

53566

基本館藏

實用統計數學

上 冊

駱 風 和 編



商 務 印 書 館

前 言

這一本書原是爲北京財經學校編的課本。由正、負數溫習起，解決了統計上一些數學問題。一般要學統計的人，無論過去基礎如何，都可以用它作爲學習數學（爲統計作基礎的數學）的工具；這是因爲學習它只需要很少的平面幾何知識，甚至於沒有學過代數都可以。

在編輯時，我注意到兩個問題：第一要適合於學者的程度；第二要達到所要學習的目的。因爲如果不適合於學者的程度，就會學不好，甚至於學不會。達不到所要學習的目的，就成了不合實際的書本知識。

無論學習什麼，基礎上弄不清楚，就會影響到以後的學習。根據我們三年來的經驗，就決定了由正、負數溫習起。按邏輯的方法有步驟的向前進行。

財經學校無論那一科，都需要有關於統計的簡單數學知識。包括：

記號 Σ 的用法 座標的平移 尺度的變換

直線配合（平均法和最小二乘法） 比例和變 開方

對數 簡單二次函數圖形 二項定理 或然率

級數 不等式和平均數

同時統計科還要學習較深的數學知識，包括：

自然對數 函數變化 差誤

曲線配合 或然率曲線 機率表值求法

想達到一般的目的，就必須包括三角、代數、解析幾何的廣泛知識。達到統計科的特殊目的，更要包括微積分。其中或然率曲線部份還超出了普通初等微積分範圍之外。這些知識用每一週四小時在短短的二年當中學完，是有相當困難的。因此在編輯的時候，就切實注意到需要學習

的一定學完，不需要學的絕對刪去。這樣可以避免浪費時間和精力。更仔細研究了學習這些知識需要什麼基礎。把這些應學的知識和它們的基礎混合到一起，再加以邏輯化。這是本書所採取的組成方式。上冊作財經學校各科一年級用，下冊專供統計科二年級用。

因為授課時間關係，注重了實用方面，有些理論就不能不加以精簡，以致有些地方在理論上可能不十分嚴密，所以它是和純數學不同的。這是本書命名為「實用統計數學」的由來。

在編輯方面：每一個單元主觀上都是遵循「由簡單到複雜，由具體到抽象，由個別到一般，然後再推出定理與法則」的原則而組織的。不使用先說定理，再去解釋的打悶棍子的方法。但是有些地方作的還不夠。關於複雜的定理，是分成幾部去講，使在學習時比較容易接受。

許多地方都是教研小組經過講授後提出意見改編的。由於時間的限制，還有好些地方沒有討論過。今後請求讀者多提供意見，以便修改、訂正、補充，使它漸漸減少錯誤，趨於合理化。

在製圖方面，是財經學校管士楨、歐陽展及人民大學數學教研室李鴻江三同志代辦的，謹誌謝忱！

編者 一九五二年十月三十日

上 册 目 錄

第一章 緒論和正負數計算的複習..... 1

§1 量和數 §2 正負觀念的發生 §3 正負數和零 §4 數列的線段表示法 §5 正負數加法 §6 正負數減法 §7 關於加法的定律 §8 正負數乘法 §9 正負數除法 §10 關於乘法的定律

第二章 整式四則.....10

§1 代數式 §2 項 §3 係數 §4 同類項 §5 式的次數 §6 常數和變數 §7 函數 §8 代數式的值 §9 整式的加減 §10 乘方 §11 乘法指數計算定律 §12 整式乘法 §13 分離係數乘法 §14 除法指數計算定律 §15 單項式除多項式 §16 除法意義的推廣和多項式相除

第三章 一次方程.....25

§1 等式和它的分類 §2 等式公理 §3 移項 §4 方程的根 §5 方程按未知數個數分類 §6 方程按次數分類 §7 同解方程和同解變化 §8 同解變化定理 §9 一元一次方程的解法 §10 一元一次方程應用問題 §11 二元一次方程 §12 聯立方程 §13 關於聯立方程的定理 §14 解二元一次聯立方程第一法——加減消元法 §15 解二元一次聯立方程第二法——代入消元法 §16 解二元一次聯立方程第三法——等值消元法 §17 相因方程和矛盾方程 §18 多元聯立方程 §19 聯立方程應用問題

第四章 座標及直線和方程的關係.....47

§1 直線上一點位置的決定 §2 方向線上兩點間線段的長 §3 平面上一點位置的決定 §4 斜角 §5 斜率 §6 斜率和斜角的關係 §7 兩點連線的斜率和座標的關係 §8 方程的圖形 §9 二元一次方程的圖形 §10 直線方程圖形的畫法 §11 一次聯立、矛盾和相因方程的圖形 §12 直線的方程 §13 斜率截部式 §14 兩垂直線的斜率關係 §15 定點斜率式 §16 兩點式 §17 座標的變換 §18 座標軸的平移 §19 尺度變換

第五章 因式分解及最高公因式和最低公倍式.....75

§1 因式 §2 析出各項公有因式 §3 集項析因式 §4 利用兩項和或差的平方析因式 §5 利用兩平方差析因式 §6 x^2+ax+b 因式的分析 §7 ax^2+bx+c 因式的分析 §8 最高公因式 §9 求 H. O. F. 法 §10 最低公倍式 §11 求 L. C. M. 法

第六章 分式和極限.....84

§1 分式 §2 關於分式變化原則 §3 約分 §4 通分 §5 分式的加減 §6 分式乘法 §7 分式除法 §8 繁分式 §9 極限 §10 無限大 §11 無窮小 §12 關於極限的定理 §13 函數的極限 §14 幾個特別極限值 §15 有 $\frac{\infty}{\infty}$ 形式的式

第七章 根式和開方.....96

§1 四則運算和分數的認識 §2 乘方開方運算和無理數的認識 §3 負數和複數的認識 §4 乘方和開方 §5 根數和根式 §6 完全乘方式的開方 §7 完全平方之類項式的方根 §8 多項式的平方根 §9 數的平方根 §10 求數的平方根簡略算法 §11 根式計算定理 §12 根式和根式的化簡

第八章 對稱式和總和簡記法..... 110

§1 同型項 §2 一切同型項的求法 §3 一切同型項之和的簡單表示法 §4 總和簡單表示法 §5 對稱式 §6 一切同型項之和與對稱式 §7 關於對稱式的定理

第九章 一元二次方程及直線配合..... 119

§1 一元二次方程 §2 析因式法 §3 公式法 §4 根的性質 §5 分式方程和解法 §6 極大值和極小值 §7 二次函數的極大值或極小值 §8 兩個一次式相乘的正負 §9 方程的討論 §10 方程討論第一步 §11 方程討論第二步 §12 方程討論第三步 §13 方程討論第四步 §14 方程討論第五步 §15 對稱 §16 方程討論第六步 §17 圖形畫法 §18 增量 §19 直線關係的規律 §20 配合直線到調查材料 §21 配合直線到調查材料第一法 §22 配合直線到調查材料第二法

第十章 比及比例和變..... 153

§1 比 §2 關於比的注意點 §3 比例 §4 關於比例的定理 §5 正變 §6 反變 §7 共變

第十一章 指數和對數..... 164

§1 指數計算公式 §2 零指數 §3 負指數 §4 分指數 §5 指數計算公式應用的擴張 §6 對數 §7 對數性質 §8 對數計算定理 §9 常用對數和記法 §10 定位部和定值部 §11 定位部定理 §12 定值部定理 §13 對數表和用法 §14 對數的一個規律 §15 插入法 §16 比例部份表 §17 餘對數和它的求法 §18 對數的計算 §19 換底

第十二章 級數..... 188

§1 級數 §2 等差級數 §3 等差級數的公項 §4 等差級數的總和 §5 等差中項 §6 等比級數 §7 等比級數的公項 §8 等比級數的總和 §9 等比中項 §10 升級數和降級數 §11 無窮降等比級數 §12 調和級數 §13 調和中項

附錄 四位常用對數表

下 冊 目 錄

第十三章 不等式和平均數..... 203

§1 不等式和它的基本觀念 §2 不等式的基本定理 §3 不等式的加減定理和移項 §4 關於不等式的乘除法定理 §5 關於不等式的乘方開方定理 §6 不等式的種類 §7 絕對不等式的證明 §8 算術平均數 §9 幾何平均數 §10 調和平均數 §11 算術平均數和幾何平均數的比較 §12 幾何平均數和調和平均數的比較

第十四章 排列組合..... 216

§1 預備定理 §2 預備定理的推廣 §3 排列和它的記法 §4 n 個事物取 r 個的排列 §5 n 個物全取的排列 §6 P_r^n 的別種公式 §7 關於排列的問題 §8 允許重複的排列 §9 不完全不同的 n 個事物的排列 §10 組合和它的記法 §11 n 個事物每次取 r 個的組合 §12 關於組合的定理 §13 組合總數 §14 C_r^n 的最大值 §15 允許重複的組合

第十五章 二項定理和自然對數..... 231

§1 多項式乘積的構成 §2 多項式乘積的項數 §3 兩項和的一次因式之積 §4 兩項差的一次因式之積 §5 二項定理 §6 公項 §7 二項式任意指數的展開 §8 指數級數 §9 對數級數 §10 自然對數和它的求法 §11 常用對數造表法

第十六章 或然率..... 245

§1 或然率 §2 成功或然率和失敗或然率 §3 或然率實例 §4 近真出現數和期望值 §5 事件相關的分類 §6 獨立事件定理 §7 依賴事件定理 §8 不並立事件定理 §9 複雜事件或然率實例 §10 單獨事件重複試驗定理 §11 重複試驗實例 §12 經驗或然率

第十七章 簡單函數的導數..... 264

§1 函數中兩變數增量的比 §2 函數的導數 §3 導數和函數增減的關係 §4 導數的別名和別種記號 §5 求導數的通法 §6 割線和切線 §7 導數在幾何上的意義 §8 函數的連續和導數的有無 §9 常數的導數 §10 變數 n 次乘冪的導數 §11 一常數和一函數之積的導數 §12

函數和差的導數 § 13 函數積的導數 § 14 函數任意次乘積的導數	
§ 15 函數商的導數 § 16 隱函數的導數 § 17 函數之函數的導數	
§ 18 高級導數	
第十八章 極大值和極小值	284
§ 1 極大值和極小值 § 2 函數增減的判別 § 3 相對極大值和相對極小值	
§ 4 求極大值和極小值的一般法則 § 5 極大值和極小值的應用問題	
第十九章 微分	295
§ 1 函數增量的近似值 § 2 微分 § 3 微分公式 § 4 利用微分求近似值	
§ 5 直接測量的差誤 § 6 差誤的傳播 § 7 相關差誤	
第二十章 積分	305
§ 1 積分 § 2 積分的符號 § 3 一個重要的積分公式 § 4 關於積分的兩個基本定理	
§ 5 代換積分法 § 6 曲線下面積的微分 § 7 定積分	
§ 8 定積分求法 § 9 變數變換後上下限的變換 § 10 定積分和無限和	
第二十一章 對數和指數的微積分	322
§ 1 e^x 的微積分 § 2 $\log x$ 的導數和 $\frac{1}{x}$ 的積分 § 3 對數微分法	
第二十二章 用積分求面積和體積	327
§ 1 直稜柱 § 2 直圓柱 § 3 旋成體的體積 § 4 空間直角座標	
§ 5 已知一點的座標和畫出的方法 § 6 重積分和體積	
第二十三章 或然率曲線	341
§ 1 或然率和近真出現數 § 2 或然率曲線 § 3 或然率曲線的方程 § 4	
求某範圍內或然率之和 § 5 部份積分法 § 6 機率表值的求法	
第二十四章 曲線配合	354
§ 1 調查材料和經驗方程 § 2 指數函數 $y=ab^x$ § 3 決定 $y=ab^x$ 中常數的方法	
§ 4 乘幂函數 $y=ax^b$ 類型 § 5 二級增量 § 6 拋物線 $y=ax^2+bx+c$	
§ 7 配合 $y=ax^2+bx+c$ 型的曲線到調查材料 § 8 雙曲線 $y=\frac{x}{a+bx}$	
附機率表	372

實用統計數學

第十三章 不等式和平均數

§1 不等式和它的基本觀念 兩式、兩數或一式和一數用記號連起來，表示它們不相等的，叫不等式。表示不相等的記號用「 $\neq$ 」。記號的兩邊叫邊或端。端分左端和右端，也和方程一樣。不等式裏有些更清楚的表示左端大於右端是用記號「 $>$ 」，左端小於右端是用「 $<$ 」。

例如： $4 \neq 2$ ， $4 > 2$ ， $-3 < 2$ 都是不等式。

兩個以上的不等式都是左邊大於右邊，或都是左邊小於右邊，那麼這些不等式，就叫作同向；否則就叫反向。

例如： $a > b$ ， $c > d$ ， $e > f$ 叫同向不等式。

$a > b$ ， $c < d$ 叫反向不等式。

關於不等式最基本的觀念，有：

(1) 凡正數都大於 0，負數都小於 0，所以

如果 a 是正數，那麼 $a > 0$ ；如果 a 是負數，那麼 $a < 0$ 。

(2) 大數減小數得正，小數減大數得負，所以

如果 $a - b > 0$ ，那麼 $a > b$ ；如果 $a - b < 0$ ，那麼 $a < b$ 。

§2 不等式的基本定理 如果 a 大於 b ， b 大於 c ，那麼 a 就更大於 c 。所以我們得到：

定理：如果 $a > b$ ， $b > c$ ，那麼 a 就大於 c ；用式表示就是：

如果 $a > b$ ， $b > c$ ，那麼 $a > c$ 。

這也可以用式去證明：

因爲 $a > b, b > c,$
 所以 $a - b > 0, b - c > 0。$
 因之

$$\begin{aligned} a - c &= a - b + b - c = (a - b) \\ &+ (b - c) > 0。 \end{aligned}$$

也就是 $a > c。$

§3 不等式的加減定理和移項 關於不等式的加、減有兩個定理，是：

(1) 因爲大數加大數比小數加小數大。所以我們得到：

定理 1: 兩個以上的同向不等式相加，還是不等式，它的向不變；用式表示，就是：

如果 $a > b, c > d, e > f, \dots$ ，那麼 $a + c + e + \dots > b + d + f + \dots$ 。

用式證明：

因爲 $a > b, c > d, e > f,$
 所以 $(a + c + e) - (b + d + f) = (a - b) + (c - d) + (e - f) > 0。$
 因之 $a + c + e > b + d + f。$

(2) 因爲兩個不同的數，加或減一個相同的數，大的還大，小的還小。所以我們得到：

定理 2: 一個不等式加、減相同的量後，它的向不變；用式表示，就是：

如果 $a > b$ ，那麼 $a \pm c > b \pm c。$

用式證明：

因爲 $a > b$ ，所以 $a - b > 0。$

因之 $(a \pm c) - (b \pm c) = a \pm c - b \mp c = a - b > 0,$
 也就是 $a \pm c > b \pm c。$

根據這個定理，如果有不等式：

$$a+b>c+d。$$

兩邊減 c ，得

$$a+b-c>d，$$

兩邊減 d ，得

$$a+b-c-d>0。$$

由上面的事實我們很明白的看出，任何一項由不等號的一端移到它一端，就要變號，和方程式的移項完全一樣，我們叫它作移項。這必須很好的記住，以便應用。

§4 關於不等式的乘除法定理 關於不等式有下列乘除法定理：

(1) 如果 $a>b$ ，那麼 $8a>8b$ 。同理如果 n 是任何正數，那麼， $na>nb$ 。用正數除就等於用正分數乘。所以我們得到：

定理 1： 不等式的兩邊用任何正數乘或除，還是不等式，它的向不變；用式表示，就是：

$$\text{如果 } a>b, n>0, \text{ 那麼 } na>nb \text{ 和 } \frac{a}{n}>\frac{b}{n}。$$

用式證明：

因為

$$a>b, n>0,$$

所以

$$na-nb=n(a-b)=(+)(+)>0,$$

因之

$$na>nb。$$

又

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{1}{n}(a-b)=(+)(+)>0,$$

所以

$$\frac{a}{n}>\frac{b}{n}。$$

(2) 在正數裏，大數乘大數之積一定比小數乘小數之積大。所以我們得到：

定理 2： 幾個正數同向不等式兩端各自相乘，兩端所得之積還成爲不等式，它的向不變；用式表示，就是：

如果 a, b, c, d, e 和 f 都大於 0, 並且 $a > b, c > d, e > f$,
那麼 $ace > bdf$.

用式證明:

因為 a, b, c, d, e 和 f 都大於 0, 並且 $a > b, c > d, e > f$,
那麼 $ace - bdf = (ace - bce) + (bce - dbf) + (dbf - bdf)$
 $= ce(a - b) + bc(c - d) + db(e - f)$
 $= (+)(+) + (+)(+) + (+)(+) = (+) > 0$.

所以 $ace > bdf$.

(3) 在正數裏面, 同一個數用大數除得的數比用小數除得的數小;
所以我們得到:

定理 3: 在正數裏, 用不等式的兩端去除同一數, 得一不等式, 和原不等式的向相反; 用式表示就是:

如果 $b > c, a > 0, b > 0, c > 0$; 那麼 $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$.

用式證明:

因為 a, b, c 都 > 0 , 並且 $b > c$,

因之 $\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) = a \left(\frac{c - b}{bc} \right) = (+)(-) = (-) < 0$.

所以 $\frac{a}{b} - \frac{a}{c} < 0$, 或 $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$.

(4) 如果 a, b, c, d 都是正數, 並且

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d},$$

兩邊用 bd 乘, 得 $ad > bc$,

但 $\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{bc - ad}{ac} = \frac{(-)}{(+)} = (-) < 0$.

所以 $\frac{b}{a} - \frac{d}{c} < 0$, 或 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ 。

因此我們得到：

定理 4: 正數不等式的倒數還是不等式，它和原不等式的向相反；
用式表示就是：

如果 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 都大於 0，並且 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ，那麼 $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ 。

習 題 I

1. 負數中絕對值大的數和絕對值小的數那一個大？
2. 如果 $a > b$ ，證明 $k - a < k - b$ 。
3. 如果 $a > b$, $c < d$, $b - d > k$ ，問 $a - d$, $b - c$ 和 k 的大小。
4. 分數的分母增大，或分子減小它的值起什麼作用？分子，分母同加一數或同減一數，它的值有什麼變化？

§5 關於不等式乘方開方定理 關於不等式的乘方，開方定理，是：

(1) 如果有 n 個完全一樣的正數不等式，如：

$$a > b, a > b, a > b, \dots,$$

那麼由上節定理 2，把它們的兩端分別連乘，就可以求得 $a^n > b^n$ ；所以我們得到：

定理 1: 正數不等式的兩端各 n 次方 (n 是正整數) 還是不等式，它的向不變；用式表示就是：

如果 $a > 0$, $b > 0$, $n > 0$, $a > b$ ，那麼 $a^n > b^n$ 。

(2) 如果有正數不等式，如：

$$a > b,$$

a, b 各開 n 次方，得 $\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 。 $\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 的主根只有三種關係的可能，就是：

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b},$$

和 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ 。

如果 $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ ，那麼根據定理 1，得

$$(\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n,$$

也就是 $a < b$ 。

這和原來的假設不合，所以 $\sqrt[n]{a} \nless \sqrt[n]{b}$ 。

如果 $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ ，

那麼 $(\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{b})^n$ ，

也就是 $a = b$ 。

這也和原來的假設不合，所以 $a \neq b$ 。

這三種可能裏，兩種都不可以，所以只有第三種可能成立。

因之 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ 。

因此我們得到：

定理 2： 把正數不等式的兩端各開 n 次方 (n 是正整數)，它的主根也是不等式，原來的向不變。用式表示，就是：

如果 $a > 0, b > 0, n > 0, a > b$ ，那麼 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ ($\sqrt[n]{a}$ 和 $\sqrt[n]{b}$ 代表 a, b 開 n 次方的主根)。

§6 不等式的種類 不等式有兩種，一種是其中的文字用任何實數代入，不等式關係都能成立的，叫絕對不等式。

例如： $x^2 + 1 > 0$ 。 x 用任何值代入這種不等關係都能成立。所以是絕對不等式。

另外一種是式內的文字之值必須在某種範圍內，不等關係才能成立的，叫條件不等式。這種不等式我們不去研究。

§7 絕對不等式的證明 證明絕對不等式的是否真實，方法很多。因為不等式的情形不同，方法也就不一樣。現在舉幾個例來說明一些方法。

例 1: 假設 a, b 都大於 0, 試證明 $\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$ 。

$$\begin{aligned}\text{因爲} \quad \frac{1}{2}(a+b) - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0.\end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}.$$

例 2: 證明: $(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) > (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2$ 。

$$\begin{aligned}\text{因爲} \quad (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \\ = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 \\ = (+) + (+) + (+) = + > 0.\end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 > 0$$

$$\text{或} \quad (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) > (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2.$$

上面的兩個例子是將各項移到不等號的一邊再把這一邊的式子變成若干個同號的平方和, 就可以決定它的正負, 以便證明它的不等關係能成立。最基本的不等式, 都是用這個方法去證明, 我們叫它作順證法。

例 3: 證明 $(a+b)^2 > 4ab$ 。

先假設 $(a+b)^2 > 4ab$ 能成立,

$$\text{左端展開得} \quad a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,$$

$$\text{兩端減 } 4ab, \text{ 得} \quad a^2 - 2ab + b^2 > 0.$$

$$\text{化簡, 得} \quad (a-b)^2 > 0.$$

最後一個不等式能成立。同時它是由上一個不等式變來的, 所以上一個不等式能成立。這樣依次向上推, 就可以推到第一個式能成立。這種方法叫逆證法。

例 4: 如果 a, b, c 表示不相等的實數, 求證:

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + ac + bc.$$

因爲 $(a-b)^2 > 0$ 。
 展開，得 $a^2 - 2ab + b^2 > 0$ ，
 兩邊加 $2ab$ $a^2 + b^2 > 2ab \dots\dots\dots (1)$
 同理 $b^2 + c^2 > 2bc \dots\dots\dots (2)$
 和 $c^2 + a^2 > 2ac \dots\dots\dots (3)$
 (1)、(2)、(3)相加，得

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 > 2ab + 2bc + 2ac。$$

兩邊用 2 除，得 $a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac。$

這是由已知的不等式誘導得來的，叫作誘導法。

習題 II

證明下列各絕對不等式：

1. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$ 。
2. $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$ ，設 a, b 爲任何正數。
3. 如果 a, b 是不等正數，試比較 $3ab^2$ 和 $a^3 + 2b^3$ 的大小。
4. 如果 a, b 是不相等的正數，試比較 $\frac{a+b}{2}$ 和 $\frac{2ab}{a+b}$ 的大小。
5. 證明 $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 > abc(a+b+c)$ 。

§ 8 算術平均數 如果有兩個不同年級的人都大考完了，我們去比較他們成績的好壞。因爲他們的各科分數，彼此有好有壞，考試科目的種類和數目又不能完全一樣，因此就不容易分別他們的好壞。所以要把各科分數加到一起，再用科目數去除，得一個平均數，這樣就很容易比較了。這種把數目（不名數或同類名數）加到一起，再用數目的個數去除所得的數，叫做那些數的**算術平均數**。如果 $\bar{x}$ 代表 n 個數的算術平均數，那就是：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n x_k。$$

§ 9 幾何平均數 假設有三種物品，甲種價比去年貴 1 倍，乙種價和去年相等，丙種價比去年賤一半。任何人都能明白這三種物價平均

比去年沒有漲落。

我們先假設去年物價當 100，那麼甲、乙、丙三種物價就各是 200 100 和 50，如果求它的算術平均數，就得

$$\bar{x} = \frac{200 + 100 + 50}{3} = 117。$$

這表示今年的物價比去年高，是與事實不符。如果把它們連乘起來，開三次方，就得

$$\sqrt[3]{200 \times 100 \times 50} = \sqrt[3]{1000000} = 100。$$

這表明今年和去年相比，沒有漲落。是和事實相符的。這種把 n 個數（不名數或同類名數）相乘起來，再開 n 次方，叫作這 n 個數的幾何平均數。如果用 G 代表 n 個數的幾何平均數，那就是：

$$G = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}。$$

§ 10 調和平均數 假設有一個人作了一百雙鞋。前 50 雙是用每月 40 雙的速度作成的，後 50 雙是用每月 30 雙的速度做成的。究竟每月平均能做多少雙？我們先去作下列的分析：

每月作 40 雙，每雙用 $\frac{1}{40}$ 月；每月作 30 雙，每雙用 $\frac{1}{30}$ 月。平均每雙用 $\left(\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right) \times \frac{1}{2}$ 月。因之平均每月所做的雙數，是：

$$1 \div \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{30} \right) \right]。$$

這個結果是 40 和 30 的倒數的平均數的倒數，我們叫它作調和平均數。以後凡是一羣數（不名數或同類名數）的倒數的平均數的倒數，便叫作那一羣數的調和平均數。如果用 H 代表 n 個數的調和平均數，那就是：

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}。$$

§ 11 算術平均數和幾何平均數的比較 如果 $a \neq b$ ，那麼無論 a, b

是任何正值,都可以得出:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0,$$

展開移項得

$$a + b > 2\sqrt{ab}.$$

兩端用 2 除得: $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, 因此我們得到:

定理 1: 兩數的算術平均數大於它們的幾何平均數;用式表示就是:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

由定理 1, 得

$$\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}.$$

和

$$\frac{a_3 + a_4}{2} > \sqrt{a_3 a_4}.$$

上兩式相加,得

$$\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} > \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4},$$

兩邊用 2 除,得

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2} \right) > \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2},$$

化簡,得

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} > \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \dots \dots \dots (1)$$

但是

$$\frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} > \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}},$$

化簡,得

$$\frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} > \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \dots \dots \dots (2)$$

由(1)、(2)得

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} > \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}.$$

同理可以推得,如果 m 是 2 的任何次乘幂,可有

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m}{m} > \sqrt[m]{a_1 a_2 a_3 \dots a_m}.$$