實用統計數學

上冊

駱風和編

商務印書館

前　言

這一本書原是爲北京財經學校編的課本。由正、負數溫習起，解決了統計上一些數學問題。一般要學統計的人，無論過去基礎如何，都可以用它作爲學習數學（爲統計作基礎的數學）的工具；這是因爲學習它只需要很少的平面幾何知識，甚至於沒有學過代數都可以。

在編輯時，我注意到兩個問題：第一要適合於學者的程度；第二要達到所要學習的目的。因爲如果不適合於學者的程度，就會學不好，甚至於學不會。達不到所要學習的目的，就成了不合實際的書本知識。

無論學習什麼，基礎上弄不清楚，就會影響到以後的學習。根據我們三年來的經驗，就決定了由正、負數溫習起。按邏輯的方法有步驟的向前進行。

財經學校無論那一科，都需要有關於統計的簡單數學知識。包括：

記號Σ的用法　座標的平移　尺度的變換

直線配合（平均法和最小二乘法）　比例和變　開方

對數　簡單二次函數圖形　二項定理　或然率

級數　不等式和平均數

同時統計科還要學習較深的數學知識，包括：

自然對數　函數變化　差誤

曲線配合　或然率曲線　機率表值求法

想達到一般的目的，就必須包括三角、代數、解析幾何的廣泛知識。達到統計科的特殊目的，更要包括微積分。其中或然率曲線部份還超出了普通初等微積分範圍之外。這些知識用每一週四小時在短短的二年當中學完，是有相當困難的。因此在編輯的時候，就切實注意到需要學習

的一定學完,不需要學的絕對删去。這樣可以避免浪費時間和精力。更仔細研究了學習這些知識需要什麼基礎。把這些應學的知識和它們的基礎混合到一起,再加以邏輯化。這是本書所採取的組成方式。上册作財經學校各科一年級用,下册專供統計科二年級用。

因爲授課時間關係,注重了實用方面,有些理論就不能不加以精簡,以致有些地方在理論上可能不十分嚴密,所以它是和純數學不同的。這是本書命名爲「實用統計數學」的由來。

在編輯方面:每一個單元主觀上都是遵循「由簡單到複雜,由具體到抽象,由個別到一般,然後再推出定理與法則」的原則而組織的。不使用先說定理,再去解釋的打悶棍子的方法。但是有些地方作的還不夠。關於複雜的定理,是分成幾部去講,使在學習時比較容易接受。

許多地方都是教研小組經過講授後提出意見改編的。由於時間的限制,還有好些地方沒有討論過。今後請求讀者多提供意見,以便修改、訂正、補充,使它漸漸減少錯誤,趨於合理化。

在製圖方面,是財經學校管士楨、歐陽展及人民大學數學教研室李鴻江三同志代辦的,謹誌謝忱!

編者　一九五二年十月三十日

上 册 目 錄

下 册 目 錄

實用統計數學

第十三章　不等式和平均數

§1　不等式和它的基本觀念　兩式、兩數或一式和一數用記號連起來,表示它們不相等的,叫**不等式**。表示不相等的記號用「≒」。記號的兩邊叫**邊**或**端**。端分**左端**和**右端**,也和方程一樣。不等式裏有些更清楚的表示左端大於右端是用記號「>」,左端小於右端是用「<」。

例如:$4 \neq 2$,$4>2$,$-3<2$ 都是不等式。

兩個以上的不等式都是左邊大於右邊,或都是左邊小於右邊,那麼這些不等式,就叫作**同向**;否則就叫**反向**。

例如:$a>b$,$c>d$,$e>f$ 叫同向不等式。

$a>b$,$c<d$ 叫反向不等式。

關於不等式最基本的觀念,有:

(1)凡正數都大於0,負數都小於0,所以

如果 a 是正數,那麼 $a>0$;如果 a 是負數,那麼 $a<0$。

(2)大數減小數得正,小數減大數得負,所以

如果 $a-b>0$,那麼 $a>b$;如果 $a-b<0$,那麼 $a<b$。

§2　不等式的基本定理　如果 a 大於 b,b 大於 c,那麼 a 就更大於 c。所以我們得到:

定理:如果 $a>b$,$b>c$,那麼 a 就大於 c;用式表示就是:

$$\text{如果 } a>b,\ b>c,\ \text{那麼 } a>c。$$

這也可以用式去證明:

因爲 $a>b,\ b>c,$

所以 $a-b>0,\ b-c>0$。

因之

$$a-c=a-b+b-c=(a-b)+(b-c)>0。$$

也就是 $a>c$。

§3 不等式的加減定理和移項 關於不等式的加、減有兩個定理，是:

(1)因爲大數加大數比小數加小數大。所以我們得到:

定理1: 兩個以上的同向不等式相加，還是不等式，它的向不變；用式表示，就是:

如果 $\boldsymbol{a>b,\ c>d,\ e>f,\cdots}$，那麼 $\boldsymbol{a+c+e+\cdots>b+d+f+\cdots}$。

用式證明:

因爲 $a>b,\ c>d,\ e>f,$

所以 $(a+c+e)-(b+d+f)=(a-b)+(c-d)+(e-f)>0$。

因之 $a+c+e>b+d+f$。

(2)因爲兩個不同的數，加或減一個相同的數，大的還大，小的還小。所以我們得到:

定理2: 一個不等式加、減相同的量後，它的向不變；用式表示，就是:

如果 $\boldsymbol{a>b}$，那麼 $\boldsymbol{a\pm c>b\pm c}$。

用式證明:

因爲 $a>b$，所以 $a-b>0$。

因之 $(a\pm c)-(b\pm c)=a\pm c-b\mp c=a-b>0,$

也就是 $a\pm c>b\pm c$。

根據這個定理,如果有不等式:

$$a+b>c+d。$$

兩邊減 c, 得 $$a+b-c>d,$$

兩邊減 d, 得 $$a+b-c-d>0。$$

由上面的事實我們很明白的看出,任何一項由不等號的一端移到它一端,就要變號,和方程式的移項完全一樣,我們叫它作**移項**。這必須很好的記住,以便應用。

§4 關於不等式的乘除法定理 關於不等式有下列乘除法定理:

(1)如果 $a>b$, 那麼 $8a>8b$。同理如果 n 是任何正數,那麼,$na>nb$。用正數除就等於用正分數乘。所以我們得到:

定理 1: 不等式的兩邊用任何正數乘或除,還是不等式,它的向不變;用式表示,就是:

$$\text{如果 } \boldsymbol{a>b},\ \boldsymbol{n>0},\ \text{那麼 } \boldsymbol{na>nb} \text{ 和 } \boldsymbol{\frac{a}{n}>\frac{b}{n}}。$$

用式證明:

因為 $$a>b,\ n>0,$$

所以 $$na-nb=n(a-b)=(+)(+)>0,$$

因之 $$na>nb。$$

又 $$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{1}{n}(a-b)=(+)(+)>0,$$

所以 $$\frac{a}{n}>\frac{b}{n}。$$

(2)在正數裏,大數乘大數之積一定比小數乘小數之積大。所以我們得到:

定理 2: 幾個正數同向不等式兩端各自相乘,兩端所得之積還成為不等式,它的向不變;用式表示,就是:

如果 $\boldsymbol{a, b, c, d, e}$ 和 $\boldsymbol{f}$ 都大於 0，並且 $\boldsymbol{a>b, c>d, e>f}$，

那麼
$$\boldsymbol{ace>bdf}。$$

用式證明：

因爲 a, b, c, d, e 和 f 都大於 0，並且 $a>b,\ c>d,\ e>f$，

那麼
$$\begin{aligned} ace-bdf &= (ace-bce)+(bce-dbe)+(dbe-bdf) \\ &= ce(a-b)+be(c-d)+db(e-f) \\ &= (+)(+)+(+)(+)+(+)(+)=(+)>0。\end{aligned}$$

所以
$$ace>bdf。$$

（3）在正數裏面，同一個數用大數除得的數比用小數除得的數小；所以我們得到：

定理 3： 在正數裏，用不等式的兩端去除同一數，得一不等式，和原不等式的向相反；用式表示就是：

$$\text{如果 } \boldsymbol{b>c,\ a>0,\ b>0,\ c>0}；\text{那麼 } \boldsymbol{\frac{a}{b}<\frac{a}{c}}。$$

用式證明：

因爲 a, b, c 都 >0，並且 $b>c$，

因之
$$\frac{a}{b}-\frac{a}{c}=a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=a\left(\frac{c-b}{bc}\right)=(+)(-)=(-)<0。$$

所以
$$\frac{a}{b}-\frac{a}{c}<0,\ \text{或}\ \frac{a}{b}<\frac{a}{c}。$$

（4）如果 a, b, c, d 都是正數，並且

$$\frac{a}{b}>\frac{c}{d},$$

兩邊用 bd 乘，得
$$ad>bc,$$

但
$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}=\frac{(-)}{(+)}=(-)<0。$$

所以
$$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}<0,\ 或\ \frac{b}{a}<\frac{d}{c}。$$

因此我們得到：

定理 4： 正數不等式的倒數還是不等式，它和原不等式的向相反；用式表示就是：

$$如果\ \frac{a}{b}\ 和\ \frac{c}{d}\ 都大於\ 0，並且\ \frac{a}{b}>\frac{c}{d}，那麼\ \frac{b}{a}<\frac{d}{c}。$$

習　題 I

1．負數中絕對值大的數和絕對值小的數那一個大？

2．如果 $a>b$，證明 $k-a<k-b$。

3．如果 $a>b$，$c<d$，$b-d>k$，問 $a-d$，$b-c$ 和 k 的大小。

4．分數的分母增大，或分子減小它的值起什麼作用？分子，分母同加一數或同減一數，它的值有什麼變化？

§5 關於不等式乘方開方定理 關於不等式的乘方，開方定理，是：

（1）如果有 n 個完全一樣的正數不等式，如：

$$a>b,\ a>b,\ a>b,\cdots,$$

那麼由上節定理 2，把它們的兩端分別連乘，就可以求得 $a^n>b^n$；所以我們得到：

定理 1： 正數不等式的兩端各 n 次方（n 是正整數）還是不等式，它的向不變；用式表示就是：

$$如果\ a>0,\ b>0,\ n>0,\ a>b，那麼\ a^n>b^n。$$

（2）如果有正數不等式，如：

$$a>b,$$

a、b 各開 n 次方，得 $\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$。$\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 的主根只有三種關係的可能，就是：

$$\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},$$
$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b},$$

和 $$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}。$$

如果 $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$，那麽根據定理 1，得

$$(\sqrt[n]{a})^n<(\sqrt[n]{b^n})^n,$$

也就是 $$a<b。$$

這和原來的假設不合，所以 $\sqrt[n]{a}\nless\sqrt[n]{b}$。

如果 $$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b},$$

那麽 $$(\sqrt[n]{a})^n=(\sqrt[n]{b})^n,$$

也就是 $$a=b。$$

這也和原來的假設不合，所以 $a\neq b$。

這三種可能裏，兩種都不可以，所以只有第三種可能成立。

因之 $$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}。$$

因此我們得到：

定理 2：把正數不等式的兩端各開 n 次方（n 是正整數），它的主根也是不等式，原來的向不變。用式表示，就是：

如果 $\boldsymbol{a>0, b>0, n>0, a>b}$，那麽 $\boldsymbol{\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}}$（$\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 代表 a，b 開 n 次方的主根）。

§6 不等式的種類 不等式有兩種，一種是其中的文字用任何實數代入，不等式關係都能成立的，叫**絕對不等式**。

例如：$x^2+1>0$。x 用任何値代入這種不等關係都能成立。所以是絕對不等式。

另外一種是式內的文字之値必須在某種範圍內，不等關係才能成立的，叫**條件不等式**。這種不等式我們不去研究。

§7 絕對不等式的證明 證明絕對不等式的是否眞實，方法很多。因爲不等式的情形不同，方法也就不一樣。現在舉幾個例來說明一些方法。

例 1：假設 a、b 都大於 0，試證明 $\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$。

因為 $$\frac{1}{2}(a+b)-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(a-2\sqrt{ab}+b)$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0。$$

所以 $$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}。$$

例 2：證明：$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)>(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$。

因為 $(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$

$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2$

$=(+)+(+)+(+)=+>0$。

所以 $(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2>0$

或 $(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)>(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$。

上面的兩個例子是將各項移到不等號的一邊再把這一邊的式子變成若干個同號的平方和，就可以決定它的正負，以便證明它的不等關係能成立。最基本的不等式，都是用這個方法去證明，我們叫它作**順證法**。

例 3：證明 $(a+b)^2>4ab$。

先假設 $(a+b)^2>4ab$ 能成立，

左端展開得 $$a^2+2ab+b^2>4ab,$$

兩端減 $4ab$，得 $$a^2-2ab+b^2>0。$$

化簡，得 $$(a-b)^2>0。$$

最後一個不等式能成立。同時它是由上一個不等式變來的，所以上一個不等式能成立。這樣依次向上推，就可以推到第一個式能成立。這種方法叫**逆證法**。

例 4：如果 a, b, c 表示不相等的實數，求證：

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc。$$

因爲 $(a-b)^2>0$。

展開,得 $a^2-2ab+b^2>0$,

兩邊加 $2ab$ $a^2+b^2>2ab$ ……………………(1)

同理 $b^2+c^2>2bc$ ……………………(2)

和 $c^2+a^2>2ac$ ……………………(3)

(1)、(2)、(3)相加,得

$$2a^2+2b^2+2c^2>2ab+2bc+2ac。$$

兩邊用2除,得 $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ac$。

這是由已知的不等式誘導得來的,叫作**誘導法**。

習 題 II

證明下列各絕對不等式:

1. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$。

2. $a^3+b^3>a^2b+ab^2$,設 a、b 爲任何正數。

3. 如果 a、b 是不等正數,試比較 $3ab^2$ 和 a^3+2b^3 的大小。

4. 如果 a、b 是不相等的正數,試比較 $\frac{a+b}{2}$ 和 $\frac{2ab}{a+b}$ 的大小。

5. 證明 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$。

§8 算術平均數 如果有兩個不同年級的人都大考完了,我們去比較他們成績的好壞。因爲他們的各科分數,彼此有好有壞,考試科目的種類和數目又不能完全一樣,因此就不容易分別他們的好壞。所以要把各科分數加到一起,再用科目數去除,得一個平均數,這樣就很容易比較了。這種把數目(不名數或同類名數)加到一起,再用數目的個數去除所得的數,叫做那些數的**算術平均數**。如果 $\bar{x}$ 代表 n 個數的算術平均數,那就是:

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k。$$

§9 幾何平均數 假設有三種物品,甲種價比去年貴1倍,乙種價和去年相等,丙種價比去年賤一半。任何人都能明白這三種物價平均

比去年沒有漲落。

我們先假設去年物價當 100，那麼甲、乙、丙三種物價就各是 200 100 和 50，如果求它的算術平均數，就得

$$\bar{x}=\frac{200+100+50}{3}=117。$$

這表示今年的物價比去年高，是與事實不符。如果把它們連乘起來，開三次方，就得

$$\sqrt[3]{200\times100\times50}=\sqrt[3]{1000000}=100。$$

這表明今年和去年相比，沒有漲落。是和事實相符的。這種把 n 個數（不名數或同類名數）相乘起來，再開 n 次方，叫作這 n 個數的**幾何平均數**。如果用 G 代表 n 個數的幾何平均數，那就是：

$$G=\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots x_n}。$$

§ 10　調和平均數　假設有一個人作了一百雙鞋。前 50 雙是用每月 40 雙的速度作成的，後 50 雙是用每月 30 雙的速度做成的。究竟每月平均能做多少雙？我們先去作下列的分析：

每月作 40 雙，每雙用 $\frac{1}{40}$ 月；每月作 30 雙，每雙用 $\frac{1}{30}$ 月。平均每雙用 $\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{30}\right)\times\frac{1}{2}$ 月。因之平均每月所做的雙數，是：

$$1\div\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{40}+\frac{1}{30}\right)\right]。$$

這個結果是 40 和 30 的倒數的平均數的倒數，我們叫它作**調和平均數**。以後凡是一羣數（不名數或同類名數）的倒數的平均數的倒數，便叫作那一羣數的**調和平均數**。如果用 H 代表 n 個數的調和平均數，那就是：

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}。$$

§ 11　算術平均數和幾何平均數的比較　如果 $a\neq b$，那麼無論 a、b

是任何正值，都可以得出：

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2>0,$$

展開移項得 $a+b>2\sqrt{ab}$。

兩端用 2 除得：$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，因此我們得到：

定理 1：兩數的算術平均數大於它們的幾何平均數；用式表示就是：

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}。$$

由定理 1，得 $\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}$。

和 $\frac{a_3+a_4}{2}>\sqrt{a_3a_4}$。

上兩式相加，得

$$\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}>\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4},$$

兩邊用 2 除，得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_4+a_4}{2}\right)>\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2},$$

化簡，得 $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}>\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}$ ………(1)

但是 $\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}>\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}}$，

化簡，得 $\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}>\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$ ……………(2)

由(1)、(2)得 $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}>\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$。

同理可以推得，如果 m 是 2 的任何次乘冪，可有

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m}{m}>\sqrt[m]{a_1a_2a_3\cdots a_m}。$$