经济应用数学讲义

线性代数与线性规划

汪
1981.2.26.
大学。

辽宁大学经济系数学教研室编

一九八一年二月

目　录

2

第一章　行列式 (P.1-40)

在中学代数里我们已经学过了含有二个未知量的二元一次方程组，以及含有三个未知量的三元一次方程组。但是对于更多个未知量的方程组如何求解呢？这是我们要研究的问题。

我们首先从中学里学过的用行列式求解线性方程组开始。

第一节　行列式的概念

1　二元~~一次~~方程组与二阶行列式：（在平面上的直线）

线性

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

行　列

其中 b_1，b_2 为常数项。a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 为未知量 x_1 和 x_2 的系数。第一个下标（角码）表示方程所在行的个数。（横写为行）第二个下标表示未知量所在列的个数。（竖写为列）如：a_{21}：第一个下标为2，表示~~第二个方程~~；第二个下标为1，表示未知量 x_1 所在的第一列。

未知量x_1所在的第二行

用消元法求解方程组(1)，首先消去 x_2。

从方程组(1)的第二个方程中解出 x_2 得：

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}x_1}{a_{22}}$$

代入方程组(1)中的第一个方程：

$$a_{11}x_1+a_{12}\cdot\frac{b_2-a_{21}x_1}{a_{22}}=b_1$$

整理后得：

线

$$a_{11}\cdot a_{22}x_1-a_{12}\cdot a_{21}x_1=a_{22}b_1-a_{12}b_2$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

同理消去 x_1 得到：

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

如果当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq0$ 时，我们有：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}}=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{D}$$

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{D}$$

将 x_1 和 x_2 代入方程组(1)中可验证为唯一一组解。

如果我们引进记号：

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{行}} \\ \text{列}\downarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \text{次} & \text{主} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{array} = \underbrace{a_{11}a_{22}}_{\text{主对角线为正}}-\underbrace{a_{12}a_{21}}_{\text{次对角线为负}}$$

由未知量的系数化成

称为二阶行列式。它有二行和二列。而其中 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为元素。特点：①二阶行列式等于两个项的代数和，②第一项是从左上角至右下角线（称主对角线）上元素之积，并取正号；另一项是从右上角至左下角对角线（称次对角线）上元素的积，并取负号。我们应该注意每一项是由不同行、不同列的两个元素组成。根据这个定义显然有：③

2! 2!=1×2=2

第1列系数换成常数列

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=D_1$$

第2列系数换成常数列

$$b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=D_2$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

于是方程组(1)的解，可以写成： 参$_5$P.33、6、

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

例1

求解：$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 3x_1-x_2=-4 \end{cases}$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=-1+\overset{-(-8)}{8}=7$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-4-3=-7$$

$$\therefore\ x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{7}{-7}=-1 \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-7}{-7}=1$$

2　三元一次线性方程组与三阶行列式：（在空间的直线）

三个未知量的线性方程组：

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

仍然用消去法求解。先从前两式消去x_3，后两式消去x_3，得到只含x_1和x_2的二个新方程；再从这二个新方程中消去x_2，就得到：

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1$$
$$=b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-$$
$$-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3$$

当x_1的系数用D表示

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$$

时，我们有：

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}$$
$$-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3)$$

同理，我们可以得到：

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3$$
$$-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31})$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31})$$

当D≠0时，如果方程组(2)有解，就是上边唯一形式。为了便于记忆，

31

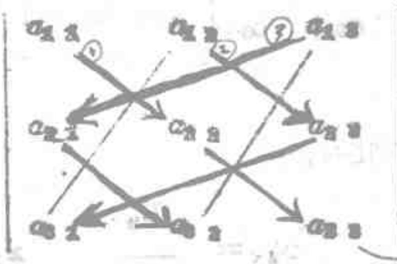
我们引进三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$3! = 1\times2\times3 = 6$

特点：它包含三行、三列，是6项的代数和。我们注意一下每一项，是由三个元素所组成的，而且每一项的三个元素均处在不同行、不同列的位置。至于那一项取正号，那一项取负号，以后我们再研究。

三阶行列写成代数和的形式我们称作展开式。它也有内在的规律性。我们会发现取正号的项用实线表示，取负号的项用虚线表示。



主对角线为正（三阶时）

次对角线为负（三阶时）

注意：四阶，五阶，……n阶，没有主对角线法。每项前正负号的确定依第二行下标是偶排列还是奇排列而定。参P.11、

这样，我们就可以将 x_1，x_2，x_3 中的分母表示为行列式：

由未知量的系数组成、

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

而分子是把D中第1、2、3列元素对应地换成常数项 b_1，b_2，b_3 而构成，于是得到：

把列系数换成常数列.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

第2列系数换成常数列、

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

第3列系数换成常数列

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

因此(2)的解可以简化写成：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

参P.3.33.

例2 解线性方程组：

$$2x - y + z = 0$$

$$3x + 2y - 5z = 1$$

$$x + 3y - 2z = 4$$

解：

我们有：

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -8+5+9-2-6+30 = 28$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0&-1&1\\1&2&-5\\4&3&-2\end{vmatrix}=0+20+3-8-2-0=13$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&1&-5\\1&4&-2\end{vmatrix}=-4+0+12-1-0+40=47$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&-1&0\\3&2&1\\1&3&4\end{vmatrix}=16-1+0-0+12-6=21$$

因此， $x=\dfrac{13}{28}$， $y=\dfrac{47}{28}$， $z=\dfrac{21}{28}=\dfrac{3}{4}$。

有了二阶，三阶行列式以后，当 $D\neq0$ 时，方程组的解就很容易表示出来了。

我们自然会想到，如果有 n 个未知量时，是否也能用行列式的形式来表示方程组的解呢？回答是肯定的。在研究二阶和三阶行列式时，我们虽然发现了它们代数和的每一项是由不同行，不同列所有元素的排列组成。但是符号又如何确定呢？在下面研究 n 阶行列式时，我们逐步来解决。

3 n 阶行列式

我们仍然从三阶行列式来分析：

线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

行的角码是由1，2，3组成。而列的角码也由1，2，3组成。而三个数的不同排列共有3！＝6个。它们是：123，132，213，231，312，321。

如果有n个数码的排列就有n！个

$i_1 i_2 \cdots i_n$

定义1：由n个数码组成的一个有序数组称为一个n级排列。

例如：213，是由三个数码组成的有序数组，称为3级排列。

定义2，在一个n级排列中 i_1，i_2 ……i_n 中如果有较大的数 $i_大$ 排在较小数 $i_小$ 的前边，就说这个排列有一个逆序。（自然数顺序1，2，3，4，5，… 由小到大为顺序）（或逆序数）

例如：213，2比1大排在1的前边，所以有一个逆序。记作：N（213）＝1

又如：21354，这是一个五级排列。

1的前边，有2，所以有一个逆序。 1

2的前边，没有大于2的数，没有逆序。 0 加起来＝2

3的前边，没有大于3的数，没有逆序。 0

4的前边，有一个5，所以有一个逆序。 1

没有比5再大的数了。0 所以这个五级排列，只有二个逆序，记作：

N（21354）＝2。

定义3，逆序数为奇数时称奇排列，逆序数为偶数时称偶排列。逆序数为0时，规定为偶排列。

现在，我们返回来研究一下二阶行列式和三阶行列式各项角码：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

行排列

每一项第一个角码顺序为：1 2，其逆序数 N（1 2）= 0

列排列！

每一项第二个角码顺序为：

第一项：1 2　　其逆序数为 N（1 2）= 0

第二项：2 1　　其逆序数为 N（2 1）= 1

再研究一下三阶行列式：

第一个下标 123（自然数顺序）　123　123

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

第二个下标—123　231　312

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

321　213　132

每一项第一个角码顺序为 1 2 3，其逆序数 N（1 2 3）= 0

（自然数顺序）

每一项第二个角码顺序为：

第一项：1 2 3　其逆序数为：N（1 2 3）= 0　+

第二项：2 3 1　其逆序数为：N（2 3 1）= 2　+

第三项：3 1 2　其逆序数为：N（3 1 2）= 2　+

第四项：3 2 1　其逆序数为：N（3 2 1）= 3　−

第五项：2 1 3　其逆序数为：N（1 3 2）= 1

第六项：1 3 2　其逆序数为：N（2 1 3）= 1

行排列！

列排列！

于是我们发现这样的事实：每一项第一个角码排列的逆序数与第二个角码排列的逆序数之和为偶数时，我们取正号，为奇数时我们取负号。

我们进一步研究一下，在 n 级排列中，按照上面来取符号时，应该有多少项取正号，又有多少项取负号呢？为了回答这一问题，我们仍须

要引进新的概念。

定义4：在一个排 $i_1\ i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$ 中，仅将它的两个数码 i_t 和 i_s 对调，得到一个新的排列：$i_1\ i_2\ \cdots\ i_s i_t \cdots i_n$，这样的对调称一次对换。

定理1：任意一个排列，经过一次对换后，改变奇偶性。

证明：1　如果两个相邻元素对换，即将排列：

$i_1\ i_2\ \cdots\ i_t i_s \cdots i_n$，　i_t 与 i_s 相邻。

将 i_t 和 i_s 对换得到新的排列为：

$i_1\ i_2\ \cdots\ i_s i_t\ \cdots\ i_n$

因为 i_s 和 i_t 对换对其它元素没有影响，如果 $i_t > i_s$ 对换后增加一个逆序数，如果 $i_t < i_s$，对换后减少一个逆序数，所以改变了排列的奇偶性。　　2　在一般情形：(不相邻)

设排列：　$i_1\ i_2\ \cdots\ i_t K_1\ K_2\ \cdots\ K_s i_s \cdots i_n$

如将 i_t 与 i_s 对换，我们仍做相邻对换，将 i_s 与 K_s 对换一次，即为：$i_1\ i_2\ \cdots\ i_t K_1\ K_2\ \ K_{s-1} i_s K_s\ \cdots\ i_n$

继续做相邻对换 i_s 与 K_{s-1}，i_s 与 K_{s-2}，$\cdots$ i_s 与 K_1 对换，一共进行了 S 次对换得到新排列：

$i_1\ i_2\ \cdots\ i_t i_s K_1\ K_2\ \cdots\ K_{s-1}\ \ K_s\ \cdots\cdots i_n$

再将 i_t 与 i_s 对换，共进行了 S + 1 次相邻对换。

于是得到：$i_1\ i_2\ \cdots\ i_s i_t K_1\ K_2 \cdots K_s \cdots i_n$

继续将 i_t 和 $K_1\ K_2 \cdots K_s$ 进行相邻对换共有 S 次得到：

$i_1\ i_2\ \cdots\ i_s K_1\ K_2\ \cdots\ K_s i_t\ \cdots\ i_n$

这样经过 S + 1 + S 次相邻对换后，就完成了 $i_t i_s$ 的对换了。因为 2 S + 1 为奇数，经过奇数次对换后恰好改变了原排列的奇偶

性。

$\boxed{\text{定理2}}$ 所有 n 级排列中（ n ≥ 2 ）奇排列和偶排列各为 $\frac{n!}{2}$ 个。

证明：因为 n 个数构成 n!（1×2×3×4···n）个不同的排列。而且一定是偶数。在 n! 个排列中使得后一个排列总是由前一个排列经过一次对换而得到。因此奇排列与偶排列交错的排列着。又由于 n ≥ 2 时，n!（2×3×4···n）是偶数。所以奇偶排列各占一半。即各为 $\frac{n!}{2}$。

综上所述我们有：

1 ）二阶行列式有 2! 项。三阶行列式有 3! 项。n 阶行列式应该有 n! 项 —— 2的倍数！

2 ）二阶行列式每一项是不同行不同列的元素乘积。三阶行列式每一项也是不同行不同列的元素乘积。n 阶行列式每一项也应该是不同行不同列的元素乘积。

3 ）正号项数与负号项数各半。而且符号是由每一项角码的逆序数的奇偶性决定的。

所以，n × n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum \pm a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n}$$

$p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$，n个数的排列（不同行，不同列）

称 n 阶行列式。它表示 ① n! 项代数和，② 每一项是取自不同行。不同列的 n 个元素乘积。③ 各项的符号是：当第一个下标按 1，2，3 ···n 顺序排列后。如第二个下标是偶排列则取正号；是奇排列则取负号。

因此，只要分析第二个下标就可以决定取号正负了。

于是，行列式：

线

（但一边不为零△）

不一定是两边三角线为零，只要有一边三角线为零，即为三角行列式

凡主对角线有数，一边三角线为零者，叫三角形行列式。

此三角形行列式，等于主对角线之积。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

自然数顺序，0，

自然数顺序，0，

例：证明：

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \text{第}n-1\text{列} \quad \text{第}n\text{列} \\ \begin{vmatrix} 0 & \cdots\cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots\cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & a_3 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \cdots\cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix} \end{array} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

证：第二个行列式中，不为零的项只有一项：$a_1 \ a_2 \cdots a_n$。至于符号的确定我们可以做对换：将第n列经过$n-1$次对换后到第一列，即：

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \text{第}n-1\text{列} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n & \cdots & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

然后，将$n-1$列经过$n-2$对换后变成：

$$\begin{array}{c} \qquad\qquad\qquad \text{第}n-2\text{列} \\ \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & a_n & \cdots\cdots & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

最后，经过$(n-1)(n-2)\cdots 1$次对换后，我们有：

1 2 3 4 5 6
a_6 6 5 4 3 2 1
7 7 7 7 7 7

$(a_1+a_6)\cdot\frac{6}{2}=7\times3=21$ …… 等差级数求和之和

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & a_n \end{vmatrix}$$

所以符号应为：$(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1} = (-1)^{\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)}$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

所以：

次对角线有数，另一侧为零者，也为三角行列式。

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

（此三角形行列式，等于次对角线之积，但其前符号与主对角线之积有别，可为正，或为负。）

第二节： 行列式性质：

行列式的计算一般是比较麻烦的，尤其用上边讲过的定义，有时根本就不能采用。下面我们来研究一下行列式的性质，这会给计算行列式带来很大的方便。

$\boxed{\text{性质1}}$ 假如行列式的某行（列）中（中一），所有各元素同用（乘以）一个数K，~~去乘~~，等于用K去乘这个行列式。
（同乘以数K） 性质6。
行列式增加K倍！

性1例：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10$ 某一行(列)同乘以数2 K

$\begin{vmatrix} 2\times2 & 1\times2 & 2\times2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 = 10\times2$ 2乘这个行列式 K 行列式增加2倍！

即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Ka_{i1} & Ka_{i2} & \cdots & Ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = K \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

就可把常数K提出来！

因为n阶行列式的每一项是所有不同行。不同列的元素之积。

一般项为：

左端 $= \sum \pm a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots Ka_{ip_i} \cdots a_{np_n}$ $= K\sum\pm a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$。$p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 1 2 $\cdots$ n 的所有排列。如果第三行所有元素乘上数K，也就相当于每一项均有数K与之相乘积。这样就可以把常数K提出来。这就证明了性质1。

性质2。假如行列式的某一行(列)中各元素~~可以写成~~是两项和(或差)~~形式~~。则原行列式等于两个行列式的和(或差)。

假如第i行中每个元素可以写成两项和：

$$a_{ij} = b_j + c_j \qquad j = 1\ 2 \cdots n$$