

石家庄经济学院学术著作出版基金资助

图设计与k-边 优美标号的研究

TUSHEJI YU k-BIAN
YOUMEI BIAOHAO DE YANJIU

刘晓姗 王 琦 李 霞 著

(28, 5, 23, 10, 25, 6)
(21, 10, 11, 26, 17, 13)
(18, 10, 15, 13, 26, 24)
(27, 15, 17, 24, 20, 19)

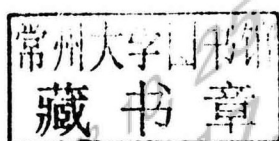
河北科学技术出版社

石家庄经济学院学术著作出版基金资助

图设计与k-边 优美标号的研究

TUSHEJI YU k-BIAN
YOUMEI BIAOHAO DE YANJIU

刘晓姗 王 琦 李 霞 著



(28, 5, 20, 11, 26,
(21, 10, 11, 26,
(18, 10, 15, 13, 26,
(27, 15, 17, 24, 20, 19)

河北科学技术出版社

图书在版编目 (C I P) 数据

图设计与 k- 边优美标号的研究 / 刘晓珊, 王琦, 李霞著. -- 石家庄 : 河北科学技术出版社, 2014.12
ISBN 978-7-5375-7200-2

I. ①图… II. ①刘… ②王… ③李… III. ①组合设计 - 研究 IV. ① 0157.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 288441 号

图设计与 k- 边优美标号的研究

刘晓珊 王 琦 李 霞 著

出版发行 河北科学技术出版社

地 址 石家庄市友谊北大街 330 号 (邮编: 050061)

印 刷 石家庄燕赵创新印刷有限公司

经 销 新华书店

开 本 787 × 1092 1/16

印 张 11.75

字 数 198 千字

版 次 2014 年 12 月第 1 版

2014 年 12 月第 1 次印刷

定 价 28.00 元

前 言

离散数学的核心是组合数学，组合设计是组合数学中既古老而又年轻的数学分支。而图设计是传统的 BIBD 设计的一种自然推广。通常的研究角度是两个：一个是从图的点数、边数由小到大逐步解决各个图；一个是对一些简单的图类（比如路、圈、星）进行整体解决。提及古老性，因为它所研究的问题有的可追溯到很久很久以前。然而，它之所以形成一新的分支，那还是最近若干年的事，是受到电子计算机蓬勃发展影响的结果。本书讨论的内容实际上是属于组合分析范畴。组合分析研究的主要内容是计数和枚举，即计算具有某种特性的对象有多少，并进而把它完全列举出来。

组合设计也是组合数学中难度较大的分支。它的计数理论和方法已渗透到许多学科和领域，特别是在计算机科学、数字通讯、编码密码学及实验设计等领域有着广泛的直接应用。计数在许多方面有其重大作用，比如概率论，要计算发生具有某种性质的事件的概率等于多少，往往首先要计算出具有该性质的事件的数目；又如物理学家要研究物质的物理性质，就要计算电子被分配在不同能级的不同状态数有多少。对于计算机科学工作者，计数还有其特殊的意义：计算机科学是研究算法的一门科学，必须要对算法所需要的计算量和存储单元作出估计，即所谓算法的时间复杂性和空间复杂性分析，这属于组合算法的研究内容。组合分析和组合算法的关系亦如数学分析和计算方法的关系，组合分析是组合算法的基础，即为算法与算法分析作准备。

近年来，随着信息时代的到来对离散数学需求的增强，组合学和组合设计的作用越来越显著。图设计是近些年来设计界研究的一个新热点，它是传统的图设计的一种自然推广。本书从过去的成果与经验出发，借鉴国内外最新的方法和进展，为我国在此方面保持领先继续作出努力。图的填充覆盖设计由于条件复杂而成为设计领域的难点问题。另外，本书还解决了部分特殊网络图的 k -边优美指标集的问题，并对于各种顶点数目的不同分类，逐一给出了具体构造。

组合设计中的图设计是近些年来设计界研究的一个新热点，本书借鉴国内外最新的方法和进展，利用图设计结论将网络的拓扑结构经简化抽象为图模型，并结合网络结构的一些特殊模型研

究组合最优化问题，争取使其结果更加完善。图的填充覆盖设计由于条件复杂而成为设计领域的难点，目前关于图设计的填充与覆盖研究甚少。因此此类问题具有很广阔的发展天地，对它们的研究将对组合设计学科的发展起理论推进作用，也将在实际应用上作出有价值的探索。

本书主要由刘晓姗和王琦负责撰写，其中刘晓姗负责撰写第一、二章，王琦负责撰写第三章至第七章，在此感谢李霞老师的校对修改，为本书增色不少。撰写期间还得到了石家庄经济学院数理学院许多同事的大力支持与帮助，在此一并表示感谢！同时，本书的出版，得到了河北科技出版社的领导和张京生编辑的大力支持与帮助，本人在此一并表示感谢。

本书获得了河北省自然科学基金项目《光网络中流量疏导问题的研究与应用》(A2011207003)和河北省高等学校科学技术研究优秀青年基金项目《网络中超图嵌入问题的研究与应用》(Y2011115)经费支持，也获得了数理学院的应用数学重点学科的部分经费支持。

目 录

§1 概论	1
§1.1 Kirkman 问题	2
§1.2 可分组设计	6
§1.3 射影平面	7
§1.4 可分组设计构作法	10
§2 正交拉丁方	13
§2.1 拉丁方递归法	13
§2.2 直接构作法一	19
§2.3 直接构作法二	25
§2.4 直接构作法三	34
§2.5 PBD 构作法	36
§3 成对平衡设计	41
§3.1 引言	41
§3.2 简单差集	43
§3.3 设计的复合构造	47
§3.4 闭集的结构	50
§4 平衡不完全区组设计 BIBD	59
§4.1 BIBD 存在的必要条件	59
§4.2 一种直接构造方法	65
§4.3 某些闭集的有限生成	73
§4.4 $k = 3$ 的 BIBD	75
§4.5 $k > 3$ 的 BIBD	78
§5 可分解平衡不完全区组设计 RBIBD	85
§5.1 关于 R_k^* 的 PBD 闭性	85

§5.2 $(v, 3, 1) - RBIBD$ 的存在性	87
§5.3 $(v, 4, 1) - RBIBD$ 的存在性	89
§5.4 渐近充分性	92
§5.5 $(v, 4, 3) - RBIBD$ 和有关的组合设计	97
§6 填充设计与覆盖设计	102
§6.1 图设计	102
§6.2 图 G 的填充与覆盖设计	105
§6.3 图 Q 的填充与覆盖设计	121
§7 k-边优美图与 k-边优美指标集	143
§7.1 图 $W(m, n)$ 的边优美指标集	143
§7.2 必要条件与例子	144
§7.3 n 为偶数时的构造	146
§7.4 m 为偶数 n 为奇数时的构造	155
参考文献	177

§1 概论

组合数学是离散数学的核心，而组合设计是组合数学中难度较大的分支。它的理论和方法已渗透到许多学科和领域，特别是在计算机科学、数字通讯、编码密码学及实验设计等领域有着广泛的直接应用。近年来，随着信息时代的到来和对离散数学需求的增强，组合学和组合设计的作用越来越显著。国际上对此方面研究相当重视，近三十年来发展很快。1992年，国外编写了一册综述文集《当代设计理论》，论述了设计理论当时12个热门分支的进展，列举了众多的公开问题。1996年，国际设计界有推出了一本大型工具书《组合设计手册》，全面介绍了组合设计诸分支迄今为止的前言情况。这些都有力地推动了设计理论的研究和发展。图设计是近些年来设计界研究的一个新热点，它是传统的 BIBD 设计的一种自然推广。通常的研究角度是两个：一个是从图的点数、边数由小到大逐步解决各个图；一个是对一些简单的图类（比如路、圈、星）进行整体解决。当然，由于图的复杂多样性，图设计这一领域的问题几乎是无穷尽的，这方面的研究也必然是长期的。

鉴于一些图设计结果已被直接应用于编码、密码及网络通讯中，国内外学者对相关问题的研究越来越加大了力度。而不论从已有的成果还是从实践的经验看，本著作将从过去的成果与经验出发，借鉴国内外最新的方法和进展，为我国在此方面保持领先继续作出努力，研究对象和目标将涉及到部分联图的最大填充与最小覆盖设计。而图的填充覆盖设计由于条件复杂而成为设计领域的难点，目前关于图设计的填充与覆盖研究甚少。因此此类问题具

有很广阔的发展天地,对它们的研究将对组合设计学科的发展起理论推进作用,也将在实际应用上做出有价值的探索.

组合设计理论主要讨论设计的存在性问题,构造问题,设计的性质,设计间关系,以及计数问题.当安排物件的规则比较复杂或比较强时,安排是否可能并不明显,因而有存在性问题,而设计性质的讨论往往对确定存在条件有所帮助.存在性肯定之后,就有把设计构造出来的问题,而事实上两个问题常常是同时解决的.设计之间关系的讨论提供了某种桥梁作用,使得某些设计的已知结果有可能被用来讨论别的一类新的设计.设计的计数问题是要求更高的一类问题,即向不同方式的安排共有多少种的问题.组合设计理论的目前发展阶段主要侧重在存在性和构造问题.计数问题的结果还比较少,即使是存在性问题也还有许多方面等待人们去探索,发现和完善.总之,组合设计理论是正在迅速发展中的一个数学领域.

本章从两个著名问题入手,介绍几类最基本的组合设计的概念并讨论它们之间的关系.

§1.1 Kirkman 问题

在 1847 年 Kirkman 提出了以下问题.

问题 1.1 (Kirkman 女生问题) 某教员打算安排 15 名女生外出散步,散步时 3 人一组,分成 5 组.问能否在一周内每天改换分组方式安排一次散步,使得每两名女生在这周内分在同一组中散步恰好一次?

以下是符合要求的一种分组方法 (15 名女生以 $0, 1, \dots, 12, A, B$ 表示):

星期日: $\{0, 1, 9\}, \{2, 4, 12\}, \{3, 6, B\}, \{5, 10, 11\}, \{7, 8, A\};$

星期一: $\{0, 2, 7\}, \{1, 10, B\}, \{3, 4, 8\}, \{5, 6, 12\}, \{9, 11, A\};$

星期二: $\{0, 3, 11\}, \{1, 7, 12\}, \{2, 5, A\}, \{4, 9, B\}, \{6, 8, 10\};$

星期三: $\{0, 4, 6\}, \{1, 8, 11\}, \{2, 9, 10\}, \{3, 12, A\}, \{5, 7, B\};$ (1.1)

星期四: $\{0, 5, 8\}, \{1, 2, 3\}, \{4, 10, A\}, \{6, 7, 9\}, \{11, 12, B\};$

星期五: $\{0, 10, 12\}, \{1, 6, A\}, \{2, 8, B\}, \{3, 5, 9\}, \{4, 7, 11\};$

星期六: $\{0, A, B\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 6, 11\}, \{3, 7, 10\}, \{8, 9, 12\}.$

这个问题曾被推广, 如果女生不是15名而是 v 名, 就得到一般的Kirkman问题. 如果分组为 k 人一组, 则问题变得更为一般. 这些设计以及它们的推广曾被广泛研究并应用到试验的设计中去. 以下是此类问题的一般提法.

定义 1.1 设 X 是一个有限集, $A_1, A_2, \dots, A_b$ 是它的 b 个子集. 则称 $(X, \mathcal{A})$ 是集 X 上的一个区组设计, 其中 $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_b\}$. 诸 $A_i (1 \leq i \leq b)$ 称为设计的区组. 若无混淆也称 $\mathcal{A}$ 是集 X 上的区组设计.

该定义中每个区组是 X 的子集, 从而不包含重复元素, 而设计可以包含重复的区组.

定义 1.2 设 $(X, \mathcal{A})$ 是一区组设计, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$. 如果对任一元 $x \in X$, x 恰在 $\mathcal{A}_1$ 的一个区组中出现, 称 $\mathcal{A}_1$ 是该设计的一个平行类. 如果 $\mathcal{A}$ 可以表为两两不相交的若干个平行类的并, 则称该设计为可分解设计.

定义 1.3 设 v, λ 为正整数且 K 为某些正整数的集. 一个区组设计 $(X, \mathcal{A})$ 若满足如下条件.

- (i) $|X| = v;$
- (ii) $\{|A| \mid A \in \mathcal{A}\} \subset K;$
- (iii) 每一对集 $\{x, y\} \subset X$ 恰包含于 λ 个区组 A_i 中.

我们称该设计为成对平衡设计, 记作 $B[k, \lambda; v]$ 或 $(v, k, \lambda) - PBD$.

例 1.1 设 $X = \{a, b, c, d\}, \mathcal{A} = \{abc, abd, bcd, ac, ad, cd\}$, 则 $(X, \mathcal{A})$ 是一个 $(4, \{2, 3\}, 2) - PBD$.

定义 1.4 一个 $(v, \{k\}, \lambda) - PBD$ 称为一个平衡不完全区组设计, 记作 $B[k, \lambda; v]$ 或 $(v, k, \lambda) - BIBD$. 一个 $(v, \{k\}, \lambda) - PBD$ 如果是可分

解设计, 则称为可分解平衡不完全区组设计, 记作 $RB[k, \lambda; v]$ 或 $(v, k, \lambda) - RBIBD$.

Euler 在 1782 年提出了以下问题:

问题 1.2 (三十六军官问题) 设有 36 名军官, 来自六个不同的团队且每个团队六名, 他们分属于六种不同的军阶且每种军阶六名. 问能否将这 36 名军官排成六行六列的方阵, 使每一行及每一列上的六名军官来自不同的团队且属于不同的军阶?

这里的 36 名军官可以推广为 n^2 名军官, 为了描述推广后的问题我们引进以下定义.

定义 1.5 设 X 为一个 n 元集, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是元素取自 X 的 n 阶方阵, 满足

$$\begin{aligned} \{a_{ij}; 1 \leq j \leq n\} &= X, 1 \leq i \leq n, \\ \{a_{ij}; 1 \leq i \leq n\} &= X, 1 \leq j \leq n, \end{aligned} \quad (1.2)$$

则称 A 为集 X 上的 n 阶拉丁方, 若还有 n 元集 X' 上的 n 阶拉丁方 $B = (b_{ij})$ 满足

$$\{(a_{ij}, b_{ij}) \mid 1 \leq i, j \leq n\} = X \times X',$$

则称拉丁方 A 与拉丁方 B 正交, 或称 A 与 B 是一对 n 阶正交拉丁方, 记作 $MOLS(n)$.

在问题 1.2 中, 如果以 $X = \{1, 2, \dots, 6\}$ 表示六个团队, $X' = \{1, 2, \dots, 6\}$ 表示六种军阶, 而用 (i, j) 表示来自第 i 团队且属于第 j 种军阶的军官, 则问题 1.2 实际上是问: 是否存在一对六阶的正交拉丁方. 一般地有如下问题.

问题 1.3 对任意正整数 n , 是否存在一对 n 阶正交拉丁方?

存在 1 阶正交拉丁方而不存在 2 阶正交拉丁方是明显的. 以下是一对 3 阶正交拉丁方.

$$\begin{array}{ccc}
& 1 & 2 & 3 \\
A = & 2 & 3 & 1 \\
& 3 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
& 1 & 2 & 3 \\
B = & 3 & 1 & 2 \\
& 2 & 3 & 1
\end{array}
\qquad (1.3)$$

对于四阶拉丁方, 我们可以找到这样的三个, 它们中每两个都是正交的, 例如

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 2 & 3 \\
A = & 1 & 0 & 3 & 2 \\
& 2 & 3 & 0 & 1 \\
& 3 & 2 & 1 & 0
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 2 & 3 \\
B = & 2 & 3 & 0 & 1 \\
& 3 & 2 & 1 & 0 \\
& 1 & 0 & 3 & 2
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 2 & 3 \\
C = & 3 & 2 & 1 & 0 \\
& 1 & 0 & 3 & 2 \\
& 2 & 3 & 0 & 1
\end{array}
\quad (1.4)$$

定义 1.6 设 k 个 n 阶拉丁方 $A_1, A_2, \dots, A_k$ 中每两个都是正交的, 则称它们是 k 个两两正交的 n 阶拉丁方, 记作 $kMOLS(n)$. 以 $N(n)$ 记 n 阶两两正交拉丁方的最大个数.

以上例子表明 $N(1) = \infty, N(2) = 1, N(3) \geq 2, N(4) \geq 3$.

问题 1.4 对任意正整数 n , 确定数 $N(n)$ 是多少?

问题 1.3 与 1.4 将在第二章中讨论. 设有 $X = \{1, 2, \dots, n\}$ 上的 $kMOLS(n), A_t = (a_{ij}^{(t)}) \ 1 \leq t \leq k$. 由此可以得到一个 n^2 行 $k+2$ 列的表, 其第 $r = (i-1)n + j$ 行为

$$i, j, a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \dots, a_{ij}^{(k)},$$

由每一 A_t 是拉丁方且它们两两正交可见, 所作出的表有以下性质: 表中任意两列包含 $X \times X$ 中的元素恰好各一次. 为此给出

定义 1.7 设 $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = (\alpha_{ij})_{n^2 \times s}$, $\alpha_{ij} \in X$, 如果对任意 j 和 l , $1 \leq j < l \leq s$, 有 $\{(\alpha_{ij}, \alpha_{il}) \mid 1 \leq i \leq n^2\} = X \times X$, 则称 A 为阶 n , 约束数 s 的正交表, 记作 $OA(n, s)$.

上一段说明了从 $kMOLS(n)$ 可以推得 $OA(n, k+2)$. 相反, 从一个 $OA(n, k+2)$ 中任意取出两列, 一行作行标, 另一列作列标, 则从其余 k 个列可以得到 k 个 n 阶拉丁方, 它们是两两正交的. 于是可得如下引理.

引理 1.1 正交表 $OA(n, k)$ 的存在性等价于 $k-2MOLS(n)$ 的存在性.

§1.2 可分组设计

本节介绍两类新的设计的概念, 并讨论它们与正交拉丁方的关系.

定义 1.8 设 $\mathcal{G}$ 是设计 $(X, \mathcal{G} \cup \mathcal{A})$ 的平行类, λ, v 为正整数而 K, M 为正整数的集, 使得

- (i) $|X| = v$;
- (ii) 对每一个 $G_i \in \mathcal{G}$, $|G_i| \in M$;
- (iii) 对每一个 $A_j \in \mathcal{A}$, $|A_j| \in K$;
- (iv) 对每一 $G_i \in \mathcal{G}$ 及每一 $A_j \in \mathcal{A}$, $|G_i \cap A_j| \leq 1$;
- (v) 对 X 中属于相异 G_i 的 X 中元 x 和 y , 对集 $\{x, y\}$ 恰包含于 $\mathcal{A}$ 的 λ 个 A_j 中.

我们称该设计为可分组设计. 记作 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$, 或 $GD[K, \lambda, M; v]$, $\mathcal{G}$ 中的 G_i 称为组, $\mathcal{A}$ 中的 A_j 称为区组, 若 $\mathcal{G}$ 中有大小 m_1 的组 t_1 个, 大小 m_2 的组 t_2 个, $\dots$, 大小 m_s 的组 t_s 个, 则称 $m_1^{t_1} m_2^{t_2} \cdots m_s^{t_s}$ 是组的型.

显然, 一个 $(v, K, \lambda) - PBD$ 是一个 $GD[K, \lambda, 1; v]$. 当 $\lambda = 1$ 时, 从一个 $GD[K, 1, M; v]$, 即 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$, 可以得到一个 $(v, K \cup M, 1) - PBD$, $(X, \mathcal{G} \cup \mathcal{A})$.

定义 1.9 称一个 $GD[k, \lambda, m; km]$ 为横截设计, 记作 $TD[k, \lambda; m]$.

$\lambda = 1$ 时横截设计与正交表是相互等价的, 可得如下引理.

引理 1.2 横截设计 $TD[k, 1; n]$ 的存在性等价于正交表 $OA(n, k)$ 的存在性.

证明: 设 $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $I(k) = \{1, 2, \dots, k\}$, $\mathcal{G} = \{X \times \{i\} \mid 1 \leq i \leq k\}$, 且 $(X \times I(k), \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 为横截设计 $TD[k, 1; n]$. $\{(\alpha_1, 1), (\alpha_2, 2), \dots, (\alpha_k, k)\}$ 是 $\mathcal{A}$ 中的任一区组, 则以 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ 为行所得的 n^2 行 k 列的表是一个正交表 $OA(n, k)$. 事实上, 对任意 j, l , $1 \leq j < l \leq k$, 及

$(\alpha_j, \alpha_l) \in X \times X$, 恰有一个区组包含组 $X \times \{j\}$ 中的点 (α_j, j) 及组 $X \times \{l\}$ 中的点 (α_l, l) , 从而 (α_j, α_l) 恰好出现在表中的某一行上. 反过来, 设 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ik}$ 是 X 上正交表 $OA(n, k)$ 的第 i 行, $1 \leq i \leq n^2$. 则以 $X \times \{i\}$ 为组, $1 \leq i \leq k$, 以 $\{(\alpha_{i1}, 1), (\alpha_{i2}, 2), \dots, (\alpha_{ik}, k)\}$ 为区组, $1 \leq i \leq n^2$, 所作出的 $(X \times I(k), \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是一个横截设计 $TD[k, 1; n]$. 事实上, 对 $X \times \{j\}$ 中任一点 (β_j, j) 及 $X \times \{l\}$ 中任一点 (β_l, l) , 其中 $1 \leq j < l \leq k$, 由于 $(\beta_j, \beta_l) \in X \times X$, 恰存在一个 i , 使 $\beta_j = \alpha_{ij}$ 且 $\beta_l = \alpha_{il}$, 从而 (β_j, j) 与 (β_l, l) 包含于从正交表的第 i 行所作出的恰好一个区组中.

该引理所述的等价性有重要的意义, 由此不仅可以用横截设计的语言来叙述正交拉丁方的结果, 而且通过横截设计, 使得正交拉丁方的结果有可能被用来讨论其它的 PBD.

引理 1.3 $(n^2 + n + 1, n + 1, 1) - BIBD$ 的存在性等价于 $TD[n + 1, n]$ 的存在性.

证明: 设 $(X, \mathcal{A})$ 是一个 $(n^2 + n + 1, n + 1, 1) - BIBD$, $x \in X$. 若包含 x 的区组有 r_x 个, 则 $r_x(n + 1 - 1) + 1 = n^2 + n + 1$, 于是有 $r_x = n + 1$. 设 $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ 是这样的 $n + 1$ 个区组, 记 $G_i = A_i \setminus \{x\}$, $1 \leq i \leq n + 1$, $\mathcal{G} = \{G_i \mid 1 \leq i \leq n + 1\}$, 且 $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{A_1, A_2, \dots, A_{n+1}\}$, 则 $(X \setminus \{x\}, \mathcal{G}, \mathcal{A}')$ 是一个 $TD[n + 1, 1; n]$ 反之, 若 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是一个 $TD[n + 1, 1; n]$, $\theta \notin X$, 将 θ 添加到 X 中以及每一个组中, 即令 $X' = X \cup \{\theta\}$, $\mathcal{G}' = \{G' = G \cup \{\theta\} \mid G \in \mathcal{G}\}$, 则 $(X', \mathcal{G}' \cup \mathcal{A})$ 是一个 $(n^2 + n + 1, n + 1, 1) - BIBD$.

§1.3 射影平面

设 X 是元素称为“点”的集合, $\mathcal{L}$ 是称为“线”的 X 的某些子集的族, 若“点”与“线”之间满足以下公理, 则称 X 连同 $\mathcal{L}$ 是一个射影平面.

公理 1.1 任意两个相异点恰被一条线所包含.

公理 1.2 任意两条相异的线恰有一个公共点.

公理 1.3 存在四个点, 其中没有三个点能含于同一条线.

引理 1.4 射影平面中任一条线上至少有三点.

证明: 设 A, B, C, D 是满足公理 1.3 的四个点, 又 l 是任一条线. 由公理 1.3, 这四点中至少有一点不在 l 上, 设为点 A . 设 l_1, l_2, l_3 是交于 A 且分别过 B, C, D 的三条线, 由公理 1.3 这三条线必两两相异. 设线 l 与 l_1, l_2, l_3 的交点分别为 A_1, A_2, A_3 . 因 A 不在 l 上, 故 A_1, A_2, A_3 两两相异, 从而 l 上至少有三个点.

定义 1.10 含有限个点的射影平面称为有限射影平面.

引理 1.5 设有限射影平面上有一条线含 $k \geq 3$ 个点, 则每条线均含 k 个点.

证明: 设线 l 含 k 个点, 对平面上异于 l 的任一条线 h , 设 h 与 l 交于 P . 又设 H 是 h 上异于 P 的点, L 是 l 上异于 P 的点, Q 是含 H, L 的线上异于 H 和 L 的点. 则 Q 既不在 h 上, 又不在 l 上. 现设 l 上的点为 $A_1, A_2, \dots, A_k$, 包含 Q 与 A_i 的线为 l_i , $1 \leq i \leq k$. 这 k 条线 l_i 必定是两两相异的. 设 l_i 交 h 于 B_i , $1 \leq i \leq k$, 则 $B_1, B_2, \dots, B_k$ 必定是两两相异的, 于是 h 上至少有 k 个点. 若 h 上还有一个点 B_{k+1} , 则包含 Q 与 B_{k+1} 的线必异于任一 l_i , $1 \leq i \leq k$, 从而与 l 的交点必异于任一 A_i , $1 \leq i \leq k$, 引起矛盾. 故 h 上恰有 k 个点.

定义 1.11 若有限射影平面的线含 $n+1$ 个点 ($n \geq 2$), 称 n 为该有限射影平面的阶.

引理 1.6 n 阶有限射影平面共有 $n^2 + n + 1$ 个点.

证明: 类似于引理 1.5 的证明易见, 存在一点 Q , 过 Q 的线恰有 $n+1$ 条. 因为平面上任一点必与 Q 包含于同一线中, 故只要计算这 $n+1$ 条线上点的总数. 得平面上总点数为 $(n+1)(n+1-1)+1 = n^2 + n + 1$.

引理 1.7 当 $n \geq 2$ 时, n 阶有限射影平面的存在性等价于 $(n^2 + n + 1, n + 1, 1) - BIBD$ 的存在性.

证明: 设 n 阶有限射影平面存在, 将线取作区组, 则由公理 1.1、定义 1.10 及引理 1.6, 得到一个 $(n^2 + n + 1, n + 1, 1) - BIBD$. 反之, 将一

个 $(n^2 + n + 1, n + 1, 1) - BIBD$ 的区组作为线, 则公理 1.1 显然满足. 因 $n \geq 2$, 公理 1.3 也不难验证. 设有线 l 与 h , 点 $H \in h$ 但 $H \notin l$. 由引理 1.3 知, 删去点 H 后, 得一横截设计使 $h \setminus \{H\}$ 是一个组, 而 l 是一个区组. 从而 $h \setminus \{H\}$ 与 l 恰交于一点, 故公理 1.2 亦满足.

定理 1.8 当 $n \geq 2$ 时, 以下条件等价的

- (i) $N(n) \geq n - 1$;
- (ii) 存在 $n - 1MOLS(n)$;
- (iii) 存在正交表 $OA(n, n + 1)$;
- (iv) 存在横截设计 $TD[n + 1, 1; n]$;
- (v) 存在 $(n^2 + n + 1, n + 1, 1) - BIBD$;
- (vi) 存在 n 阶有限射影平面.

证明: 由前述诸引理可得.

定理 1.9 设 q 是质数幂, 则存在 $q - 1MOLS(q)$.

证明: 以 $a_0 = 0, a_1, a_2, \dots, a_{q-1}$ 记有限域 $GF(q)$ 的 q 个元素. 令

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} = a_i + a_j a_k,$$

其中 $i, j \in GF(q), k \in GF(q) \setminus \{0\}$. 可以证明这 $q - 1$ 个 $A^{(k)}$ 构成 $q - 1MOLS(q)$.

首先证每一个 $A^{(k)}$ 是一个拉丁方. 否则, 由 (1.2) 存在 $i, j_1, j_2 (j_1 \neq j_2)$ 使

$$a_{ij_1}^{(k)} = a_{ij_2}^{(k)}, \quad \text{即 } a_i + a_{j_1} a_k = a_i + a_{j_2} a_k, \quad (1.5)$$

或者存在 $i_1, i_2 (i_1 \neq i_2), j$ 使

$$a_{i_1 j}^{(k)} = a_{i_2 j}^{(k)}, \quad \text{即 } a_{i_1} + a_j a_k = a_{i_2} + a_j a_k. \quad (1.6)$$

由 (1.5) 可得 $a_{j_1} = a_{j_2}$, 从而 $j_1 = j_2$. 由 (1.6) 可得 $a_{i_1} = a_{i_2}$, 从而 $i_1 = i_2$ 都引起了矛盾.

其次, 当 $k, t \in GF(q) \setminus \{0\}$ 且 $k \neq t$ 时, 可以证明 $A^{(k)}$ 与 $A^{(t)}$ 正交, 否则由定义 (1.5) 存在 $(i, j) \neq (e, h)$ 使

$$(a_{ij}^{(k)}, a_{ij}^{(t)}) = (a_{eh}^{(k)}, a_{eh}^{(t)}),$$

即

$$a_i + a_j a_k = a_e + a_h a_k, \quad (1.7)$$

$$a_i + a_j a_t = a_e + a_h a_t, \quad (1.8)$$

两式相减得

$$a_j(a_k - a_t) = a_h(a_k - a_t).$$

因为 $a_k \neq a_t$, 于是 $a_j = a_h$, 从而 $j = h$. 以此代入 (1.7) 即得 $a_i = a_e$ 及 $i = e$, 引起矛盾. 这说明 $\{A^{(k)}; k \in GF(q) \setminus \{0\}\}$ 形成了 $q-1$ MOLS(q).

结合定理 1.8 和 1.9 可以知道, 质数幂 q 阶的射影平面总存在, 事实上目前尚不知道是否有非质数幂阶的有限射影平面存在.

§1.4 可分组设计构作法

以下简称一个可分组设计为 GDD . 设 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 为一 GDD , 其中 $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_k\}$, 如果 $(Y, \mathcal{H}, \mathcal{B})$ 也是一个 GDD , 且 $Y \subset X$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \dots, H_k\}$, 其中 $H_i = G_i \cap Y$, $1 \leq i \leq k$, 则称后者是前者的子 GDD . 考察区组集 $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$, 它有如下的性质, 即 X 中的相异点只要不同时落在 Y 内, 也不同时落在任一个组 G_i 内时, 它们一定同时落在 $\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$ 中的恰好一个区组内, 下面我们给出不完全 GDD 的定义

定义 1.12 设 X 为有限集, $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_k\}$ 是 X 的划分, 且 $\mathcal{A}$ 是 X 的某些子集的集. 又设 $Y \subset X$ 且 $H_i = G_i \cap Y$, $1 \leq i \leq k$, 记 $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_k\}$. 称 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 是空缺子 $GDD(Y, \mathcal{H}, -)$ 的不完全 GDD , 或 $IGDD$, 如果对 X 的每个二元子集 $\{x, y\}$, 只要 $\{x, y\} \not\subset Y$ 且 $\{x, y\} \not\subset G_i (1 \leq i \leq k)$ 时, $\{x, y\}$ 总含于 $\mathcal{A}$ 中恰好一个区组中.

我们说一个 $IGDD(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 空缺若干个不相交的子 $GDD(Y_j, \mathcal{H}_j, -)$, 如果当 $j \neq j'$ 时 $Y_j \cap Y_{j'} = \emptyset$, 并且 $\mathcal{A}$ 中没有一个区组含同一个组中的两个点, 或含任意 Y_j 中的两个点, 但是任意别的点对恰含于 $\mathcal{A}$ 中的一个区组中.

设 $(a_1, \dots, a_k)$ 是 $(X, \mathcal{G}, \mathcal{A})$ 的组大小的向量, 即 $a_i = |G_i|$, $1 \leq i \leq k$, 于是 $(Y, \mathcal{H}, -)$ 的组大小的向量为 k 有序组 $(b_1, \dots, b_k)$, 其中 $b_i = |H_i|$ 且 $H_i \subset G_i$, $1 \leq i \leq k$. 对于一个 $IGDD$ 来说, 如果空缺的子 GDD 的