高等学校教学参考用书

高等数学辅导与应试训练

（上册）

刘裔宏　刘碧玉
秦宣云　谢贵良　编著

- 内容综述
- 考点与疑难问答
- 题型归纳与解题技巧
- 单元模拟测练

中南大学出版社

高等数学辅导与应试训练

·上册·

刘裔宏　刘碧玉
秦宣云　谢贵良　编著

中南大学出版社

2000年·长沙

高等数学辅导与应试训练

·下册·

刘裔宏　刘碧玉
秦宣云　谢贵良　编著

中 南 大 学 出 版 社

2000 年·长沙

高等数学辅导与应试训练(上册)

刘裔宏　刘碧玉　秦宣云　谢贯良　编著

□责任编辑　陈灿华

□出版发行　中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路　邮编:410083

发行科电话:0731-8876770　传真:0731-8829482

电子邮件:csucbs @ public. cs. hn. cn

□经　　销　湖南省新华书店

□印　　装　中南工业大学出版社印刷厂

□开本　787×1092 1/16 开　□印张　22.75　□字数　557 千字

□版次　2000 年 11 月第 1 版　□2000 年 11 月第 1 次印刷

□印数　0001-4500

□书号　ISBN 7-81061-212-3/O·013

□全套定价　55.00 元

□本册定价　26.00 元

图书出现印装问题,请与经销商调换

内容提要

为了满足读者学习高等数学的需要，我们编写了一套高等数学辅导与应试训练参考书。本书为下册，共12章，内容涉及线性代数与空间几何、多元微积分学、概率论与数理统计。每章采用与教材体系相结合的方式，其中每一单元分为内容综述、考点与疑难问答、题型归纳与解题技巧及单元模拟测练4个部分，以启迪读者的思维，培养读者的分析、判断、推理与计算能力，以及综合运用知识的应试能力。

本书结构新颖，条理清楚，内容丰富，重点突出，可作为各类高等院校低年级大学生配合高等数学课程教材学习的参考书，也可供教师和其他有关人员参考。

高等数学辅导与应试训练(下册)

刘裔宏　刘碧玉
秦宣云　谢贵良　编著

□责任编辑　盛　光
□出版发行　中南大学出版社
社址：长沙市麓山南路　邮编：410083
发行科电话：0731－8876770　传真：0731－8829482
电子邮件：csucbs @ public. cs. hn. cn
□经　　销　湖南省新华书店
□印　　装　中南工业大学出版社印刷厂

□开本　787×1092 1/16　□印张　29.5　□字数　753千字
□版次　2001年1月第1版　□2001年1月第1次印刷
□印数　0001－4200
□书号　ISBN 7－81061－212－3/O·013
□全套定价　55.00元
□本册定价　29.00元

图书出现印装问题，请与经销商调换

内容提要

为了满足读者学习高等数学的需要，我们编写了一套高等数学辅导与应试训练参考书。本书为上册，内容包括函数及其图形、极限与连续、导数与微分、微分中值定理的导数应用、不定积分、定积分、常微分方程与差分方程、无穷级数共 8 章。每章采用与教材体系相结合的方式，其中每一单元分为内容综述、考点与疑难问答、题型归纳与解题技巧及单元模拟测练 4 个部分，以启迪读者的思维，培养读者的分析、判断、推理与计算能力，以及综合运用知识的应试能力。

本书结构新颖，条理清楚，内容丰富，重点突出，可作为各类高等院校低年级大学生配合高等数学课程教材学习的参考书，也可供教师和其他有关人员参考。

前 言

现行大学高等数学教材的内容，多已突破原有课程的界限，将微积分、空间几何、线性代数、概率论与数理统计的内容有机结合，相互渗透，进行工科数学教学一体化的改革和实践。但一般教材言简意赅，不可能对内容与方法详细解释；近年流行的有关大量习题解答参考书虽提出了具体的方法与技巧，但缺乏对概念、重点与难点的阐述，缺乏对题型、解题方法与技巧的归纳总结，缺乏对综合分析与应试解题能力的足够培养和训练。我们结合多年来理工科数学教学的实践编写此书，试图抛砖引玉，补前者之不足，以适应不同读者的需要。

本书对教材内容先进行概括与分析，并加以适当指点，然后就重点与难点进行疑难问答，提高读者思维能力；进而提供题型归纳与示范例题，为读者运用所学知识独立解题架设一座桥梁；最后给出模拟测试与训练题，以提高读者的综合解题能力和实际应用能力。

按照培养跨世纪人才数学素质的基本要求，本书从大量的高等数学习题和试题中，精选出极具启发性、典型性和针对性的题目，包括问答题、典型例题、测练习题，并附有解答、分析提示或答案。选题尽量避免与一般教材雷同，且难易适度，力求紧扣教学大纲规定，不超出数学考研大纲的要求。本书内容在编排上与中南大学《高等数学教程》的内容同步，因此适于与其配合相当的教材使用，便于读者学习和掌握。

本书为上册，共 8 章。其中，第 1,2 章由刘裔宏编写；第 3,4,7 章由刘碧玉编写；第 5,6 章由谢贵良编写；第 8 章由秦宣云编写。全书由刘裔宏统稿审定。

本书可供各层次低年级大学生（工科院校本、专科、电大、函大及高等教育自学考生）学习《高等数学》时使用，也可以作为准备报考硕士研究生的高年级学生的参考复习资料。

限于我们的学识和业务水平，书中缺点和错误在所难免，敬请读者指正。

编著者

2000 年 9 月

目 录

目 录

第 9 章
矩阵与行列式

第 1 单元　矩阵及其运算

一、内容综述

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排列成 m 行 n 列，并加以圆括弧的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

就是 $m \times n$ 矩阵．记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$. 有时也记为

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \quad 或 \quad \boldsymbol{A} = (a_{ij})$$

其中 a_{ij} 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素．

当 $m=n$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为方阵或 n 阶方阵或 n 阶矩阵．一阶方阵在书写时不加括号，在运算中可看作一个数．一般主要论及实矩阵，即元素都是实数的矩阵，除非另有说明．

1. 几类特殊矩阵

(1) 零矩阵

$m \times n$ 个元素全为零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或简记作 $\boldsymbol{O}$.

(2) 单位矩阵

主对角元素全为 1，其余元素全为零的 n 阶矩阵称为 n 阶单位矩阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$(或 $\boldsymbol{I}_n$)，简记为 $\boldsymbol{E}$(或 $\boldsymbol{I}$).

(3) 数量矩阵

主对角元素全为非零常数 k，其余元素全为零的 n 阶矩阵，称为 n 阶数量矩阵，记作 $k\boldsymbol{E}_n$ 或 $k\boldsymbol{E}$.

(4) 对角阵

非主对角元素都为零的 n 阶矩阵称为 n 阶对角阵．主对角元素依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的 n 阶对角阵记作ding$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(5) 上(下)三角矩阵

n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中,当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0(j=1,2,\cdots,n-1)$ 的矩阵称为上三角矩阵;当 $i<j$ 时 $a_{ij}=0(j=2,3,\cdots,n)$ 的矩阵称为下三角矩阵.

2. 矩阵的基本运算

(1) 矩阵相等

矩阵作为数表,两个完全一样的数表才看作是相等的.也就是说,如果两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 的行数和列数分别相等,且所有对应元素也相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称 A 和 B 相等,记作 $A=B$.

(2) 矩阵相加

若 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 矩阵,则称矩阵$(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为 A 与 B 之和,记作 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

矩阵相加的运算法则有 4 条,为

1° 交换律: $A+B=B+A$;

2° 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3° 零矩阵满足 $A+O=A$;

4° 存在矩阵$(-A)$满足 $A+(-A)=O$,此时若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,则 $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$,并称$(-A)$为 A 的负矩阵.

(3) 矩阵相减

若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$,则定义矩阵 A 与 B 之差为 $A-B=A+(-B)$.

由上述运算法则可得移项法则:

若 $A+B=C$,则 $A=C-B$.

证
$$\begin{aligned}C-B&=C+(-B)=(A+B)+(-B)\\&=A+(B+(-B))=A+O=A\end{aligned}$$

以上运算法则说明了矩阵相加、减的运算类似于初等代数中数相加、减的运算法则.矩阵相加减是容易掌握的,只要注意矩阵间是否可以相加减(即是否为同型矩阵)就可以了.

(4) 数乘矩阵

k 是任一数,$A=(a_{ij})_{m\times n}$,定义 $kA=(ka_{ij})_{m\times n}$,并称这个矩阵为 k 与 A 的数量乘积.

数乘矩阵的运算法则也有 4 条,为

1° $1\cdot A=A$;

2° $(kl)A=k(lA)$;

3° $(k+l)A=kA+lA$;

4° $k(A+B)=kA+kB$.

其中 k,l 等表示数,A,B 等表示同型矩阵.

请读者注意以下几点:

1° 矩阵相加满足 4 条运算法则,数乘矩阵也满足 4 条运算法则,我们将看到,这 8 条法则使得实数域上的全体 $m\times n$ 矩阵的集合构成所谓向量空间.

2° 数 k 乘一个矩阵 A,需要把数 k 乘矩阵 A 的每一个元素,这一点不要与以后行列式的类似运算相混淆.

3° 若 $kA=0$,则 $k=0$,或 $A=O$,或 $k=0$ 且 $A=O$. 换言之,若 kA 是零矩阵,则数 k 为 0、

矩阵 A 为零矩阵两者中至少有一个成立．

(5) 矩阵相乘

若 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$B=(b_{ij})_{s\times n}$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，则 A 与 B 之积 $AB=C=(c_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，且

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

$$1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$$

矩阵相乘的运算法则有下列 3 条：

1° 结合律：$(AB)C=A(BC)$；

2° 数乘结合律：$k(AB)=(kA)B=A(kB)$，其中 k 是数；

3° 左分配律：$A(B+C)=AB+AC$；

右分配律：$(B+C)A=BA+CA$.

读者要注意以下几点：

1° 矩阵乘法不满足交换律，也就是说 $AB=BA$ 不一定成立．当 $AB\neq BA$ 时，我们称 AB 不可交换；当 $AB=BA$ 时，我们称 AB 可交换．

2° 矩阵乘法也不满足消去律，即一般情况下，当 $AB=AC$ 时，不能消去 A 而得到 $B=C$. 从而可看到矩阵相乘还有一个奇特的现象：A 与 B 皆非零矩阵，而可能 A 与 B 之积 $AB=O$，这时我们称 B 是 A 的右零因子，A 是 B 的左零因子．

3° 显然有 $E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$，$A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$，当 A 是 n 阶方阵时，有 $E_nA_{n\times n}=A_{n\times n}E_n=A_{n\times n}$. 这就是说，单位矩阵在矩阵乘法中的作用相当于数 1 在数的乘法中的作用．必须注意：$3A-AB=A(3-B)$ 是错误的，正确的写法应是 $3A-AB=A(3E-B)$；同样，$ABC-AC=A(B-1)C$ 是错误的，正确的写法应是 $ABC-AC=A(B-E)C$.

4° 只有方阵才能自乘．若 A 是 n 阶方阵，则定义 $A^2=A\cdot A$，$A^{k+1}=A^k\cdot A$（k 是正整数）. A^k 称为 A 的 k 次幂．

(6) 矩阵的转置

把一个 $m\times n$ 矩阵 A 的行列互换得到一个 $n\times m$ 矩阵，称为 A 的转置．矩阵 A 的转置矩阵记作 A' 或 A^{T}.

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，若记 $A'=(a'_{ji})_{n\times m}$，则

$$a'_{ji}=a_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

矩阵的转置运算满足以下运算法则：

1° $(A')'=A$；

2° $(A+B)'=A'+B'$；

3° $(kA)'=kA'$（k 是任一数）；

4° $(AB)'=B'A'$，$(A_1A_2\cdots A_k)'=A'_kA'_{k-1}\cdots A'_1$，$(A^k)'=(A')^k$（$k$ 是正整数）.

设 A 是一个 n 阶方阵，若 $A=A'$，则称 A 为对称矩阵；若 $A=-A'$，则称 A 为反对称矩阵．须注意的是，反对称矩阵 A 的所有主对角元素 a_{ii} 都为零．

(7) 矩阵的共轭

设 a_{ij} 为复数，把复数矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的所有元素 a_{ij} 换成其共轭复数 $\overline{a_{ij}}$ 后所得到的矩阵 $(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$ 称为 A 的共轭矩阵，记作 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$.

共轭矩阵的运算法则有：

$$\bar{\bar{A}} = A;\qquad \overline{(kA)} = \bar{k}\ \bar{A}(k\text{ 为复数});$$
$$\overline{(A+B)} = \bar{A} + \bar{B};\qquad \overline{(AB)} = \bar{A}\ \bar{B};$$
$$(\bar{A})' = \overline{(A')};\qquad \overline{(AB)'} = \overline{(B')}\ \overline{(A')}.$$

二、考点与疑难问答

本单元考点的内容有：矩阵的定义；特殊矩阵（单位矩阵、对角阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵）及矩阵的运算（加减、数乘、乘法、转置与方阵的幂）. 对初学者来说，要特别重视矩阵乘法的定义和矩阵相等的定义，这是本单元的难点和重点.

问题 1 已知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

试问下列符号是否有意义？

(1) $A+B$； (2) AB； (3) BA； (4) BC.

答 (1) $A+B$ 无意义. 因为 A,B 两矩阵的列数不等，所以 A,B 不能相加.

(2) AB 有意义. 因为 A 为两列矩阵，B 为两行矩阵，A 的列数等于 B 的行数，故 AB 有意义.

(3) BA 无意义. 因为 B 为 3 列矩阵，而 A 只有 2 行.

(4) BC 有意义. 因为 B 有 3 列，C 有 3 行.

由此可见，两个矩阵相乘的条件是，左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数. 而且矩阵乘法不具有交换律.

问题 2 设 n 阶矩阵 A,B 均不为零，则 A 与 B 之积一定不为零，对吗？

答 不对. 如设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

有 $A \neq O, B \neq O$，但 $AB = O$. 因此，虽然矩阵 A,B 均不为零，但 A 与 B 之积不一定不为零. 换言之，仅由 $AB = O$ 推导 A,B 两矩阵中至少有一个为 O 是错误的.

问题 3 设 A,B,C 为同阶方阵. 问：如果有 $B \neq C$，是否必有 $AB \neq AC$？

答 不一定. 若令

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$$

则显然 $B \neq C$，而

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -5 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & -32 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

有 $AB = AC$. 换句话说，仅由 $AB = AC$ 就推出 $B = C$ 是错误的.

问题 4 对任意矩阵 A，问

(1) AA',$A'A$ 都有意义吗?

(2) $AA' = A'A$ 一定成立吗?

答 (1) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵,则 A' 是 $n \times m$ 矩阵,故 AA' 有意义,$A'A$ 也有意义. 而且由

$$(AA')' = (A')'A' = AA'$$

知 AA' 是对称矩阵;同样可知 $A'A$ 也是对称矩阵.

(2) 不一定. 请看下例:设 $A = (1 \quad 2 \quad 3)'$,则

$$AA' = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

是一个 3 阶方阵,而 $A'A = (1 \quad 2 \quad 3)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 14$ 是一个 1 阶方阵.

所以,读者解题时,首先要看清楚究竟是求 AA' 还是求 $A'A$.

问题 5 设 A 是一个 n 阶对称矩阵,B 是一个 n 阶反对称矩阵. 问 A^k,B^k 是否为对称矩阵或为反对称矩阵?

答 A^k 仍是对称矩阵;B^k 当 k 为偶数时为对称矩阵,k 为奇数时为反对称矩阵(读者自己证明).

三、题型归纳与解题技巧

1. 涉及矩阵运算律及矩阵性质的命题

例 9.1 选择题

(1) 设 A,B,C 是 n 阶方阵,且 $AB = BC = CA = E$,则 $A^2 + B^2 + C^2$ 必等于(　　).

(a) E;　(b) $2E$;　(c) $3E$;　(d) O.

(2) 设 A,B,C 均为 n 阶方阵,且 $AB = BA$,$AC = CA$,则 ABC 等于(　　).

(a) ACB;　(b) CBA;　(c) BCA;　(d) CAB.

(3) 设 A 为 n 阶对称矩阵,B 为 n 阶反对称矩阵,则下列矩阵中为反对称矩阵的是(　　).

(a) $AB + BA$;　(b) $AB - BA$;　(c) $(AB)^2$;　(d) BAB.

(4) 设 A,B 为 n 阶方阵,k 为正整数. 若 $AB = BA$,则称 A,B 可交换. 下列结论中不正确的是(　　).

(a) 若 A,B 可交换,则 $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;

(b) 若 A,B 可交换,则 AB^k 和 BA^k 可交换;

(c) 若 $A - B$ 和 $A + B$ 可交换,则 A 与 B 可交换;

(d) 若 AB 和 BA 可交换,则 A 与 B 可交换.

解 (1) $E = (AB)(CA) = A(BC)A = A^2$,同理可得 $E = B^2$,$E = C^2$,故 $A^2 + B^2 + C^2 = 3E$,应选(c).

(2) $ABC = (BA)C = B(AC) = BCA$,故应选(c).

(3) 因 $(AB + BA)' = B'A' + A'B' = - BA - AB = - (AB + BA)$,故应选(a).

(4) 若 A,B 可交换，则 $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$，故(a) 正确．

若 A,B 可交换，显然 A^k 与 B^k 也可交换，于是 $(AB^k)(BA^k)=(AB)(B^kA^k)=(BA)(A^kB^k)=(BA^k)(AB^k)$，故(b) 正确．

由 $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$，$(A-B)(A+B)=A^2+AB-BA-B^2$ 知，$A+B$ 和 $A-B$ 可交换的充要条件是 $-AB+BA=AB-BA$，即 $AB=BA$，故(c) 正确．

从而(d) 不正确，应选(d)．事实上，例如令

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

由

$$AB=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix},BA=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

知 $AB\neq BA$，即 A 与 B 不可交换，但

$$(AB)(BA)=(BA)(AB)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

故(d) 不正确．

注意　解单项选择题(即 4 选 1) 的方法很多，本例采用直接计算法．这种方法是根据已知的定义、定理、公式和法则等直接计算，并与提供的结论相对照，从而作出正确的判断．

例 9.2　设 A 为任意矩阵．证明：$AA'\neq O$ 的充要条件是 $A\neq O$.

分析　若 $A=O$，显然 $AA'=O$.

充分条件：只需设 A 的各元素为字母，计算出 AA'，再和零矩阵比较，看看 AA' 的元素是否不全为 0.

证　必要条件显然成立．现证充分条件，即证当 $A\neq O$ 时，$AA'\neq O$.

因为 $A\neq O$，所以 A 中有非零元素．设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，其中某个元素 $a_{ij}\neq 0$. 再设 $B=AA'$，且 $B=(b_{ij})_{m\times m}$，则

$$b_{ii}=a_{i1}^2+\cdots+a_{ij}^2+\cdots+a_{in}^2\neq 0$$

证得 $B\neq O$，即 $AA'\neq O$.

注意　可进一步证明 $r(AA')=r(A)$.

例 9.3　设 $A=E-XX'$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，X 是 $n\times 1$ 非零矩阵．证明：$A^2=A$ 的充要条件是 $X'X=1$.

证　因为

$$A=E-XX'$$

$$\begin{aligned}A^2&=(E-XX')^2=(E-XX')(E-XX')\\&=E-2XX'+(XX')(XX')=E-2XX'+X(X'X)X'\\&=E-(2-X'X)XX'\end{aligned}$$

因为 $X\neq O$，故 $XX'\neq O$，$A^2=A$ 的充要条件是 $2-X'X=1$，即 $X'X=1$.

注意　证明本题应特别注意 XX' 与 $X'X$ 的区别．XX' 是一个 n 阶方阵，而 $X'X$ 却是一个数值．

例 9.4　证明：任何一个 n 阶方阵均可表示为一个对称矩阵与一个反对称矩阵之和．

分析　设 A 为任一 n 阶方阵，$A=B+C$，其中 B 为对称矩阵，C 为反对称矩阵，于是有

$$A' = (B + C)' = B' + C' = B - C$$

由

$$\begin{cases} A = B + C \\ A' = B - C \end{cases}$$

得

$$B = \frac{A + A'}{2}, \qquad C = \frac{A - A'}{2}$$

显然有

$$B' = (\frac{A + A'}{2})' = \frac{A + A'}{2} = B$$

$$C' = (\frac{A - A'}{2})' = \frac{A' - A}{2} = -C$$

证 令 $B = (A + A')/2, C = (A - A')/2$，则 B 为对称矩阵，C 为反对称矩阵．又显然有 $A = B + C$，故命题得证．

注意 本题与微积分中证明任何一个函数可表示成一个偶函数与一个奇函数之和的构造法类似．

2. 涉及矩阵乘法和方阵的幂的算题

例 9.5 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵 B.

分析 要求出这样的 B，只需把 B 的元素先用字母表示出来，按条件进行乘法运算，比较对应元素即可．

解 设 $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$，由 $AB = BA$ 可得

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

故所求 $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$，其中 a_1, a_2, a_3 为任意实数．

例 9.6 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

计算 $(A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2)$.

分析 对一个矩阵表示式进行计算，一般都要先化简，然后再计算．

解 首先化简．

$$\begin{aligned} (A + B)^2 - (A^2 + 2AB + B^2) &= (A + B)(A + B) - (A^2 + 2AB + B^2) \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 - A^2 - 2AB - B^2 \\ &= BA - AB \end{aligned}$$