有利于研究函数的某些性质.
	缺点	只能近似地求出自变量的值所对应的函数值，而且有时误差较大.
列表法	定义	就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系.
	优点	不需要计算就可以直接看出与自变量的值相对应的函数值.
	缺点	只能表示自变量取较少的有限值的对应关系.

2. 分段函数

在函数 $y=f(x)$ 的定义域中，对于自变量 x 的不同取值范围，有着不同的对应关系，这样的函数通常称为分段函数，如函数 $y=f(x)=\begin{cases}2x,x\geqslant 0,\\1,x<0\end{cases}$ 就是分段函数.

三、映射

1. 定义

一般地，我们设 A，B 是两个非空集合，如果按某一个确定的对应关系 f，使对于集合 A 中任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f:A\rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射.

2. 原象与象

对于映射 $f:A\rightarrow B$，我们通常把集合 A 中的元素叫原象，把集合 B 中与集合 A 中的元素相对应的元素叫做象，所以集合 A 叫原象集，集合 B 叫象所在的集合.

1.3　函数的基本性质

一、单调性与最大(小)值

1. 单调性

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I：

如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数，如图 1 所示.

如果对于定义域 I 内某个区域 D 上的任意两个自变量的值 x_1，x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数，如图 2 所示.

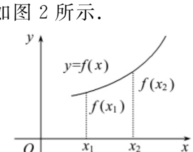


图 1

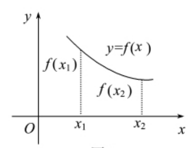


图 2

2. 判断函数单调性的方法

(1)利用定义判断函数的单调性；

(2)利用函数图象判断函数单调性.

3. 最大(小)值

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：

(1)对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M$；

(2)存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$.

那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值 .

同样，一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：

(1)对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\geqslant M$；

(2)存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$.

那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最小值.

最大值和最小值统称为最值.

二、函数的奇偶数

1. 定义

偶函数：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数.

奇函数：如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数.

不是所有的函数都是奇函数或偶函数，我们称那些既不是奇函数又不是偶函数的函数为非奇非偶函数.

2. 判断函数奇偶性的方法

(1)利用定义判断.

(2)利用等价命题判断：

$f(x)+f(-x)=0\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数；

$f(x)-f(-x)=0\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(3)利用图象判断：

图象关于原点对称 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数；

图象关于 y 轴对称 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

三、函数的周期性

1. 定义

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 $T\neq 0$，使得当 x 取定义域内每一个值时，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，那么函数 $y=f(x)$ 叫周期函数，T 叫做 $f(x)$ 的周期.

2. 最小正周期

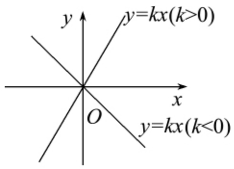
周期函数的周期可以不止一个，如果在所有周期中存在着一个最小正数，则称这个最小正数为最小正周期.

第二章　基本初等函数(Ⅰ)

2.1　一次函数与二次函数

一、正比例函数

$y=kx(k\neq 0)$，定义域为 **R** 性质与特点：



1. $k>0$ 时

(1)直线在第一、三象限内；

(2)增函数；

(3)奇函数.

2. $k<0$ 时

(1)直线在第二、四象限内；

(2)减函数；

(3)奇函数.

二、一次函数

$y=kx+b(k\neq 0)$，定义域为 **R**.

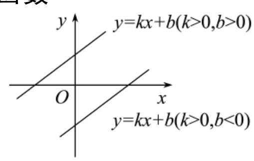
性质与特点：

1. $k>0$ 时

(1)$b>0$，图象经过第一、二、三象限；$b<0$，图象经过第一、三、四象限；

(2)增函数；

(3)$b\neq 0$ 时为非奇非偶函数，$b=0$ 时为奇函数.

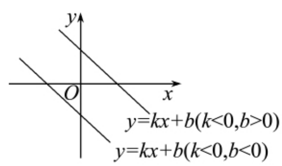


2. $k<0$ 时

(1)$b>0$，图象经过第一、二、四象限；$b<0$，图象经过第二、三、四象限；

(2)减函数；

(3)$b\neq 0$ 时为非奇非偶函数，$b=0$ 时为奇函数.



三、反比例函数

$y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$，定义域为 $\{x|x\neq 0\}$.

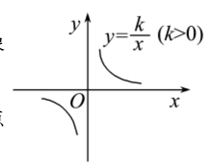
性质与特点：

1. $k>0$ 时

(1)图象在第一、三象限内；

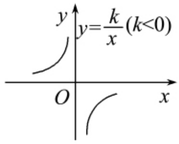
(2)奇函数；

(3)k 越大，离原点越远；



(4)在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是减函数.

2. $k<0$ 时



(1)图象在第二、四象限内；

(2)奇函数；

(3)$|k|$越大，离原点越远；

(4)在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上是增函数.

四、二次函数

1. 函数式：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$.

2. 定义域：$\mathbf{R}$.

3. 值域

(1)$a>0$ 时，值域$\{y|y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\}$；

(2)$a<0$ 时，值域$\{y|y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\}$；

4. 性质

(1)单调性：$a>0$ 时，在$(-\infty,-\frac{b}{2a}]$上是减函数，在$[-\frac{b}{2a},+\infty)$上是增函数；$a<0$ 时则相反.

(2)奇偶性：$b=0$ 时为偶函数，$b\neq0$ 时为非奇非偶函数.

(3)最值：$x=-\frac{b}{2a}$时，$y_{最值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$($a>0$ 时有最小值，$a<0$ 时有最大值).

(4)函数值的符号：

①情况 1：$\begin{cases}a>0\\ \Delta=b^2-4ac\leqslant0\end{cases}\Rightarrow f(x)\geqslant0$；

②情况 2：$\begin{cases}a>0\\ f(x)\geqslant0\end{cases}\Rightarrow\Delta\leqslant0$；

③情况 3：若 $a>0$，且存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)\leqslant0$，则必有 $\Delta\geqslant0$.

请仿照上述 $a>0$ 的情形，自己讨论 $a<0$ 的情形.

2.2 指数函数

一、指数函数的相关概念

1. n 次方根：如果 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根，其中 $n>1$，且 $n\in\mathbf{N}^*$.

2. 根式

式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式，这里 n 叫做根指数，a 叫做被开方数.

$(\sqrt[n]{a})^n=a(n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；

$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}a,(n\text{ 为大于 1 的奇数}),\\ |a|,(n\text{ 为大于 0 的偶数}).\end{cases}$

3. 分数指数幂

我们规定正分数指数幂的意义是 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$($a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1$)；负分数指数幂的意义是 $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$($a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1$)；0 的正分数指数幂等于 0，0 的负分数指数幂没有意义.

二、有理数指数幂的运算性质

$a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$；

$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

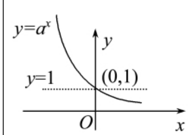
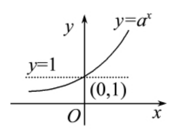
三、无理数指数幂

一般地，无理数指数幂 a^α($a>0$，α 是无理数)是一个确定的实数，如 $2^{\sqrt{3}}$，$5^{-\sqrt{2}}$都是无理数指数幂. 有理数指数幂的运算性质同样适用于无理数指数幂.

四、指数函数的定义

一般地，函数 $y=a^x$($a>0$，且 $a\neq1$)叫做指数函数，其中 x 是自变量，函数的定义域是 $\mathbf{R}$.

五、指数函数的图象与性质

	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	$\mathbf{R}$	
值域	$(0,+\infty)$	
性质	(1)过定点$(0,1)$，即 $x=0$ 时，$y=1$	
	(2)在 $\mathbf{R}$ 上是减函数	(2)在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

2.3 对数函数

一、对数函数的相关概念

1. 对数：一般地，如果 $a^x=N$($a>0$，且 $a\neq1$)，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_aN$. 其中 a 叫做对数的底数，N 叫做真数. 负数和零没有对数.

对数与指数的关系：$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_aN$($a>0$，$a\neq1$).

2. 常用对数：通常我们将以 10 为底的对数叫做常用对数，并把 $\log_{10}N$ 记作 $\lg N$.

3. 自然对数：在科学技术中常使用以无理数 $\mathrm{e}=2.718\ 28\cdots$为底数的对数，以 e 为底的对数称为自然对数，并把 $\log_{\mathrm{e}}N$ 记为 $\ln N$.

二、对数运算

1. 对数恒等式

$a^{\log_aN}=N(a>0$，且 $a\neq1,N>0)$；

$\log_a1=0(a>0$，且 $a\neq1)$；

$\log_aa=1(a>0$，且 $a\neq1)$；

2. 对数的运算法则

如果 $a>0$ 且 $a\neq1,M>0,N>0$，那么：

$\log_a(M\cdot N)=\log_aM+\log_aN$；

$\log_a\frac{M}{N}=\log_aM-\log_aN$；

$\log_aM^n=n\log_aM(n\in\mathbf{R})$；

$\log_a \sqrt[n]{M}=\frac{1}{n}\log_a M$.

三、换底公式

1. 公式

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$($a>0$,且 $a\neq1$,$c>0$,且 $c\neq1$,$b>0$).

2. 对数换底公式的几个推论

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$($a>0$,$b>0$,且 $a\neq1$,$b\neq1$);

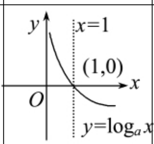
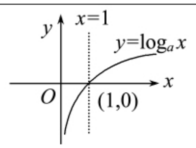
$\log_{a^m} b^m=\log_a b$($a>0$,$b>0$,$m\neq0$,且 $a\neq1$,$b\neq1$);

$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$($a>0$,$b>0$,$m\neq0$,且 $a\neq1$,$b\neq1$);

四、对数函数的定义

一般地,我们把函数 $y=\log_a x$($a>0$,且 $a\neq1$)叫做对数函数,其中 x 是自变量,函数的定义域是$(0,+\infty)$.

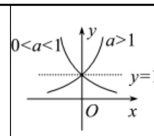
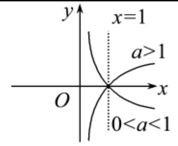
五、对数函数的图象与性质

	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	**R**	
性质	(1)过定点$(1,0)$,即 $x=1$ 时,$y=0$	
	(2)在$(0,+\infty)$上是减函数	(2)在$(0,+\infty)$上是增函数

六、反函数

若函数 $y=f(x)$的定义域为 A,值域为 B,对于 B 中每一个元素 y_0,在 A 中都有唯一确定的元素 x_0 与之对应,则函数 $y=f(x)$存在反函数,记为 $y=f^{-1}(x)$,否则,就不存在反函数.

七、指数函数与对数函数的联系与区别

解析式	$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)	$y=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)
定义域	**R**	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	**R**
图象		
	关于直线 $y=x$ 对称	
奇偶性	非奇非偶	非奇非偶
单调性	$0<a<1$ 时,在$(-\infty,+\infty)$上是减函数;$a>1$ 时,在$(-\infty,+\infty)$上是增函数	$0<a<1$ 时,在$(0,+\infty)$上是减函数;$a>1$ 时,在$(0,+\infty)$上是增函数
性质	①$y>0$;②图象过$(0,1)$点	①$x>0$;②图象过$(1,0)$点
关系	**指数函数** $\xleftrightarrow{\text{互为反函数}}$ **对数函数**	

八、对数的大小比较

对数比较大小时,通常将它们化作同底的形式,利用对数函数的单调性进行判断.也可以通过与中间值如(如 0,1)的比较来确定大小.

2.4 幂函数

一、定义

一般地,函数 $y=x^\alpha$ 叫做幂函数,其中 x 是自变量,α 是常数.

二、幂函数的性质

1. 单调性

当 $\alpha>0$ 时,函数 $y=x^\alpha$ 过点$(0,0)$,$(1,1)$,在第一象限内是增函数.

当 $\alpha<0$ 时,函数 $y=x^\alpha$ 过点$(1,1)$,在第一象限内是减函数.

2. 奇偶性

(1)当 α 为整数时,若 α 为偶数,则 $y=x^\alpha$ 是偶函数;若 α 为奇数,则 $y=x^\alpha$ 是奇函数.

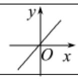
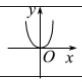
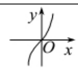
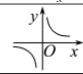
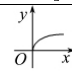
(2)当 α 为分数,即 $\alpha=\frac{p}{q}$(p,q 互质,$p,q\in$ **Z**)时:

当分母 q 为奇数时,

若分子 p 为奇数,则 $y=x^\alpha$ 为奇函数;若分子 p 为偶数,则 $y=x^\alpha$ 为偶函数.

当分母 q 为偶数,则 $y=x^\alpha$ 为非奇非偶函数.

三、几种常见幂函数的图象和性质

幂函数	解析式	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=\frac{1}{x}$	$y=x^{\frac{1}{2}}$
	图象					
	值域	**R**	**R**	**R**	$\{x\mid x\neq 0\}$	$[0,+\infty)$
	值域	**R**	$[0,+\infty)$	**R**	$\{y\mid y\neq 0\}$	$[0,+\infty)$
	奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数	非奇非偶函数
	单调性	增函数	在$(-\infty,0)\downarrow$ 在$[0,+\infty)\uparrow$	增函数	在$(-\infty,0)\downarrow$ 在$(0,+\infty)\downarrow$	增函数
	定义	$(1,1)$				
	图象特点	在第一象限内，从左向右看，α越小，其图象越靠近x轴				

第三章　函数的应用

3.1　函数与方程

一、方程的根与函数的零点

1. 定义：对于函数$y=f(x)$，我们把使$f(x)=0$的实数x叫做函数$y=f(x)$的零点.

2. 方程$f(x)=0$有实数根

$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$的图象与x轴有交点

$\Leftrightarrow$函数$y=f(x)$有零点.

3. 函数零点的判断方法

如果函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象是连续不断的一条曲线，并且有$f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数$y=f(x)$在区间(a,b)内有零点，即存在$c\in(a,b)$，使得$f(c)=0$，这个c也就是方程$f(x)=0$的根.

二、用二分法求方程的近似解

1. 二分法

对于在区间$[a,b]$上连续不断且$f(a)\cdot f(b)<0$的函数$y=f(x)$，通过不断地把函数$f(x)$的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点近似值的方法叫做二分法.

2. 给定精确度ε，用二分法求函数$f(x)$零点近似值：

(1)确定区间$[a,b]$，验证$f(a)\cdot f(b)<0$，给定精确度ε.

(2)求区间(a,b)的中点c.

(3)计算$f(c)$. 若$f(c)=0$，则c就是函数的零点；

若$f(a)\cdot f(c)<0$，则令$b=c$(此时零点$x_0\in(a,c)$)；

若$f(c)\cdot f(b)<0$，则令$a=c$(此时零点$x_0\in(c,b)$).

(4)判断是否达到精确度ε，即若$|a-b|<\varepsilon$，则得到零点近似值a或b；否则重复(2)～(4).

3.2　函数模型及其应用

一、几类不同增长的函数模型

1. 直线型增长

我们学过的正比例函数$y=kx(k>0)$，一次函数$y=kx+b(k>0,b$为常数$)$，常数函数$y=c(c\in\mathbf{R},c$为常数$)$都是直线型函数，它们在每个区间上的变化率都一样. 直线型增长的斜率不同，增速也不同.

2. 指数函数型增长(指数爆炸)

形如$y=a^x(a>0)$的函数称为指数型函数.

3. 幂函数型增长

形如$y=x^n(n>0)$的函数称为幂函数型函数.

4. 对数函数型增长

形如$y=\log_a x(a>1,x>0)$的函数称为对数型函数，这种增长型增长趋势是先快后慢，最后几乎变化不大了.

二、函数模型应用举例

1. 解应用题的步骤

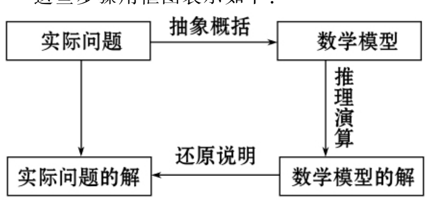
(1)阅读理解，认真审题.

(2)引进数学符号，建立数学模型.

(3)利用函数的知识对得到的数学模型予以解答.

(4)将数学问题的解代入实际问题进行核查，舍去不合题意的解，并作答.

这些步骤用框图表示如下：



2. 应用题解题策略

解应用题的关键是建立数学模型，主要有建立函数模型、方程或不等式模型及数列模型，此外还有排列组合模型、几何模型、图表模型等.

必修 2

第一章　空间几何体

1.1　空间几何体的结构

一、多面体

1. 基本概念

由若干个平面多边形围成的几何体叫做多面体,围成多面体的各个多边形叫做多面体的面;相邻两个面的公共边叫做多面体的棱;棱与棱的公共顶点叫做多面体的顶点;连接不在同一面上的两个顶点的线段叫多面体的对角线.

2. 凸多面体

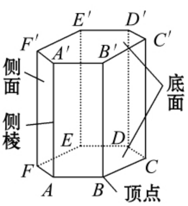
把一个多面体的任意一个面延展为平面,其余的各个面若都在这个平面的同一侧,则这样的多面体叫凸多面体.没有特别说明,指的都是凸多面体.

3. 多面体的分类:按照围成多面体的面的个数分为四面体、五面体、六面体、……特殊的四面体就是三棱锥.

二、棱柱的结构特征

1. 基本概念

一般地,有两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行,由这些面所围成的多面体叫做棱柱(如右图).



在棱柱中,两个互相平行的面叫做棱柱的底面,简称底;其余各面叫做棱柱的侧面;相邻侧面的公共边叫做棱柱的侧棱;侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点.

2. 棱柱的分类与表示法

底面是三角形、四边形、五边形……的棱柱分别叫做三棱柱、四棱柱、五棱柱……我们用表示底面各顶点的字母表示棱柱,如上图中的六棱柱表示为棱柱 $ABCDEF-A'B'C'D'E'F'$.

3. 棱柱的特点

(1)两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形,且对应边互相平行;

(2)侧棱都相等,侧面都是平行四边形.

4. 棱柱的一些相关概念

棱柱两底面之间的距离,叫做棱柱的高.

侧棱与底面不垂直的棱柱叫斜棱往.

侧棱与底面垂直的棱柱叫直棱柱.

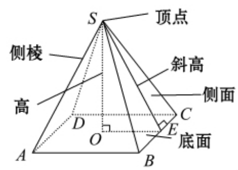
底面是正多边形的直棱柱叫正棱柱.

三、棱锥的结构特征

1. 基本概念

一般地,有一个面是多边形,其余各面都是有一个公共顶点的三角形,由这些面所围成的多面体叫做棱锥.

这个多边形面叫做棱锥的底面或底;有公共顶点的各个三角形面叫做棱锥的侧面;各侧面的公共顶点叫做棱锥的顶点;相邻侧面的公共边叫做棱锥的侧棱(如下图).



如果棱锥的底面是正多边形,它的顶点又在过底面中心的垂线上,则这个棱锥叫做正棱锥.

正棱锥各侧面都是全等的等腰三角形,这些等腰三角形底边上的高都相等,叫做棱锥的斜高.

2. 棱锥的分类与表示法

底面是三角形、四边形、五边形……的棱锥分别叫做三棱锥、四棱锥、五棱锥……其中三棱锥又叫四面体.

棱锥也用表示顶点和底面各顶点的字母表示,如上图中的四棱锥表示为棱锥 $S-ABCD$.

3. 棱锥的特点

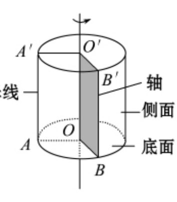
底面是多边形,侧面是有一个公共顶点的三角形.

四、圆柱的结构特征

1. 基本概念

以矩形的一边所在直线为旋转轴,其余三边旋转形成的面围成的旋转体叫做圆柱.

旋转轴叫做圆柱的轴;垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做圆柱的底面;平行于轴的边旋转而成的曲面叫做圆柱的侧面;无论旋转到什么位置,不垂直于轴的边都叫做圆柱侧面的母线(如图).



2. 圆柱的表示法

圆柱用表示它的轴的字母表示，如上图中的圆柱表示为圆柱 $O'O$.

圆柱和棱柱统称为柱体.

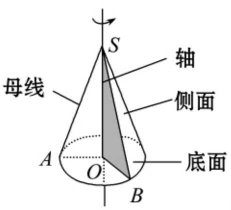
五、圆锥的结构特征

1. 基本概念

与圆柱一样，圆锥也可以看作是由平面图形旋转而成的.

以直角三角形的一条直角边所在直线为旋转轴，其余两边旋转形成的面所围成的旋转体叫做圆锥.

和圆柱一样，圆锥也有轴、底面、侧面和母线(如图).



2. 圆锥的表示法

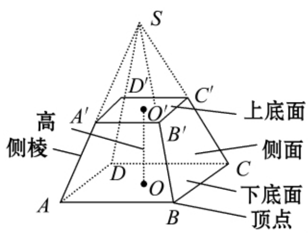
圆锥也用表示它的轴的字母表示，如上图中的圆锥表示为圆锥 SO.

圆锥与棱锥统称为锥体.

六、棱台的结构特征

1. 基本概念

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面与截面之间的部分(如下图)，叫做棱台.



原棱锥的底面和截面分别叫做棱台的下底面和上底面，其他各面叫做棱台的侧面；相邻各侧面的公共边叫做棱台的侧棱；两底面间的距离叫做棱台的高.

由正棱锥截得的棱台叫做正棱台，正棱台各侧面都是全等的等腰梯形，这些等腰梯形的高叫做棱台的斜高.

2. 棱台的分类与表示法

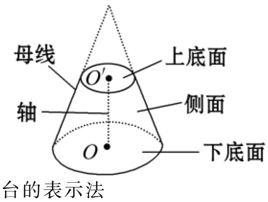
由三棱锥、四棱锥、五棱锥……截得的棱台分别叫做三棱台、四棱台、五棱台……与棱柱的表示一样，上图中的四棱台表示为棱台 $ABCD-A'B'C'D'$.

七、圆台的结构特征

1. 基本概念

用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分(如下图)叫做圆台.

与圆柱和圆锥一样，圆台也有轴、底面、侧面、母线.



2. 圆台的表示法

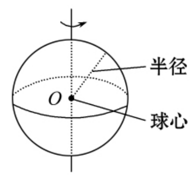
与圆柱的表示方法一样，上图中的圆台表示为圆台 OO'. 棱台和圆台统称为台体.

八、球的结构特征

1. 球的概念

以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫做球体，简称球.

半圆的圆心叫做球的球心，半圆的半径叫做球的半径，半圆的直径叫做球的直径(如下图).



球常用表示球心的字母 O 表示，如图中的球表示为球 O.

2. 球截面的性质

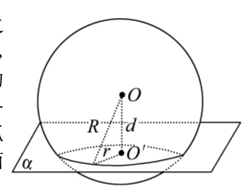
性质 1：球心和截面圆心的连线垂直于截面.

性质 2：球心到截面的距离 d 与球的半径 R 及截面的半径 r，有下面的关系：

$r=\sqrt{R^2-d^2}$(如图).

3. 球面距离

在球面上，两点之间的最短连线的长度，就是经过这两点间的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，这个弧长叫做两点的球面距离.



九、简单组合体的结构特征

1. 定义

由柱体、锥体、台体、球体等简单几何体组合而成的几何体叫做简单组合体.

2. 构成形式

(1)由简单几何体拼接而成；

(2)由简单几何体截去或挖出一部分而成.

1.2　空间几何体的三视图和直观图

一、平行投影、中心投影、正投影

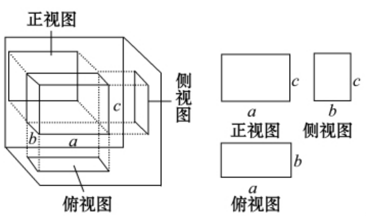
平行投影	定义	投影线相互平行的投影称为平行投影.
	特性	①点的投影仍为点； ②直线的投影一般仍为直线； ③一点在某直线上，则点的投影一定在该直线的投影上.
中心投影	定义	投影线均通过投影中心的投影称为中心投影.
	特性	其投影的大小随物体与投影中心间距离的变化而变化，所以其投影不能反映物体的实形.
正投影	定义	在物体的平行投影中，如果投影线垂直于投影面，则称这样的平行投影为正投影.
	特性	①垂直于投影面的直线或线段的正投影是点； ②垂直于投影面的平面图形的正投影是直线或直线的一部分.

二、空间几何体的三视图

1. 基本概念

三视图是观察者从不同位置观察同一个几何体，画出的空间几何体图形. 它包括正视图、侧视图、俯视图 3 种.

下图是一个长方体的三视图.



2. 画几何体三视图的要求

(1)三视图的正视图、侧视图、俯视图分别是从几何体的正前方、正左方、正上方观察到几何体的正投影图，它们都是平面图形.

(2)画几何体的三视图的要求

①正视图与俯视图长对正；正视图与侧视图高平齐；侧视图与俯视图宽相等.

②一般地，侧视图在正视图的右边，俯视图在正视图的下边.

3. 常见几何体的三视图

(1)圆柱的正视图和侧视图都是矩形，俯视图为圆.

(2)圆锥的正视图和侧视图都是三角形，俯视图是圆和圆心.

(3)圆台的正视图和侧视图都是等腰梯形，俯视图是两个同心圆.

(4)球的三视图都是圆.

4. 作简单组合体的三视图

作组合体的三视图，首先要分析以下几个问题：

(1)确定正视、俯视、侧视的方向；

(2)组合体是由哪几个简单几何体组成的；

(3)观察几个简单几何体之间的位置关系，尤其是交线的位置.

其次采用形体分析法，根据形状将其分解成若干个简单几何体，弄清楚各部分的形状、相对的位置及组合形式，最后分别画出各部分的三视图.

三、空间几何体的直观图

要画空间几何体的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的画法.

画直观图的方法称为斜二测画法，它的步骤是：

(1)在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于点 O. 画直观图时，把它们画成对应的 x'轴和 y'轴，两轴交于点 O'，且使$\angle x'O'y'=45^\circ$(或 135°)，它们确定的平面表示水平面.

(2)已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴或 y'轴的线段.

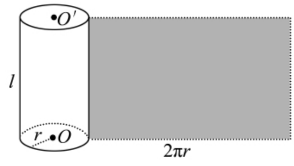
(3)已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

1.3　空间几何体的表面积与体积

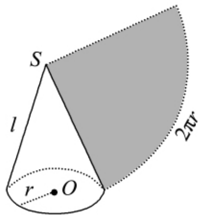
一、柱体、锥体、台体的表面积

对于棱柱、棱锥、棱台等多面体，它们的表面积是其各个面的面积之和. 因此，可以把它们展开成平面图形，利用平面图形求面积的方法求立体图形的表面积.

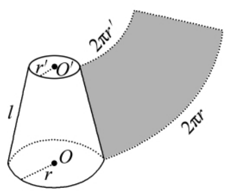
1. 圆柱的侧面展开图是一个矩形(如下图)，若圆柱的底面半径为 r，母线长为 l，那么圆柱的底面面积为 πr^2，侧面面积为 $2\pi rl$. 因此，圆柱的表面积 $S=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l)$.



2. 圆锥的侧面展开图是一个扇形(如下图),若圆锥的底面半径为 r,母线长为 l,那么它的表面积 $S=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l)$.



3. 圆台的侧面展开图是一个扇环(如下图),若圆台的上、下底面半径分别为 r',r,母线长为 l,则它的侧面积为 $\pi r'l+\pi rl$,于是圆台的表面积等于上、下两底面的面积和加上侧面的面积,即 $S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$.



二、柱体、锥体、台体的体积

1. 柱体(棱柱和圆柱)的体积

$V_{柱体}=Sh$(S 为底面积,h 为柱体的高).

2. 锥体(棱锥和圆锥)的体积

$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$(S 为底面积,h 为锥体的高).

3. 台体(棱台和圆台)的体积

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$

(其中 S',S 分别为上、下底面面积,h 为台体的高).

三、球的体积和表面积

1. 球的体积

设球的半径为 R,那么它的体积 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

2. 球的表面积

设球的半径为 R,那么它的表面积 $S_{球}=4\pi R^2$.

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系

一、平面

1. 平面及有关概念

几何里的平面是无限延展的.

我们常常把水平的平面画成一个平行四边形,用平行四边形表示平面.如下图 1,平行四边形的锐角通常画成 45°,且横边长等于其邻边长的 2 倍.如果一个平面被另一个平面遮挡住,为了增强它的立体感,我们常把被遮挡部分用虚线画出来,如下图 2 所示.

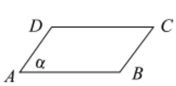


图 1

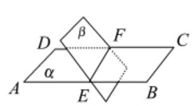


图 2

为了表示平面,常把希腊字母 α,β,γ 等写在代表平面的平行四边形的一个角上(如上图 1,2),表示为平面 α、平面 β;也可以用代表平面的平行四边形的四个顶点,或者相对的两个顶点的大写英文字母作为这个平面的名称,如上图 1 中的平面 α 也可表示为:平面 $ABCD$、平面 AC 或者平面 BD.

平面内有无数个点,平面可以看成点的集合.如下图 3,点 A 在平面 α 内,记作 $A\in\alpha$;点 B 在平面 α 外,记作 $B\notin\alpha$.

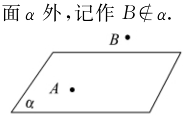


图 3

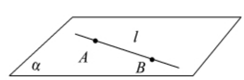


图 4

2. 平面的基本性质

(1)公理 1:如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线在此平面内(如上图 4).

此公理可用来判断直线是否在平面内.

直线、平面都可以看成点的集合.点 P 在直线 l 上,记作 $P\in l$;点 P 在直线 l 外,记作 $P\notin l$.如果直线 l 上的所有点都在平面 α 内,就说直线 l 在平面 α 内,或者说平面 α 经过直线 l,记作 $l\subset\alpha$;否则,就说直线 l 在平面 α 外,记作 $l\not\subset\alpha$.

公理1也可以用符号表示为：

$A\in l,B\in l$，且 $A\in\alpha,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$.

(2)公理2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面.

此公理给出了确定一个平面的依据.

不在一条直线上的三个点 A,B,C 所确定的平面，可以记成“平面 ABC”(如下图5).

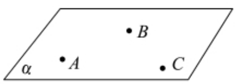


图5

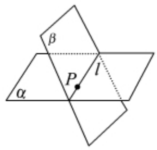


图6

推论1：经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面.

推论2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论3：经过两条平行直线，有且只有一个平面.

(3)公理3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

公理3告诉我们，如果两个不重合的平面有一个公共点，那么这两个平面一定相交，且其交线一定过这个公共点，也就是说，如果两个平面有一个公共点，那么它们必定还有另外一个公共点，只要找出这两个平面的两个公共点，就找出了它们的交线.

平面 α 与 β 相交于直线 l，记作 $\alpha\cap\beta=l$(如上图6).

公理3也可以用符号表示为：

$P\in\alpha$ 且 $P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$.

二、空间中直线与直线之间的位置关系

1. 定义及公理、定理

不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线.

空间两条直线的位置关系有且只有三种情况：

- 共面直线
  - 相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点
  - 平行直线：同一平面内，没有公共点
- 异面直线：不同在任何一个平面内，没有公共点

为了表示异面直线 a,b 不共面的特点，作图时，通常用一个或两个平面衬托，如下图7.

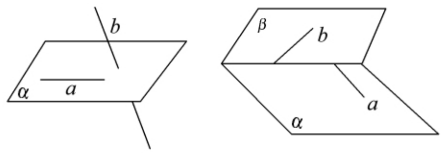


图7

公理4：平行于同一条直线的两条直线互相平行.

这个公理表明，空间中平行于一条已知直线的所有直线都互相平行，它给出了判断空间两条直线平行的依据.

公理4表述的性质通常叫做空间平行线的传递性.

等角定理：空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补.

2. 异面直线所成的角

如下图8，已知两条异面直线 a,b，经过空间任一点 O 作直线 $a'\parallel a,b'\parallel b$，把 a' 与 b' 所成的锐角(或直角)叫做异面直线 a 与 b 所成的角(或夹角).

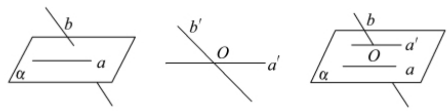


图8

为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上，例如取在直线 b 上，然后过点 O 作直线 $a'\parallel a$，a' 和 b 所成的锐角(或直角)就是异面直线 a 与 b 所成的角.

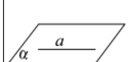
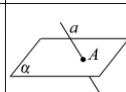
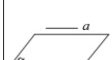
判定空间两条直线是异面直线的方法：

(1)判定定理：平面外一点 A 与平面内一点 B 的连线和平面内不过点 B 的直线是异面直线；

(2)反证法：证明两直线共面不可能.

三、空间中直线与平面之间的位置关系

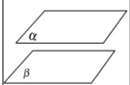
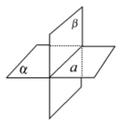
直线与平面的位置关系有且只有三种情况：

位置关系	直线 a 在平面 α 内	直线 a 与平面 α 相交	直线 a 与平面 α 平行
公共点	有无数个公共点	有且只有一个公共点	没有公共点
符号表示	$a\subset\alpha$	$a\cap\alpha=A$	$a\parallel\alpha$
图形表示			

我们将直线与平面平行和直线与平面相交统称为直线在平面外，记作 $a\not\subset\alpha$.

四、空间中平面与平面之间的位置关系

两个平面之间的位置关系有且只有以下两种情况：

位置关系	两平面平行	两平面相交
公共点	没有公共点	有一条公共直线
符号表示	$\alpha /\!/ \beta$	$\alpha \cap \beta = a$
图形表示		

2.2　直线、平面平行的判定及其性质

一、直线与平面平行的判定

定理：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行.

上述定理用符号表示为：$a \not\subset \alpha$，$b \subset \alpha$，且 $a /\!/ b \Rightarrow a /\!/ \alpha$.

二、平面与平面平行的判定

定理：一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行.

此定理可以用符号表示为：$a \subset \beta$，$b \subset \beta$，$a \cap b = P$，$a /\!/ \alpha$，$b /\!/ \alpha \Rightarrow \beta /\!/ \alpha$.

推论：如果一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面的两条相交直线，那么这两个平面平行.

三、直线与平面平行的性质

定理：一条直线和一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行.

此定理也可用符号表示为：$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = b \Rightarrow a /\!/ b$.

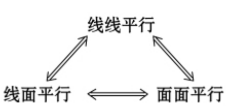
四、平面与平面平行的性质

定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

此定理也可用符号表示为：$\alpha /\!/ \beta$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \cap \gamma = b \Rightarrow a /\!/ b$.

五、线线平行、线面平行、面面平行间的关系

线线平行、线面平行、面面平行之间可以相互转化、

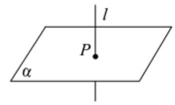


相互应用. 即由于三者之间相互沟通、相互联系，因此立体几何问题的解决往往一题多解(证).

2.3　直线、平面垂直的判定及其性质

一、直线与平面垂直的定义

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l \perp \alpha$. 直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫做直线 l 的垂面，直线与平面垂直时，它们唯一的公共点 P 叫做垂足. 画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直，如图所示.

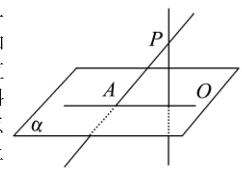


二、直线与平面垂直的判定

定理：一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直.

三、直线与平面所成的角

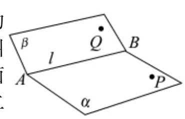
一条直线 PA 和一个平面 α 相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做这个平面的斜线，斜线和平面的交点 A 叫做斜足. 过斜线上斜足以外的一点 P 向平面引垂线 PO，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫做斜线在这个平面上的射影. 平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做这条直线和这个平面所成的角(如图所示).



四、平面与平面垂直的判定

1. 二面角

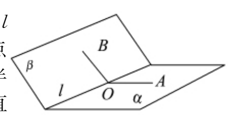
如图，从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角. 这条直线叫做二面角的棱，这两个半平面叫做二面角的面. 棱为 AB、面分别为 α，β 的二面角记作二面角 $\alpha-AB-\beta$. 有时为了方便，也可在 α，β 内(棱以外的半平面部分)分别取点 P，Q，将这个二面角记作二面角 $P-AB-Q$.



如果棱记作 l，那么这个二面角记作二面角 $\alpha-l-\beta$ 或 $P-l-Q$.

2. 二面角的平面角

如图，在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫做二面角的平面角.

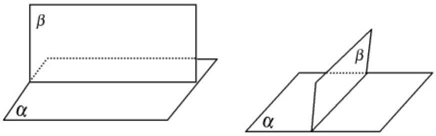


二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少

度.平面角是直角的二面角叫做直二面角.

3. 平面与平面垂直的定义

两个平面相交,如果它们所成的二面角是直二面角,就说这两个平面互相垂直(如图).



4. 平面与平面垂直的判定

定理:一个平面过另一个平面的垂线,则这两个平面垂直.

五、直线与平面垂直的性质

定理:垂直于同一个平面的两条直线平行.

六、平面与平面垂直的性质

定理:两个平面垂直,则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.

第三章　直线与方程

3.1　直线的倾斜角与斜率

一、直线的倾斜角

当直线 l 与 x 轴相交时,我们取 x 轴作为基准,x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫做直线 l 的倾斜角.

当直线 l 与 x 轴平行或重合时,我们规定它的倾斜角为 0°,因此,直线的倾斜角 α 的取值范围为 $0^\circ\leqslant\alpha<180^\circ$.

二、直线的斜率

1. 定义

我们把一条直线的倾斜角 α 的正切值叫做这条直线的斜率.直线的斜率常用 k 表示,即 $k=\tan\alpha(\alpha\neq 90^\circ)$.

倾斜角 α 与斜率 k 之间的关系:

$\alpha=0^\circ\Leftrightarrow k=0$;$0^\circ<\alpha<90^\circ\Leftrightarrow k>0$;

$\alpha=90^\circ\Leftrightarrow k$ 不存在;$90^\circ<\alpha<180^\circ\Leftrightarrow k<0$.

2. 斜率公式

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$($x_1\neq x_2$)的直线的斜率公式为 $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-y_1}$.

3.2　直线的方程

一、直线的方程

以一个方程的解为坐标的点都是某一直线上的点;反过来,这条直线上的点的坐标都是这个方程的解,这时这个方程就叫做这条直线的方程,这条直线就叫做这个方程的直线.

二、直线方程的几种形式

名称	已知条件	方程	适用范围
斜截式	斜率 k,纵截距 b	$y=kx+b$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
点斜式	点 $P_0(x_0,y_0)$、斜率 k	$y-y_0=k(x-x_0)$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
两点式	点 $P_1(x_1,y_1)$和 $P_2(x_2,y_2)$	$\dfrac{y-y1}{y2-y1}=\dfrac{x-x1}{x2-x1}$	不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线
截距式	横截距 a 纵截距 b	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	不包括坐标轴,平行于坐标轴和过原点的直线
一般式	——	$Ax+By+C=0$	A,B 不同时为 0

三、对称问题

1. 点(x,y)关于点(a,b)的对称点为$(2a-x,2b-y)$.

2. 点(x,y)关 x 轴、y 轴、原点、直线 $y=x$、直线 $y=-x$ 的对称点分别为$(x,-y)$,$(-x,y)$,$(-x,-y)$,(y,x),$(-y,-x)$.

3.3　直线的交点坐标与距离公式

一、求两直线的交点坐标

设两直线方程是 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$.

若两直线相交,那么交点坐标一定是方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 的解;

如果二元一次方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2=0\end{cases}$ 只有一组公共解,那么以这个解为坐标的点就是 l_1 和 l_2 的交点.

二、两条直线的位置关系

当直线不平行于坐标轴时：

位置关系 \ 直线方程	$l_1:y=k_1x+b_1$ $l_2:y=k_2x+b_2$	$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$	l_1 与 l_2 组成的方程组
平行	$k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$	无解
重合	$k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$	有无数多解
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$	有唯一解
垂直	$k_1k_2=-1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$	

三、距离公式

1. 两点间距离公式

两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$间的距离公式：$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

特别地，原点 $O(0,0)$与任一点 $P(x,y)$的距离$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 点到直线的距离公式

点 $P_0(x_0,y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. 两平行线间的距离公式

两平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 和 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

第四章　圆与方程

4.1　圆的方程

一、圆的定义

在平面上，到定点的距离等于定长的点的集合，即点集$\{P||PA|=r\}$就是圆，其中定点 A 为圆心，定长 r 为半径.

二、圆的方程

1. 标准方程

圆心为 $C(a,b)$，半径为 r 的圆的方程$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 叫做圆的标准方程.

2. 圆的一般方程

将方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 化为$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$.

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，二元二次方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 叫做圆的一般方程，圆心为$(-\frac{D}{2},-\frac{F}{2})$，半径是$\frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$.

二元二次方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$.

表示圆的充要条件是$\begin{cases}A=C\neq 0,\\ B=0,\\ D^2+E^2-4F>0.\end{cases}$

4.2　直线、圆的位置关系

一、点与圆的位置关系

已知圆心 $C(a,b)$，半径 r，点 M 的坐标为(x_0,y_0)，则

$|MC|<r\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2\Leftrightarrow$点 M 在圆 C 内；

$|MC|=r\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2\Leftrightarrow$点 M 在圆 C 上；

$|MC|>r\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2\Leftrightarrow$点 M 在圆 C 外.

其中$|MC|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$.

二、直线与圆的位置关系

1. 直线和圆有相交、相切、相离三种位置关系

直线与圆相交，有两个公共点；

直线与圆相切，只有一个公共点；

直线与圆相离，没有公共点.

2. 直线与圆的位置关系的判定

(1)判别式法

联立直线与圆的方程组成的方程组，消去一个未知量，得到关于另一个未知量的一元二次方程，利用判别式 Δ 进行判断：

$\Delta>0\Leftrightarrow$直线与圆相交；$\Delta=0\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$\Delta<0\Leftrightarrow$直线与圆相离.

(2)几何法：利用圆心 $C(a,b)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$与圆的半径 r 的大小关系来判定：

$d<r\Leftrightarrow$直线与圆相交；$d=r\Leftrightarrow$直线与圆相切；

$d>r\Leftrightarrow$直线与圆相离.

三、直线被圆所截弦的问题

直线与圆相交于两点 A,B，则求弦 AB 长的

方法有两种：

1. 代数法

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由根与系数的关系及弦长公式知，$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$（$k$ 为直线 AB 的斜率）.

2. 几何法

由弦心距 d、半径 r、半径长构成的直角三角形可知，$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$.

四、圆与圆的位置关系

1. 两圆的位置关系有相离（外离、内含）、相切（外切、内切）和相交.

2. 判断两个圆的位置关系，有以下两种方法：

(1)利用两圆的交点进行判断：

设两圆的方程组成的方程组为

$$\begin{cases}x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,\\x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.\end{cases}$$

则此方程组：

有两组不同的实数解⇔两圆相交；

有两组相同的实数解⇔两圆相切；

无实数解⇔两圆相离.

(2)利用两圆的圆心距进行判断：

设两圆 C_1：$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$，$C_2$：$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$，

圆心距

$d=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$，则

$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$⇔两圆相交；

$\left.\begin{array}{l}d=r_1+r_2\Leftrightarrow \text{两圆外切}\\ d=|r_1-r_2|\,(r_1\neq r_2)\Leftrightarrow \text{两圆内切}\end{array}\right\}$ 两圆相切；

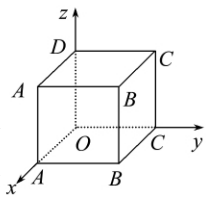
$\left.\begin{array}{l}d>r_1+r_2\Leftrightarrow \text{两圆外离}\\ 0<d<|r_1-r_2|\,(r_1\neq r_2)\\ \quad\Leftrightarrow \text{两圆内含}\end{array}\right\}$ 两圆相离；

$d=0$⇔两圆为同心圆.

4.3 空间直角坐标系

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系



如图，$OABC-D'A'B'C'$ 是单位正方体，以 O 为原点，分别以射线 OA，OC，OD' 的方向为正方向，以线段 OA，OC，OD' 的长为单位长，建立三条数轴：x 轴、y 轴和 z 轴. 这时我们说建立了一个空间直角坐标系 $Oxyz$，其中点 O 叫做坐标原点. x 轴、y 轴和 z 轴叫做坐标轴. 通过每两个坐标轴的平面叫做坐标平面，分别称为 xOy 平面、yOz 平面和 zOx 平面.

在空间直角坐标系中，让右手拇指指向 x 轴的正方向，食指指向 y 轴的正方向，如果中指指向 z 轴的正方向，则称这个坐标系为右手直角坐标系.

2. 空间直角坐标系中点的坐标

设点 M 为空间的一个定点，过点 M 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面，依次交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P，Q 和 R（如图所示），设点 P，Q 和 R 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的坐标分别是 x，y 和 z，那么点 M 就对应唯一确定的有序实数组 (x,y,z). 其中 x，y，z 也可称为点 M 的坐标分量.

反之，给定任意有序实数组 (x,y,z)，我们可以在 x 轴、y 轴和 z 轴上依次取坐标为 x，y 和 z 的点 P，Q 和 R，分别过 P，Q 和 R 各作一个平面，分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，这三个平面的唯一交点就是有序实数组 (x,y,z) 确定的点 M.

这样，空间任意一点 M 的坐标都可以用有序实数组 (x,y,z) 来表示，有序实数组 (x,y,z) 叫做点 M 在此空间直角坐标系中的坐标，记作 $M(x,y,z)$. 其中 x 叫做点 M 的横坐标，y 叫做点 M 的纵坐标，z 叫做点 M 的竖坐标.

二、空间两点的距离公式

空间中任意两点的距离公式

空间中点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$