

微積溯源

微積溯源卷六

英國華里司輯

英國 傅蘭雅 口譯

金匱 華蘅芳 筆述

求虛函數微分式之積分

第一百二十三款 凡微分式內之虛函數若能變之爲實函數者則可依前卷之各法求其積分

如有微分式

$\frac{1}{x^2}$

$(-\frac{1}{x})$

觀此式易知若令

$x = \frac{1}{t}$

則所有根號內

之同數^{三天}代還之即能以有天之各項明其積分

第一百二十四款

茲專論微分式內之有虛函數其形如^{三天} $\sqrt{\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \frac{\text{天}}{\text{丙}}}$ 者此種虛

函數不外乎下兩式一爲

$$\sqrt{\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \frac{\text{天}}{\text{丙}}}$$

一爲

$$\sqrt{\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \frac{\text{天}}{\text{丙}}}$$

其吧爲天之任

何實函數

惟此兩式亦可以一總式包括之。如將其第一式依其根之次數自乘而以未乘之虛函數爲其分母則可變

之爲

$$\frac{\sqrt{\frac{甲}{乙} \frac{天}{丙} \frac{天}{天}}}{吧 \left(\frac{甲}{乙} \frac{天}{丙} \frac{天}{天} \right) 扶}$$

而與第二式爲同類。

其簡式

$$\sqrt{\frac{甲}{乙} \frac{天}{丙} \frac{天}{天}}$$

扶之形有兩種。一其分母內之丙爲正。一其

分母內之丙爲負。

第一百二十五款 茲先論其第一種丙爲正者。

設有微分式

$\sqrt{\frac{\text{甲} \text{乙} \text{天} \text{丙} \text{天}}{\text{地} \text{午}}}$

欲求其積分可令

$\sqrt{\frac{\text{甲} \text{乙} \text{天} \text{丙} \text{天}}{\text{地} \text{午}}} = \text{已} \text{地} \text{午}$

①其已午爲未

定之常數乃將其左右兩邊之數各自乘而變爲無根

號之式如

$\frac{\text{甲} \text{乙} \text{天} \text{丙} \text{天}}{\text{地} \text{午}} = \text{已} \text{地} \text{午}$

若欲令此式之左邊變爲正乘方之式

必將其第一項移至右邊，而兩邊俱以丙乘之，又各以

四乙加之，則變爲

$$\begin{array}{c} \text{四乙} \\ \hline \text{乙丙天} \end{array} \begin{array}{c} \text{丙天} \\ \hline \text{丙巳地} \end{array} = \begin{array}{c} \text{丙巳地} \\ \hline \text{二巳午} \end{array} \begin{array}{c} \text{甲四丙} \\ \hline \text{乙地午} \end{array}$$

再令其右邊之

$$\begin{array}{c} \text{二巳午} \\ \hline \text{甲四丙} \end{array} = \begin{array}{c} \text{二巳午} \\ \hline \end{array}$$

卽

$$\begin{array}{c} \text{四巳午} \\ \hline \end{array} = \frac{\text{四丙}}{\text{四甲丙}} \begin{array}{c} \text{四丙} \\ \hline \text{四甲丙} \end{array} \begin{array}{c} \text{乙} \\ \hline \end{array}$$

如

此則恆可變爲正乘方式。

乃將其左右兩邊各開

$$\begin{array}{c} \text{四乙} \\ \hline \text{乙丙天} \end{array} \begin{array}{c} \text{丙天} \\ \hline \text{丙巳地} \end{array} = \begin{array}{c} \text{丙巳地} \\ \hline \text{二巳午} \end{array} \begin{array}{c} \text{地午} \\ \hline \end{array}$$

平方得

$$\frac{\frac{2}{\text{乙}}}{\text{丙}} \left[\text{丙天} \right] = \sqrt{\frac{\text{丙}}{\text{地}}} \left[\text{地午} \right]$$

③將此式求微分得

$$\sqrt{\frac{\text{丙}}{\text{地}}} \text{天} = \frac{\text{地}}{\text{地}} \left[\text{地午} \right] = \frac{\text{地}}{\text{地}} \left[\text{甲乙天丙天} \right]$$

從此式又可得

$$\frac{\frac{2}{\text{丙}}}{\text{乙}} \left[\text{天丙} \right] \sqrt{\frac{\text{丙}}{\text{地}}} \left[\text{甲乙天丙天} \right] = \frac{2}{\text{地}} \left[\text{地} \right]$$

③乃將丙約②式以與①式相加得

配其對

$$\frac{\sqrt{\frac{\text{甲乙天丙天}}{\text{天}}}}{\text{天}} = \frac{\sqrt{\frac{\text{丙地}}{\text{地}}}}{\text{地}}$$

數卽得

$$\text{訥} \left[\frac{\text{丙}}{\text{乙}} \right] \text{天} \text{丙} \left[\frac{\text{甲}}{\text{乙}} \text{天} \right] \text{丙} \text{天} = \text{訥}(\text{地}) \text{訥}(\text{巳})$$

④惟因

$$\text{訥}(\text{地}) = \text{禾} \frac{\text{地}}{\text{地}} \text{訥}$$

其訥爲任何常數故可令之

爲

$$\text{訥} = \text{訥}(\text{巳})$$

其訥又爲他常數所以

$$\text{訥}(\text{地}) \text{訥}(\text{巳}) = \text{禾} \frac{\text{地}}{\text{地}} \text{訥}$$

將此式與③④兩式

丙乙天丙甲乙天丙天

二兩 甲乙天 丙天 兩

訥(二兩)而已。

茲論其第二種丙爲負者

如有微分式

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

欲求其積分

則可令其式中之分

母

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

①其已爲未定之常數

斗爲變角則

依前款之

法變之得

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

此式之左邊已爲正乘方若欲變其右

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

邊亦爲正乘方可令

$$\frac{丙}{乙} = \frac{四}{七} \frac{甲}{丙}$$

卽

$$\frac{丙}{乙} = \frac{二}{四} \frac{甲}{丙}$$

③由此得

$$\frac{四}{七} \frac{丙}{乙} = \frac{丙}{乙} \frac{丙}{甲} \frac{丙}{乙}$$

兩邊

各開平方得

$$\frac{三}{乙} \frac{丙}{天} = \sqrt{\frac{丙}{乙}} \frac{餘弦斗}{天}$$

③求其微分而以兩約之得

$$\frac{矢}{天} = \frac{丙}{乙} \frac{正弦斗}{天} = \frac{丙}{乙} \frac{天}{天}$$

所

$$\text{餘弦斗} = \frac{\frac{\text{得}}{\frac{\text{三兩}}{\text{乙二兩天}}}}{\frac{\sqrt{\frac{\text{四甲丙}}{\text{乙二兩天}}}}{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}} = \frac{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}{\frac{\sqrt{\frac{\text{四甲丙}}{\text{乙二兩天}}}}{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}}$$

所以其積分之式或爲

以
求其積分得

$$\frac{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}{\frac{\sqrt{\frac{\text{四甲丙}}{\text{乙二兩天}}}}{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}} = \frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}} \text{常數}$$

如欲求其斗則從③③兩式

$$\frac{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}{\frac{\sqrt{\frac{\text{四甲丙}}{\text{乙二兩天}}}}{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}} = \frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}} \text{餘弦}$$

或爲

$$\frac{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}{\frac{\sqrt{\frac{\text{四甲丙}}{\text{乙二兩天}}}}{\frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}}}} = \frac{\text{兩}}{\text{乙二兩天}} \text{正弦}$$

此兩式

因其餘弦之角亥與正弦之角亥其較恆爲正角所以其較角爲常數而兩角之積分不出乎此兩式之外

第一百二十七款

如有微分式

$\frac{甲}{乙} \frac{天}{天} \frac{丙}{天}$

天^卯沃

欲求其積分

因其卯爲任何整數故可令

沃 $\frac{甲}{乙} \frac{天}{天} \frac{丙}{天}$

而

地 $\frac{天}{天} \frac{寅}{天} \frac{甲}{乙} \frac{天}{天} \frac{丙}{天} \frac{天}{天} \frac{寅}{天}$ 沃

則

地 $\frac{天}{天} \frac{甲}{天} \frac{寅}{天} \frac{乙}{天} \frac{天}{天} \frac{丙}{天} \frac{天}{天} \frac{寅}{天}$

將此式

求其微分得

$$\text{二地微} = \left[\text{二寅甲天} \overset{\text{二寅}}{\text{下}} \left(\text{二寅} \right) \text{乙天} \overset{\text{二寅}}{\text{上}} \left(\text{二寅} \right) \text{丙天} \overset{\text{二寅}}{\text{上}} \right] \text{伏}$$

以
地—天^寅天^寅
約之得

$$\text{二微} = \text{二寅甲} \frac{\text{天^寅天^寅伏}}{\text{天^寅天^寅伏}} \left(\text{二寅} \right) \text{乙} \frac{\text{天^寅天^寅伏}}{\text{天^寅天^寅伏}} \left(\text{二寅} \right) \text{丙} \frac{\text{天^寅天^寅伏}}{\text{天^寅天^寅伏}}$$

乃令

$$\text{寅} \text{—} \text{卯}$$

則

$$\text{寅} \text{—} \text{卯}$$

$$\text{寅} \text{—} \text{卯}$$

二寅——二卯

二寅——二卯

二寅——二卯

由此得

二德 = (二卯) 甲 $\frac{\text{天}}{\text{卯}} \frac{\text{天}}{\text{德}}$ (二卯) 乙 $\frac{\text{天}}{\text{卯}} \frac{\text{天}}{\text{德}}$ 二卯 丙 $\frac{\text{天}}{\text{卯}} \frac{\text{天}}{\text{德}}$

依法序其各項得

$\frac{\text{天}}{\text{卯}} \frac{\text{天}}{\text{德}}$ = $\frac{\text{卯}}{\text{德}}$ 二卯 丙 $\frac{\text{天}}{\text{卯}} \frac{\text{天}}{\text{德}}$ 二卯 乙 $\frac{\text{天}}{\text{卯}} \frac{\text{天}}{\text{德}}$ 二卯 甲 $\frac{\text{天}}{\text{卯}} \frac{\text{天}}{\text{德}}$

所以可

將此式求其積分。而以地與天所代之數仍還之則可

得

$$\frac{\text{甲} \times \text{乙} \times \text{天} \times \text{丙} \times \text{天}}{\text{天} \times \text{天}}$$

$$\frac{\text{卯} \times \text{丙} \times \text{天} \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{天} \times \text{丙} \times \text{天}}{\text{天} \times \text{天}} \times \frac{\text{卯} \times \text{丙} \times \text{天} \times \text{甲} \times \text{乙} \times \text{天} \times \text{丙} \times \text{天}}{\text{天} \times \text{天}}$$

則此式之積分今以實函數並同類之他