

THE MACHINE DYNAMICS
SOCIETY
THE CHINESE SOCIETY OF
VIBRATION ENGINEERING

中国振动工程学会
机械动力学学会
第五届学术年会

论文集

东南大学出版社



中国振动工程学会机械动力学学会

第五届学术年会

论文集

1991·合肥

东南大学出版社

中国振动工程学会机械动力学学会

第五届学术年会论文集

论文集

1991

中国振动工程学会机械动力学学会
第五届学术年会论文集

责任编辑 施恩

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号)

南京航空学院飞达印刷厂印刷

开本 787 × 1092 毫米 1/16 印张 20.25 字数 467 千字

1991 年 8 月第 1 版 1991 年 8 月第 1 次印刷

印数: 1-550 册

ISBN 7-81023-504-4

TH · 28 定价: 8.40 元

庆 祝

中国振动工程学会机械动力学学会
(原全国高校机床动力学研究会)

成立 10 周年

(1981~1991)

目 录

I 机械系统建模及动态优化设计

冲击系统的力学模型及其参数识别	张济生 何康渝(1)
阻尼线性系统局部修改法特征方程的研究	孙志坚 王小刚等(8)
复模态情况下双模态空间修改法的应用	陈 循 徐燕中等(15)
NJ131 型汽车驾驶室的试验模态分析研究	申志云 郇 明等(20)
大型挖掘机挖掘阻力的动态建模与仿真研究	丁利东 张惠侨等(26)
摩托车发动机防振支撑的研究	高国生 张祖翰(35)
M131W 磨床内圆磨具主轴部件动、静态特性优化设计	韩立强 姜兴序(42)
考虑动柔度的高速机械系统整机最优平衡	黄 田 曾子平等(51)
超精密金刚石车床的动态参数识别	王义德 于骏一等(57)
气体薄膜阻尼结构的参数优化	黄协清 张平宽等(63)

II 机械系统的动力分析

电动服装剪裁机激振力频率结构的测试与分析	郑治国 郑 文等(69)
电动服装剪裁机的振动分析	郑治国 陶学恒等(75)
具有库仑摩擦的弹性机构动响应分析	邱 扬 刘明治(87)
输液螺旋管振动的有限元分析	倪振华 张 欢(94)
运动弹性动力分析中的动能分析	刘明治 邱 扬(105)
复杂动力方程组的一种新型数值算法	章 正 叶尚辉等(112)
座椅垂直振动传递特性的试验研究	吴国梁(117)
回转力矩虚化临界转速的分析	张益群(122)
平衡型振动送料器振动特性研究	胡道秋(127)
DAPUM 微机用结构动力分析通用程序系统	刘 更(135)
750 边三轮摩托车悬挂系统动态特性分析	王少军 田维贤等(141)
冲击振动成因机理探讨	孙庆鸿(147)

III 机械系统的噪声分析与控制

ANC 技术在齿轮噪声信号测试分析中的应用	张建寿 张 林等(154)
轴流风机的噪声和 FXZ-1 消声器的研究	顾熙棠 张宗茂(160)

切削噪声动力学的试验研究	吴雅 柯石求等(165)
齿轮的误差对啮合冲击的影响	王玉芳 童忠钊(174)
旋转刀轴的空气动力性噪声	傅建伟 姜兴序(180)
低噪声纺织皮结的研制	周苏滩(185)

IV 切削颤振诊断与控制

定常切削过程颤振与时变切削过程颤振	吴雅 梅志坚等(191)
切削颤振孕育过程中振动频率的变化特征	周晓勤 于骏一(199)
外圆纵磨颤振的发生与发展研究	张澄 贺兴书等(205)
一种求机床切削稳定性图的方法	翁泽宇 贺兴书(212)
机床结构动态优化设计方法探讨	唐培远(218)

V 机械系统的动态测试及数据处理

人体承受局部振动的测试与评价	吴国梁(229)
汽轮机叶片动频率、动应力巡回监测系统	康松 黄昊俊等(236)
汽轮机叶片巡回监测计算机数据处理系统	臧朝平 康松(243)
复合材料夹层板动态特性实验	师俊平 肖灿章等(251)
GKS 的图段在动态测试分析中的应用	汪令江(256)
直线运动不均匀度的计算机辅助检测系统	张粹 张宝荣(263)

VI 状态监控与故障诊断

切削系统参数在线识别的理论与方法	成志清 金瑞琪(271)
------------------------	--------------

VII 减振、隔振、振动控制

机床滚动导轨油膜阻尼技术的研究	钱为民 王启义等(280)
磁力控制器在机械振动控制中的应用及发展趋势	张士义 李静伟等(283)
装有 SFDB 的双转子航空发动机的共振转速	和兴锁 杨月茜等(291)
控制梁、薄板振动用调谐阻尼器的设计及优化	张建润 孙庆鸿等(299)
干摩擦阻尼对系统共振的控制	颜肖龙(310)
负刚度特性在振动系统中的应用	颜肖龙(316)

I 机械系统的建模及动态优化设计

冲击系统的动力学模型及其
参数识别

张济生 何康渝

(重庆大学 机械工程一系)

摘要 提出了一种新的包含非线性因素的冲击系统动力学模型,研究了该模型参数的测试与识别的具体方法,经实验验证与理论计算取得了基本满意的结果,为冲击减振器的设计提供更准确的理论模型打下了基础。

关键词 冲击 模型 参数识别

1 引言

研究和揭示冲击过程的物理本质,并给予较准确的描述,是研究设计冲击减振器的重要基础性工作。近几十年来, S.F.Messi 等人在冲击减振器设计理论方面取得了不少进展;其分析计算所用的模型全部建立在经典的质心正碰撞的理论基础上^[1]。但我们注意到,冲击接触过程并非由经典正碰撞的理论所能完全表达。例如,它没有包含明显存在于冲击接触中的非线性特征,未能确定瞬时接触中力的变化规律和实际接触时间等重要的物理因素。生产中应用的冲击减振器的设计,目前仍不得不依靠人们的经验与实验。

关于冲击减振机理的研究,长期以来相当多的文献和著作都比较强调碰撞过程中能量损失的作用。认为碰撞能量损失愈大,则减振效果愈显著。但我们发现这一观点与实际应用有明显矛盾。在[2]中,我们曾分析了冲击减振机理。认为在冲击减振器工作中,冲击体与主系统交换动量也耗散一定能量,但较能全面反映冲击减振本质的应当是冲击力——即冲击体作用于主系统的动反力的大小和相位。冲击对主系统的作用相当于一系列宽带脉冲激励。动反力的幅值、延续时间(脉宽)等将直接影响激励频谱分布。而主系统一般均为多自由度系统。这说明不同的激励频谱对主系统抑制振动的效果也是不相同的。很显然,经典的冲击模型无法考虑上述因素。

我们认为,从理论与实践两个方面研究冲击减振机理并得到满意结果的关键,首先有赖于建立更能充分反映冲击接触过程物理本质的、更精确的动力学模型。本文针对这一问题作了初步工作,提出了以非线性弹簧-阻尼为基础模型型式,并研究了一套识别模型参数的方法。

2 冲击系统动力学模型的建立

为了建立物体在冲击时的力学模型,我们着重分析了图1中的冲击体1与静止的被冲

击表面 2 发生碰撞的过程。

当冲击体以某速度冲击其它物体时 (图 1 (a)、(b)), 在相互接触瞬间, 冲击力、接触部位的变形和系统的能量损失将同时产生。由弹性力学的有关知识可知: 弹性物体的接触应力与静变形可用赫芝公式来描述, 此时, 接触力与变形呈非线性关系。而对于冲击接触过程来说, 据称在足够近似的条件下, 赫芝公式是基本成立的⁽³⁾, 但仍有待于验证。

根据上述分析, 可将冲击体 1 和被冲击体 2 接触部位的物理模型近似为并联的非线性弹簧 $k(x)$ 和非线性阻尼器 $c(x)$, 并全部归算到冲击体的一方, 如图 1 (c) 所示。此动力学模型的运动微分方程式为⁽⁴⁾

$$m\ddot{x} + c(x)\dot{x} + k(x)x = mg$$

(1)

式中: x ——冲击体在冲击碰撞中相对于被冲击表面的位移, 并规定 $t=0$ 时为刚接触的瞬间, 相应 $x=0$;

$c(x)$ ——冲击系统在冲击碰撞中的等效刚度系数。

碰撞过程中, 假定不产生任何塑性变形, 一般说来, $k(x)$ 和 $c(x)$ 可用下式来近似表达其非线性关系:

$$\left. \begin{aligned} k(x) &= k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \\ c(x) &= c_1 + c_2 x + c_3 x^2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中: k_1 、 k_2 、 k_3 和 c_1 、 c_2 、 c_3 为特定的系统, 其数值取决于冲击材料、热处理方式以冲击接触表面形状等。当只取系统的第一项, 即 c_1 、 k_1 时, 则为线性模型。

3 模型参数的识别方法研究

3.1 线性模型参数的识别

对于线性冲击模型, 其运动微分方程如下式:

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x = mg$$

(3)

其运动的初始条件为:

$$t=0 \text{ 时, } x(0)=0, \dot{x}(0)=v_{10}$$

(4)

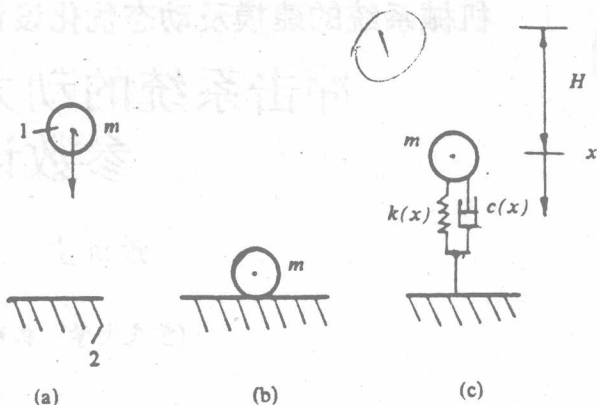


图 1 冲击系统的力学模型

式中: v_{10} ——碰撞前一瞬间冲击体的速度。

根据线性振动理论, 由式 (3) 及初始条件可导出当冲击体与静止的被冲击表面发生碰撞时, 所经历的接触时间 τ 和接触脱离时刻冲击体的速度 $x(\tau)$, 今后用 v_{20} 表示。其表达式可写成[4]:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= (2 \arctg \frac{mg \sqrt{w^2 - n^2}}{k_1 v_{10} - nmg} + \pi) / \sqrt{w^2 - n^2} \\ v_{20} &= -e^{-n\tau} (2nmg / k_1 - v_{10}) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $w^2 = k_1 / m$

$n = c_1 / m$

g ——重力加速度。

由此可见, 若已知 τ 和 v_{20} 的大小, 那么根据上式 (5) 就能求解模型参数 k_1 和 c_1 。因此, 识别该模型参数的关键是如何准确获得 τ 和 v_{20} 的值。

3.2 非线性模型参数的识别

对于非线性模型, 其运动微分方程可写成如下表达式:

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + (k_1 + k_2x + k_3x^2)x = mg \quad (6)$$

在这里为了简化参数识别过程, 仅将刚度系数视为非线性的。

为了便于计算出模型中的参数, 利用如下方法来求解该非线性微分方程式 (6) ⁽⁴⁾。

首先, 将所考察的冲击碰撞经历的时间区间 $[0, \tau]$ 分成 m 等成分, 每一等分点所对应的时刻为

$$t_i = i\Delta\tau \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

其中, $\Delta\tau = \tau / m$ 为等分点间的步长。然后, 将任意两相邻点的时刻 ($t_i = i\Delta\tau$ 和 $t_{i+1} = t_i + \Delta\tau$) 代入式 (6) 中相减, 并用 x_i 和 x_{i+1} 分别表示 $x(t_i)$ 和 $x(t_{i+1})$, 忽略 $\Delta\tau$ 的高阶无穷小量, 简化后可导出如下形式的微分差分方程:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\dot{x}_i &= -c/m\Delta\dot{x}_i - 1/m[k_1 + 2k_2x_i + 3k_3(x_i)^2]\Delta x_i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \approx \dot{x}_i \Delta\tau$

$\Delta\dot{x}_i = \dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i \approx \ddot{x}_i \Delta\tau$

$\Delta\ddot{x}_i = \ddot{x}_{i+1} - \ddot{x}_i$

注意到碰撞前和碰撞后瞬时冲击体的加速度等于重力加速度 g , 则冲击过程前后的运动条件为

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_o &= 0, & x_o &= 0, & \dot{x}_o &= v_{10}, & \ddot{x}_o &= g \\ \dot{x}_m &= \tau, & x_m &= 0, & \dot{x}_m &= v_{20}, & \ddot{x}_m &= g \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由式(7)、(8), 当令 $i=0, 1, \dots, m-1$ 时, 可求出冲击体在该过程的各个时刻 t_i 对应的 x_i , $\dot{x}_i$ 和 $\ddot{x}_i$ 。为了识别出非线性冲击模型的参数, 首先设定冲击系统在冲击时的阻力和刚度参数 c_1 , k_1 , k_2 和 k_3 的初值, 然后利用式(7)来计算冲击体脱离时刻的位移 x_m , 速度 $\dot{x}_m$ 和加速度 $\ddot{x}_m$, 利用单纯形加速法来对所设定的刚度系数和阻尼系数进行优化调整, 直至算出的 $\dot{x}_m$ 和 $\ddot{x}_m$ 恰好等于或以某一给定精度近似等于通过实验测得的脱离速度 v_{20} 和重力加速度 g , 则所假设的 c_1 和 k_1 , k_2 , k_3 值视为实际非线性系统的等效阻力和刚度参数。

4 τ 和 v_{10} , v_{20} 的实测方法

从上一节的分析可知, 冲击系统的力学模型, 无论是线性的, 还是非线性的, 识别它们的刚度参数和阻力参数的关键都是需要事先确定冲击时的接触时间 τ 和碰撞前后的速度 v_{10} 和 v_{20} 。为此, 我们专门设计了如图2所示的一套实验装置来分别测量 τ , v_{10} 和 v_{20} 的大小。

在装置中, 将一根很细的导线1的一端联在冲击体(钢球2)上; 而另一端经电池组3联接到记忆示波器4或数字式频率计5的一输入端; 同时, 将被冲击体6与示波器4或频率计5的另一端也用导线联接起来, 以形成一环路, 横臂8上装有夹子9, 可夹住钢球2, 横臂的高度可沿支架7上下调整并被固定在某一位置以便改变钢球-(冲击体)离开被冲击体6表面的距离 $H_j (j=1, 2, \dots)$ 。

4.1 时间 τ 的测量

用手让夹子9松开, 冲击体从高度 H_j 处自由下落到静止状态的被冲击表面上, 与之发生冲击并反弹脱离冲击表面, 随后, 再次下落发生第二次冲击。

从图2中可看出, 当发生冲击碰撞时, 回路接通, 示波器屏上光点开始扫描; 冲击结束时, 电路断开, 示波器屏上光点扫描停止。这样, 记忆示波器A就将该回路通电时间长短准确地记录下来, 而通电时间就是冲击过程的接触时间 τ 。实验中, 由于所用的钢球质量较大, 经多次重复测量证明, 当它自由下落时, 细导线1(直径 $\phi 0.06 \sim 0.1 \text{mm}$) 不会对测量结果带来明显影响。

4.2 v_{10} , v_{20} 的测量方法

从图2看出, 测量前我们事先用夹子9夹住钢球2, 调节横臂8的高度, 而后, 量出钢球离开被冲击体6上表面的高度 H_j , 则钢球自由下落接触被冲击体表面瞬时的速度 v_{10} , 可以按熟知的自由落体公式计算:

$$v_{10} = \sqrt{2gH_j} \quad (9)$$

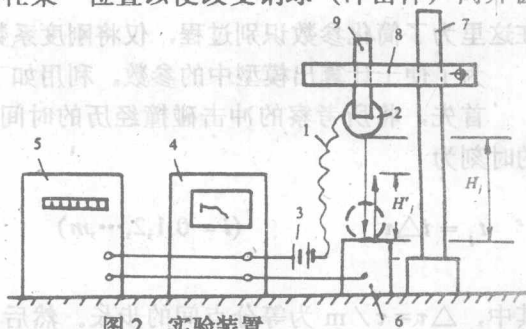


图2 实验装置

关于 v_{20} 的测量, 传统的方法是设法测量钢球 2 回弹的高度 H'_1 (图 2), 则可按下述公式求出:

$$v_{20} = \sqrt{2gH'_1}$$

问题在于钢球回弹到 H'_1 高度只是一瞬间, 精确记录并不容易^[5]。因此本文提出了一种新的简易方法, 即测量钢球一次冲击后弹离被冲击表面 6 至二次落在被冲击表面的时间 T (图 3), 则可以按熟知的上抛公式算出 v_{20} :

$$v_{20} = gT / 2 \quad (10)$$

记录 T 采用了数字频率计 5(图 2), 显然较容易得到精确的结果。

5 τ , v_{10} , v_{20} 实测结果

实验中冲击体和被冲击体

参数如下:

冲击体: 钢球质量 $m = 69\text{g}$, 直径 $\phi 22.5\text{mm}$, 材料 GCr15, 硬度 HRC55~60, 表面粗糙度 R_a 不低于 $0.08\mu\text{m}$;

被冲击体: 圆柱体 $\phi 130 \times 80\text{mm}$, 材料 GCr15, 硬度 HRC 为 55~60, 表面粗糙度 R_a 不低于 $0.32\mu\text{m}$ 。

在 $H_j = 20 \sim 300\text{mm}$ 范围的 29 种不同高度上, 利用图 2 装置, 测量自由落下钢球的 τ 和 T 。针对不同 H_j 的 τ 与 T 值, 在这里分别采用符号 τ_j 和 T_j ($j = 1, 2, \dots, 29$)。而对每一高度又作过 58 次重复试验, 得到 τ_j 的标准差 δ_{τ_j} , 仅为 $0.42 \sim 2.36\mu\text{s}$, T_j 的标准差 δ_{T_j} , 仅为 $1.09 \sim 2.59\text{ms}$ 。数据分散很小, 说明是可信的。根据实测数据, 利用最小二乘曲线拟合法建立了 τ , T 与高度 H 的经验公式:

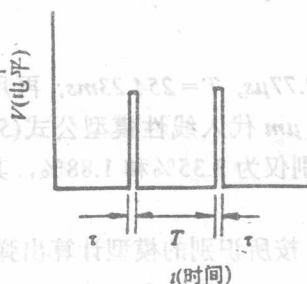


图 3 钢球二次冲击输入仪器的信号

$$\left. \begin{aligned} \tau &= 103.92 - 0.3309H + 1.401 \times 10^{-3}H^2 + 2.1684 \times 10^{-5}H^3 \\ T &= 67.021 + 2.7236H - 8.229 \times 10^{-3}H^2 + 1.194 \times 10^{-5}H^3 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

将以此式作为识别模型参数的基本原始数据。上式中 H 以毫米计, τ 以微秒计, T 以毫秒计。

6 模型参数识别的分析及其结果

按上面第三节所述方法识别模型参数 k_1 , k_2 , k_3 和 c_1 , 归结为解一个优化问题。为此参照式(8)条件可件可设定目标函数如下:

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= |1 - \dot{x}_m / g| \text{ 或 } F_2 = |1 - \dot{x}_m / v_{20}| \\ \text{或 } F &= \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中 $\dot{x}_m$, $\dot{x}_m$ 分别为钢球脱离被冲击体瞬时的计算加速度和速度; α_1 和 α_2 为加权因子; 约束条件为: $k_1 > 0$, $c_1 > 0$ 。当 F_1 , F_2 或 F 趋于最小时, 将可能找出一组最接近实际的模型参数, 问题在于 F_1 , F_2 , F 三个目标函数应当如何选取? 就一般而论, 似乎选用 F 较好, 因为可以兼顾 $\dot{x}_m$ 和 $\dot{x}_m$ 是否分别接近实际值。但经过研究发现, 由于 k_1 , k_2 , k_3 和 c_1 的变化对位移、速度和加速度的影响和变化规律各不相同。在同一运动状态下, F_1 与 F_2 值在数量级上差别较大, 还发现参数 k_1 变化对 F_1 存在多值问题等, 这给多目标综合形式的运用带来困难。为此, 在计算机仿真试验的基础上, 归纳出一套较合理的办法, 主要结论为: 利用单纯形法寻优。首先, 由式 (9)、(11) 确定不同高度 H_j 下的一组 τ , v_{10} 和 v_{20} 值, 作为参数识别的原始数据; 然后, 按 $F_2 \rightarrow F_{2min}$ 计算出足够精度的阻尼参数 c_1 , 而此时刚度 k_1 , k_2 和 k_3 精度不高, 可作为下一步计算的较好的初值。第二步保持第一步得到的阻尼值 c_1 不变, 按 $F_1 \rightarrow F_{1min}$ 来确定较精确的刚度值。

针对第五节之实测例子, 识别出模型的参数如下:

线性模型: $k_1 = 107.07 \text{ N} / \mu\text{m}$, $c_1 = 0.087 \text{ N ms} / \mu\text{m}$

非线性模型: $k_1 = 85.53 \text{ N} / \mu\text{m}$, $k_2 = 0$, $k_3 = 2.04 \times 10^{-2} \text{ N} / \mu\text{m}^3$, $c_1 = 0.162 \text{ N ms} / \mu\text{m}$

7 模型参数识别的初步验证

7.1 线性模型

随意取 $H_j = 100 \text{ mm}$, 实测 $\tau = 82.77 \mu\text{s}$, $T = 254.23 \text{ ms}$; 再用前面识别线性模型的参数 $k_1 = 107.07 \text{ N} / \mu\text{m}$, $c_1 = 0.087 \text{ N ms} / \mu\text{m}$ 代入线性模型公式(5), 算出 $\sigma = 80.0 \mu\text{m}$ 并通过式(10)算出 $T = 259.0 \text{ ms}$, 二者误差分别仅为 3.35% 和 1.88%, 其本是吻合的。

7.2 非线性模型

用冲击体从不同高度 H_j 落下时, 按所识别的模型计算出弹起速度 $\dot{x}_m$ 和实测的弹起速度 v_{20} 作比较, 显然其误差百分比应为 $F_2 = \frac{v_{20} - \dot{x}_m}{v_{20}} \times 100\%$ 。为了比较非线性和线性模

型的识别精度,将结果对比地列入表1。

表1 脱离速度计算值与实测值的比较

H_j / mm		20	40	60	80	100	120	140	160
$F_2 / \%$	线性	24.4	9.6	5.4	-0.5	-0.8	-1.8	-1.1	-0.8
	非线性	1.9	0.73	1.97	0.88	-0.41	-0.79	0.095	0.31
H_j / mm		180	200	220	240	260	280	300	
$F_2 / \%$	线性	-0.6	-0.38	-1.2	0.19	0.53	1.6	2.1	
	非线性	0.28	0.20	0.44	-0.08	-0.19	-0.40	0.4	

由表可以看出,非线性模型在 $H_j = 20 \sim 300 \text{mm}$ 全部范围内,模型计算脱离速度 x_m 与实测速度 v_{20} 的相对误差均不超过 2%,达到十分满意的结果。而线性模型当 $H_j = 20 \sim 60 \text{mm}$ 这一段,则误差也很小,这说明一定条件下采用线性模型也是可以的。

结束语

本文论述了改善现有冲击动力学模型的必要性,并提出了包含非线性弹簧在内的新的力学模型,研究了一套建立在单纯形加速法基础的识别模型参数的方法,取得了基本满意的结果。工作仅仅是初步的,需要进一步完善。我们期望本文能引起同行的兴趣,通过共同努力,为将来冲击减振器的设计提供更精确的理论模型打好基础。

参考文献

- 1 丁文镜. 减振理论. 北京: 清华大学出版社, 1989
- 2 张济生, 何康渝. 关于冲击减振机理的讨论. 机械动力学学会第四届学术年会论文集. 天津大学出版社, 1990
- 3 [苏] B 别里 茨. 冲击加速度测量. 北京: 新时代出版社, 1982
- 4 何康渝. 冲击减振机理及力学模型的探讨. 重庆大学硕士论文, 1985
- 5 屈维德等. 机械加工中的振动问题. 北京: 高等教育出版社, 1959

阻尼线性系统局部修改法

特征方程的研究

孙志坚 王小刚 徐 侠

(太原工业大学机械系)

摘 要 阻尼结构动态特性局部修改法未能得以广泛应用的主要原因在于修改系统的特征方程的求解障碍。针对这一问题, 本文导出了一个形为标准实系数超越方程的修改系统特征方程。解此类型方程的方法很多且算法十分成熟, 不用赋值迭代初值, 从而摆脱了求解现有特征方程的限制, 大大扩展了局部修改法的适用范围。

关键词 阻尼线性系统 局部修改法

1 引言

复模态参数局部结构动力修改思想早在 1969 年就由 Pomzal 发展了 Weissenburger 的特征值修改理论⁽²⁾而提出, 随后于 1971 年 Pomzal 和 Snyder 对复模态局部修改理论进行了较为全面而详尽的论述⁽³⁾, 导出了如下修改后系统的特征方程:

$$1/\alpha + \sum_{k=1}^{2N} U_k^2 / \lambda - \mu_k = 0 \quad (1)$$

式中, λ 为结构物理参数修改量, U_k 为复常数, λ 为修改后系统的特征值, μ_k 为修改前系统的特征值。

文献〔3〕同时指出, 当原始系统的特征值足够分离且对系统所进行的修改量为小量时, 可以找到一个利用 Newton—Raphson 法求解特征方程所需的较好初始值。然而, 采用这样的解法无疑限制了局部修改法的实际使用范围, 而且也丧失了其修改任意的特点。为了使结构参数的修改对整个结构的动态特性产生足够的影响, 所需引入的修改量通常不是小量, 在这种情况下, 一个较好的求解初值几乎是找不到的⁽¹⁾。因此, 复模态局部修改法一直未能得到实际应用。可是, 在工程实际中, 当结构的初态特性不符合要求而需对结构进行修改时, 往往希望这种修改是局部的, 不致引起结构的根本性变动, 有时为了不影响结构的功能, 也必需对修改部位加以限制。因此, 研究局部修改对结构的影响具有重要的工程实际意义, 而其修改系统特征方程的求解是关键性问题之一。

本文导出了与式(1)同解的、形为标准实系数超越方程的修改后系统特征方程。解此

方程的方法很多且无需赋初值,从而将局部修改法向实用方向推进了一步。

2 数学方法

2.1 特征方程的形式

设复数 $\theta = a + bj$, $\gamma = c + dj$, (a, b, c, d 均为实数), x 为任意复数, 观察以下事实:

$$\theta^2 = (a + bj)^2 = (a^2 - b^2) + 2abj$$

$$\theta^{*2} = (a - bj)^2 = (a^2 - b^2) - 2abj$$

于是

$$\theta^2 = (\theta^{*2})^* \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (x - \theta)(x - \theta^*) &= [x - (a + bj)][x - (a - bj)] \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \gamma(x - \theta^*) + \gamma^*(x - \theta) &= (c + dj)[x - (a - bj)] \\ &\quad + (c - dj)[x - (a + bj)] \\ &= 2cx - 2(ac + bd) \end{aligned} \quad (4)$$

式(2)表明, 共扼复数的平方仍为共扼复数, 式(3)、(4)中, x 的各阶系数均为实数。

现考察方程(1), 由于原始系统的特征向量对应于特征值 S_i, S_i^* 是共扼成对的, 即为

$\{\varphi\}_i$ 和 $\{\varphi^*\}_i$, ($i = 1, 2, \dots, m$), 因而对应于方程(1)中 S_i, S_i^* 的复常数 U_K 也共扼成对为 $U_i, U_i^*, \dots$, 故方程(1)可表示为如下形式

$$1/\alpha + \sum_{i=1}^m \left[U_i^2 / (\lambda - S_i) + U_i^{*2} / (\lambda - S_i^*) \right] = 0 \quad (5)$$

通分后为

$$\frac{1}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{U_i^2 (\lambda - S_i^*) + U_i^{*2} (\lambda - S_i)}{(\lambda - S_i)(\lambda - S_i^*)} \right] = 0 \quad (6)$$

成如下形式的方程

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^m \frac{a_{0i}\lambda + a_{1i}}{b_{0i}\lambda^2 + b_{1i}\lambda + b_{2i}} = 0 \quad (7)$$

其中, a_{Ki}, b_{ji} , ($K = 0, 1, j = 0, 1, 2$) 均为实数

如方程(7)通分并整理具有如下形式:

$$\sum_{K=0}^{2m} C_K \lambda^{2m-K} / \sum_{j=0}^{2m} d_j \lambda^{2m-j} = 0 \quad (8)$$

其中, C_K, d_j 均为实数。

解方程(8)即解方程

$$\sum_{K=0}^{2m} C_K \lambda^{2m-K} = 0 \quad (9)$$

以上说明, 方程(1)具有形为实系数超越方程的同解方程。

2.2 乘积 $\prod_{i=1}^n (\lambda - S_i)$ 的展开式

首先引入一个数学概念——组合积之和。

任选元素 $S_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 中的 m 个 (m, n 均为整数, $m < n$)^① 进行组合, 可构成 $C_n^m = n! / m!(n-m)!$ 个组合。将每个组合中的各元素相乘, 再对这 C_n^m 个积求和, 其结果定义为 n 个元素的 m 个组合积之和, 记为 $K_n^m(S_i)$ 。特别地令 $K_n^0(S_i) = 1$ 。

根据组合积之和定义, 知道其有如下基本性质。

性质一

$$K_{n+1}^{n+1}(S_i) = S_{n+1} \cdot K_n^n(S_i) \quad n \text{ 为整数}$$

性质二

$$K_{n+1}^{m+1}(S_i) = S_{n+1} \cdot K_n^m(S_i) + K_n^{m+1}(S_i) \quad m, n \text{ 为整数, } m < n$$

在引入组合积分之和的概念后, 多项式乘积 $\prod_{i=1}^n (\lambda - S_i)$ 的展开式可表达如下:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (\lambda - S_i) &= \begin{cases} K_n^0(S_i) \lambda^n - K_n^1(S_i) \lambda^{n-1} + K_n^2(S_i) \lambda^{n-2} - K_n^3(S_i) \lambda^{n-3} + \dots + K_n^{n-1}(S_i) \lambda - K_n^n(S_i) & n \text{ 为奇数} \\ K_n^0(S_i) \lambda^n - K_n^1(S_i) \lambda^{n-1} + K_n^2(S_i) \lambda^{n-2} - K_n^3(S_i) \lambda^{n-3} + \dots - K_n^{n-1}(S_i) \lambda + K_n^n(S_i) & n \text{ 为偶数} \end{cases} \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i K_n^i(S_i) \lambda^{n-i} \end{aligned} \quad (10)$$

利用组合积分之和的性质, 采用数学归纳法容易证明式(10)的正确性。

当 $n = 1, n = 2$ 时, 式(10)显然成立。假设 $n = r$ (r 为自然数) 时式(10)成立, 即有

$$\prod_{i=1}^r (\lambda - S_i) = \sum_{i=0}^r (-1)^i K_r^i(S_i) \lambda^{r-i}$$

当 $n = r + 1$ 时, 则

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{r+1} (\lambda - S_i) &= \prod_{i=1}^r (\lambda - S_i) \cdot (\lambda - S_{r+1}) \\ &= \left(\sum_{i=0}^r (-1)^i K_r^i(S_i) \lambda^{r-i} \right) (\lambda - S_{r+1}) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i K_r^i(S_i) \lambda^{(r+1)-i} - S_{r+1} \sum_{i=0}^r (-1)^i K_r^i(S_i) \lambda^{r-i} \end{aligned}$$

① 本文中, 整数均指正整数

$$\begin{aligned}
&= K_r^0(S_i) \lambda^{r+1} + \sum_{l=1}^r (-1)^l K_r^l(S_i) \lambda^{(r+1)-l} - S_{r+1} \sum_{l=0}^r (-1)^l K_r^l(S_i) \lambda^{r-l} \\
&= K_r^0(S_i) \lambda^{r+1} + \sum_{l=1}^r (-1)^l K_r^l(S_i) \lambda^{(r+1)-l} - S_{r+1} \sum_{l=1}^{r+1} (-1)^{l-1} K_r^{l-1}(S_i) \lambda^{r-(l-1)} \\
&\quad + S_{r+1} \sum_{l=1}^r (-1)^l K_r^{l-1}(S_i) \lambda^{r+1-l} + S_{r+1} \cdot (-1)^{r+1} \cdot K_r^r(S_i) \\
&= K_r^0(S_i) \lambda^{r+1} + \sum_{l=1}^r (-1)^l \left[K_r^l(S_i) + S_{r+1} \cdot K_r^{(l-1)}(S_i) \right] \\
&\quad + K_{r+1}^{r+1}(S_i) \cdot (-1)^{r+1} \\
&= K_r^0(S_i) \lambda^{r+1} + \sum_{l=1}^r (-1)^l K_{r+1}^l(S_i) \lambda^{(r+1)-l} + (-1)^{r+1} K_{r+1}^{r+1}(S_i) \\
&= \sum_{l=0}^{r+1} (-1)^l K_{r+1}^l(S_i) \lambda^{r+1-l} \\
&= \sum_{l=0}^n (-1)^l K_n^l(S_i) \lambda^{n-l}
\end{aligned}$$

可见, 当 $n=r+1$ 时式(10)也成立。故式(10)对任意整数 n 成立。

2.3 特征方程的确定

2.1 中导出修改系统的特征方程具有实系数超越方程的形式(9)。下面确定方程各项系数 C_K 。

根据式(10), 将方程(1)通分并整理有

$$\frac{\sum_{l=0}^{2m} (-1)^l K_{2m}^l(S_i) \lambda^{2m-l} + \alpha \sum_{l=0}^{2m} \left[U_l \cdot \sum_{i=0}^{2m-1} (-1)^i K_{2m-1}^i(S_i) \lambda^{2m-i} \right]}{\alpha \sum_{l=0}^{2m-1} (-1)^l K_{2m}^l(S_i) \lambda^{2m-l}} = 0 \quad (11)$$

记式(11)中分子多项式为 $f(\lambda)$, 合并入的同次项有

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= K_{2m}^0(S_i) \lambda^{2m} + \left[-K_{2m}^1(S_i) + \alpha \sum_{i=1}^{2m} U_i \cdot K_{2m-1}^0(S_i) \right] \lambda^{2m-1} \\
&\quad + \left\{ K_{2m}^2(S_i) \alpha \sum_{i=1}^{2m} \left[U_i \cdot K_{2m-1}^1(S_i) \right] \right\} \lambda^{2m-2} + \dots \\
&\quad \left\{ -K_{2m}^{2m-1}(S_i) + \alpha \sum_{i=1}^{2m} \left[U_i \cdot K_{2m-1}^{2m-2}(S_i) \right] \right\} \lambda \\
&\quad + K_{2m}^{2m}(S_i) - \alpha \sum_{i=1}^{2m} \left[U_i \cdot K_{2m-1}^{2m-1}(S_i) \right] \\
&= \lambda^{2m} + \sum_{l=1}^{2m} \left\{ (-1)^l \left[K_{2m}^l(S_i) - \alpha \sum_{i=1}^{2m} \left[U_i \cdot K_{2m-1}^{l-1}(S_i) \right] \right] \right\} \lambda^{2m-l} \quad (12)
\end{aligned}$$

比较式(9)和式(12), 可得方程(9)中 λ 的各次项系数为