高一年级　第一学期

主　编◎况亦军

特级教师公开课

数学

买图书　送课程

扫书上二维码

看名师讲课

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

高一年级　第一学期·数学

特级教师公开课

主　编◎况亦军

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书以高中数学新课标和高考说明为纲，打破传统教辅书概念，以二维码扫描的方式，为学生提供除传统阅读之外，以“听”课为主要形式的课外学习服务和以“测评”为主要功能的在线练习。本书适合高一年级学生和教师使用。

图书在版编目(CIP)数据

特级教师公开课. 高一年级数学. 第一学期/况亦军主编. —上海：
上海交通大学出版社，2014
ISBN 978-7-313-11578-2

Ⅰ. ①特… Ⅱ. ①况… Ⅲ. ①中学数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 149733 号

特级教师公开课·高一年级数学(第一学期)

主　　编：况亦军
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：常熟市大宏印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：9
字　　数：211 千字
版　　次：2014 年 7 月第 1 版　　印　　次：2014 年 7 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-11578-2/G
定　　价：22.00 元

前　言

《特级教师公开课》是一套在高科技技术支持下的、全新概念的教辅丛书，邀请各重点中学的特级教师进行编写。《特级教师公开课》对教辅图书进行了重新定义，教辅图书不再是仅仅只为学生提供以阅读为主要形式的课外学习服务，也不仅仅是为学生做题提供题目资源。它可以为学生：

(1) 提供以"听"课为主要形式的课外学习服务；

(2) 提供以"测评"为主要功能的在线练习。

学生只要用平板电脑或智能手机扫描《特级教师公开课》系列丛书上的二维码，就可以免费使用与图书配套的教学软件，在软件中"听"老师讲课，以这种最简单，也是效率最高的方式进行课外辅助学习，提高自己的学习成绩。同时，还可以在软件中进行在线测试，了解自己的学习水平和学习能力，帮助自己进行查漏补缺，提高学习效率。

本书按照解题方法和解题类型将高一年级数学第一学期分为4章16个专题。第1章主要包含集合与命题的概念及运算。第2章是不等式的性质和应用。第3章是函数的概念、性质和运算。第4章主要讲解幂函数的图像和性质以及指数函数。每个专题包含"知识要点"、"典型例题"、"基础练习"、"能力提升"四个板块：

知识要点：对本专题中主要概念和规律进行梳理、总结，带领学生温习主要知识点，把握整体概念。

典型例题：精选具有代表性的经典例题，并对例题的解题思路进行详细剖析，使学生对解题的数学思想与方法有本质的认识和提高，引导学生养成规范缜密的解题习惯。例题后的"备注"辅以点评指导，高屋建瓴，提升思想。

基础练习、能力提升：按照从易到难的顺序，配合例题强化学生对解题方法和解题技巧的掌握，可作为教师出题素材。所有练习都配有完整的参考答案。

需要说明的是，学生可通过扫描二维码对"知识要点"和"典型例题"进行更详细的更全面的"听课"。除完成书面的"基础练习"、"能力提升"外，学生还可通过扫描二维码进行进一步的在线自测。

由于时间仓促，书中难免疏漏错误，恳请广大师生不吝赐教，提出宝贵意见，以便完善修改。

编　者

目　录

第 1 章　集 合 和 命 题

1.1　集合及其表示

知识要点

（1）集合的概念：确定对象组成的整体.

（2）元素与集合的关系："属于"与"不属于". 符号"$\in$"与"$\notin$".

（3）常用集合及其记法：自然数集 $\mathbf{N}$，正整数集 $\mathbf{N}^*$，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$.

（4）集合元素的特性：确定性、无序性、互异性.

（5）集合的分类：有限集、无限集、空集 $\varnothing$.

（6）集合的表示方法：列举法、描述法、韦恩图.

典型例题

1. 给出下列说法：

（1）较小的自然数可组成一个集合；

（2）集合 $\{1, \sqrt{3}, -2, \pi\}$ 与 $\{\pi, -2, \sqrt{3}, 1\}$ 是同一集合；

（3）若 $a \in \mathbf{R}$，则 $a \in \mathbf{Q}$；

（4）已知集合 $\{x, y, z\}$ 与集合 $\{1, 2, 3\}$ 为同一集合，则 $x = 1$，$y = 2$，$z = 3$；

（5）$\varnothing$ 与 $\{0\}$ 是同一集合.

正确说法个数为________.

【解析】 此题考察集合概念及其元素性质. 正确说法为(2)，所以个数为 1 个.

2. 用列举法表示出下列集合：

（1）15 的正约数的全体；

（2）$B = \{(x, y) \mid x + 2y = 12, x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}^*\}$；

（3）$C = \left\{m \mid m = \dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|} + \dfrac{|c|}{c} + \dfrac{|abc|}{abc}\right\}$.

【解析】 读懂集合中元素满足的公共属性，从而将其直观化. 特别注意细节.

（1）$\{1, 3, 5, 15\}$.

（2）此集合以描述法给出，要求将其转换到列举法，可以知道元素为点. 不要忽略题中对 x、y 范围说明的差异.

$$B=\{(0,6),(2,5),(4,4),(6,3),(8,2),(10,1)\}$$

(3) 对 a, b, c 的正负分情况讨论,从而实现将绝对值去掉的目的.

$$C=\{4,0,-4\}$$

【备注】 列举法适用于元素个数较少的有限集的表示.

3. 用描述法表示出下列集合

(1) $\{0,2,4,6,8,10\}$;

(2) 不等式 $3x-5<1$ 的解集;

(3) 落在坐标轴上点的集合;

(4) 被 3 除余 1 的正整数的全体.

【解析】 描述法的表达分三步走. 首先辨析元素的属性,分为数集还是点集,用正确的代表元素符号,再写出元素的公共属性. 用数学语言表达,最后大括号勿忘.

(1) $\{x\mid x=2k,0\leqslant k\leqslant 5,k\in\mathbf{N}\}$.

(2) $\{x\mid 3x-5<1,x\in\mathbf{R}\}$ 或 $\{x\mid x<2\}$.

(3) $\{(x,y)\mid xy=0\}$.

(4) $\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{N}\}$ 或 $\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{N}^*\}$.

【备注】 若不加说明,通常认为字母范围为实数. 公共属性表达中一定要正确写出新字母的取值情况.

4. 判断下列集合哪些为同一集合:

$A=\{x\mid y=x^2-2x+1\}$, $B=\{y\mid y=x^2-2x+1\}$, $C=\{(x,y)\mid y=x^2\mid-2x+1\}$, $D=\{m\mid m=n^2-2n+1\}$, $E=\{x\mid x^2+1=0\}$, $F=\{(x,y)\mid x^2+\mid y\mid=-2\}$.

【解析】 由于上述集合均以描述法形式给出,不但要比较公共属性是否一致. 关键是集合元素属性是否相同.

$$B=D,E=F=\varnothing.$$

【备注】 集合表达与字母选取无关. 对于集合能化简则先化简再比较.

5. 已知集合 $A=\{(m+1)^2,m+2,m^2+5m+7\}$. 且 $1\in A$. 求实数 m 的值

【解析】 此题考查两个知识点,一是元素与集合的关系,二是集合元素的性质

(1) 若 $(m+1)^2=1$ 时,$m=0$ 或 $m=-2$, $m=0$ 成立.

(2) 若 $m+2=1$ 时,$m=-1$, $m=-1$ 成立.

(3) 若 $m^2+5m+7=1$ 时,$m=-3$ 或 $m=-2$, $m=-3$ 成立.

综上,$m=0$ 或 $m=-1$ 或 $m=-3$.

【备注】 集合元素的互异性是必不可少的检验条件.

6. 已知集合 $A=\{x\mid ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$. 若 A 中只有一个元素. 求实数 a 的值. 并写出此时集合 A.

【解析】 主要考查对公共属性的正确分析.

(1) $a=0$ 时,$2x+1=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $A=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2) $a\neq 0$ 时,$\Delta=0$,得 $a=1$, $A=\{-1\}$.

综上，$a=0$ 时，$A=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$；$a=1$ 时，$A=\{-1\}$.

【备注】 分类讨论思想是高中极其重要的数学思想方法.

变题：若 A 中至多只有一个元素. 求 a 的值.

基础练习

1. 用"$\in$"或"$\notin$"表示下列元素和集合之间的关系.

(1) 2 ____ $\{x|x$ 是合数$\}$；　　(2) 3 ____ $\{x\mid x$ 是 102 的约数$\}$；

(3) 4 ____ $\{x|x$ 被 5 除余数是 4$\}$；　　(4) 5 ____ $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{4}{3-x}\in\mathbf{Z},\ x\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. (1) 用列举法表示集合 $B=\{y\mid y=x^2-1,\ |x|\leqslant 1,\ x\in\mathbf{Z}\}$，则 $B=$ ____________.

(2) 用列举法表示集合 $C=\{(x,\ y)\mid y=x^2-1,\ |x|\leqslant 1,\ x\in\mathbf{Z}\}$，则 $C=$ ____________.

3. 用描述法表示所有被 3 除余数为 2 的正整数组成的集合是____________.

4. 已知集合 $A=\{2,\ 4,\ 6\}$，若 $a\in A$，$6-a\in A$，则 $a=$ ________.

5. 若集合 $A=\left\{x\mid x=\dfrac{n}{m+1},\ n=m-1,\ m\in\mathbf{N}^*\text{ 且 }m\leqslant 3\right\}$，则 A 中的元素是 ________.

6. 已知下列条件：①充分接近$\sqrt{2}$的实数的全体；②大于 0 且小于 20 的 9 与 12 的公倍数的全体；③实数中不是有理数的所有数的全体；④数轴上到原点的距离为 1 的点的全体. 在上述条件中能确定一个集合的是　　(　　)

(A) ①②③　　(B) ①②④　　(C) ②③④　　(D) ①③④

7. 下列说法正确的是　　(　　)

(A) 小于 100 的质数的全体可以构成一个集合

(B) 若 $a\in\mathbf{N}$，$b\in\mathbf{N}^*$，则 $a+b$ 最小值为 2

(C) 集合$\{4,\ 5\}$和$\{5,\ 4\}$是两个不同的集合

(D) x 轴附近的点可以构成一个集合

8. 设集合 $M=\{x\mid x\leqslant 2\sqrt{3}\}$，$a=\sqrt{11+\sin x}$，其中 $x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，则下列关系中正确的是　　(　　)

(A) $a\subsetneqq M$　　(B) $a\notin M$　　(C) $\{a\}\in M$　　(D) $\{a\}\subsetneqq M$

能力提升

1. 用适当的符号表示下列各集合之间的关系：

若 $M=\{x\mid x=2m-1,\ m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=4n\pm 1,\ n\in\mathbf{Z}\}$，则 M、N 之间的关系是________.

2. 若 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid x=a\sqrt{2}+b,\ a\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{Z}\}$,则 $\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}}$ ________ B.

3. 写出抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的顶点的集合.

4. 设 $z=3^x-2^y,\ 0\leqslant x\leqslant y<4$,且 $x,\ y\in\mathbf{Z}$.

(1) 写出由 z 的一切可能的值构成的集合 A;

(2) 对 $k\in\mathbf{R}$,再设 $(k^2+1)\in A$,求 k.

5. 已知 $f(x)=ax^2+b$,其中 a、b、x 均为实数,且 $A=\{x\mid f(x)=x\}$,$B=\{x\mid f[f(x)]=x\}$.

(1) 求证:$A\subseteq B$;

(2) 当 $A\neq B$,并且 A、B 均不为空集时,求 a^2+b^2 的取值范围.

6. $\{1,\ 2\}\in\{\{1,\ 2\},\ \{3,\ 4\}\}$,这种表示方法是否正确?

7. 设 $a,\ b\in\mathbf{Z}$,且 $a<b$. 当 $a,\ b\in A=\{x\mid 0<2x-5<4\}$ 时,求 a、b.

1.2 集合之间的关系

知识要点

(1) 子集:对于两个集合 A 和 B,如果集合 A 中任何一个元素都属于集合 B,那么集合 A 为集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$.

(2) 相等的集合:对于集合 A 和 B,如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,那么集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

(3) 真子集:对于两个集合 A 和 B,如果 $A\subseteq B$,并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么集合 A 叫做集合 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.

重点与难点

(1) 掌握包含和相等的有关术语、符号,并会使用它们表达集合之间的关系;

(2) 掌握自然语言,符号语言,图形语言三个方面表示包含关系及相关的概念;

(3) 利用数形结合解决有关问题.

典型例题

1. 已知集合 $A=\{0,1\}$, $B=\{y\mid y^2=1-x^2, x\in A\}$,则 A 与 B 的关系是________.

【解析】 因为 $x\in A$,所以 $x=0$ 时,$y=1$ 或 -1;$x=1$ 时,$y=0$. 所以 $B=\{0,1,-1\}$ $A\subsetneqq B$.

2. 含有三个实数的集合既可以表示为 $\left\{a, \dfrac{b}{a}, 1\right\}$,又可以表示为 $\{a^2, a+b, 0\}$,则 $a^{2014}+b^{2014}=$ ________.

【解析】 $a\neq 0$, $b=0$,所以前一个集合为 $\{a,0,1\}$,后一个集合为 $\{a^2,a,0\}$,所以 $a^2=1$,且 $a\neq 1$,所以 $a=-1$,原式为 1.

3. 已知集合 $A=\{1,2\}$,集合 $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. 若集合 M 满足 $A\subsetneqq M$ 且 $M\subseteq B$,则这样的集合 M 共有________个.

【解析】 $A\subsetneqq M$ 且 $M\subseteq B$,所以 M 中必含元素 1, 2, B 中其余 8 个元素的非零子集个数为 $2^8-1=255$.

4. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=2x-1\}$, $B=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{y-1}{x-1}=2\right\}$,试判断集合 A 与集合 B 的关系.

【解析】 集合 A 表示直线 $y=2x-1$ 上所有的点,集合 B 表示直线 $y=2x-1$ 上除了 $(1,1)$ 以外所有的点,所以 $B\subsetneqq A$.

5. 下列各组集合中,M 与 P 表示同一个集合的是 ( )

(A) $M=\{(1,-3)\}$, $P=\{(-3,1)\}$;

(B) $M=\varnothing$, $P=\{0\}$;

(C) $M=\{y\mid y=x^2+1, x\in \mathbf{R}\}$, $P=\{(x,y)\mid y=x^2+1, x\in \mathbf{R}\}$;

(D) $M=\{y\mid y=x^2+1, x\in \mathbf{R}\}$, $P=\{t\mid t=(y-1)^2+1, y\in \mathbf{R}\}$

【解析】 $(1,-3)$ 和 $(-3,1)$ 是直角坐标平面上不同两点,集合 $\{0\}$ 中含有一个元素 0,它不是空集;选项 C 中 M 是数集,P 是点集;选项 D 中 M 和 P 本质上是集合 $\{y\mid y\geqslant 1\}$,所以答案是(D).

6. 集合 $A=\{x\mid x=3k-2, k\in \mathbf{Z}\}$, $B=\{y\mid y=3x+1, x\in \mathbf{Z}\}$, $S=\{y\mid y=6m+1,$

$m \in \mathbf{Z}\}$ 之间的关系是 （　　）

(A) $S \subsetneqq B \subsetneqq A$　　(B) $S = B \subsetneqq A$　　(C) $S \subsetneqq B = A$　　(D) $B = A \subsetneqq S$

【解析】 A 和 B 都是指被 3 除余 1 的所有整数，所以 $A = B$，S 是被 6 除余 1 的所有整数，6 是 3 的倍数，所以选(C).

7. 已知非空集合 $N = \{x \mid a+1 \leqslant x \leqslant 2a-1\}$ 是集合 $M = \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$ 的子集，求 a 的取值范围(用集合表示).

【解析】 因为 N 为非空集合，所以 $2a-1 \geqslant a+1$，$a \geqslant 2$. 在这个前提下，$N \subseteq M$，所以 $\begin{cases} a+1 \geqslant -2, \\ 2a-1 \leqslant 5, \end{cases}$ $-3 \leqslant a \leqslant 3$，取交集得 a 的范围是 $\{a \mid 2 \leqslant a \leqslant 3\}$.

8. 若集合 $A = \{x \mid x^2 + ax + 1 = 0,\ x \in R\}$，集合 $B = \{1,\ 2\}$，若 $A \subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

【解析】 若 $A = \varnothing$，则 $\Delta = a^2 - 4 < 0$，解得 $-2 < a < 2$；

若 $1 \in A$，则代入 A 的方程，解得 $a = -2$，此时 $A = \{1\}$，满足题意；

若 $2 \in A$，则代入 A 的方程，解得 $a = -\dfrac{5}{2}$，此时 $A = \left\{2,\ \dfrac{1}{2}\right\}$，不满足题意.

所以 a 的取值范围是 $[-2,\ 2)$.

9. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 6x = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - 3(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$，且 $B \subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

【解析】 $A = \{0,\ 6\}$.

若 $B = \varnothing$，则 $\Delta < 0$，解得 $-\dfrac{13}{5} < a < -1$，

若 $B = \{0\}$，则 $a = 1$ 或 $a = -1$ 而 $\Delta = 0$，则 $a = -1$；

若 $B = \{6\}$，则与 $\Delta = 0$ 矛盾.

若 $B = \{0,\ 6\}$，则 $a = 1$，

则实数 a 的取值范围 $\left(-\dfrac{13}{5},\ -1\right] \cup \{1\}$.

10. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - ax + (a-1) = 0\}$，$C = \{x \mid x^2 - bx + 2 = 0,\ x \in R\}$，若集合 $B \subseteq A$，$C \subseteq A$，求实数 a，b 应满足的条件.

【解析】 $A = \{1,\ 2\}$，$B \subseteq A$，$B = \{1,\ a-1\}$，$a-1 = 1$ 或 $a-1 = 2$，所以 $a = 2$ 或 $a = 3$. $C \subseteq A$，若 $C = \varnothing$，则 $\Delta < 0$，解得 $-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$；

若 $C \neq \varnothing$，则 $C = A$，所以 $b = 3$.

$a = 2$ 或 $a = 3$，$-2\sqrt{2} < b < 2\sqrt{2}$ 或 $b = 3$.

基础练习

1. 已知集合 $A = \{1,\ x\}$，$B = \{1,\ x^2\}$，且 $A = B$，则 $x =$ ________.

2. 已知集合 $A = \{x \mid x = 2k+1,\ k \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{x \mid x = 4k \pm 1,\ k \in \mathbf{Z}\}$，则 A ________ B；若集合 $M = \{x \mid x = 2m,\ m \in \mathbf{Z}\}$，$N = \{x \mid x = 4n \pm 2,\ n \in \mathbf{Z}\}$，则 M ________ N.

3. 满足关系式 $\{a,\ b,\ c\} \subseteq M \subsetneqq \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 的集合 M 是________；满足 $\{a,\ b\} \subseteq M \subseteq \{a,$

$b, c, d, e\}$ 的集合 M 共有________ 个.

4. 设集合 $P=\left\{(a, b)\left|\frac{b}{a}<0\right.\right\}$, $S=\{(a, b) \mid ab<0\}$,其中 a、b 为实数,那么 P 和 S 的关系是 ( )

(A) $P \subsetneqq S$　(B) $S \subsetneqq P$　(C) $P=S$　(D) 以上都不正确

5. 集合 $A=\left\{x \left| x=\frac{k\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right.\right\}$, $B=\left\{x \mid x=k\pi \text{ 或 } x=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\right\}$之间的关系是 ( )

(A) $A \subsetneqq B$　(B) $B \subsetneqq A$　(C) $A=B$　(D) 以上都不正确

6. 下列六个关系式中正确的有:① $\{a, b\}=\{b, a\}$;② $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$;③ $\varnothing=\{\varnothing\}$;④$\{0\}=\varnothing$;⑤ $\varnothing \subsetneqq \{0\}$;⑥ $0 \in \{0\}$. ( )

(A) 6 个　(B) 5 个　(C) 4 个　(D) 3 个或 3 个以下

7. 设 $A=\{$正方形$\}$,$B=\{$平行四边形$\}$,$C=\{$矩形$\}$,则下列关系式正确的是 ( )

(A) $C \subsetneqq B \subsetneqq A$　(B) $B \subsetneqq C \subsetneqq A$　(C) $A \subsetneqq C \subsetneqq B$　(D) $A \subsetneqq B \subsetneqq C$

8. 已知集合 $A=\{-3, 4\}$, $B=\{x \mid x^2-2px+q=0\}$, $B \neq \varnothing$,且 $B \subseteq A$,求实数 p, q 的值.

能力提升

1. 已知集合 $A=\{-1, 3, 2m-1\}$, $B=\{3, m^2\}$,若 $B \subseteq A$,则实数 $m=$ ( )

(A) 1　(B) -1　(C) 1 或 -1　(D) 3

2. 若集合 A 满足 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$,则这样的集合 A 的个数是 ( )

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 5

3. 若集合 $A=\{0, a\}$, $B=\{0, a^2\}$,且 $A=B$,则实数 a 的值为 ( )

(A) 0 或 1　(B) 0　(C) 1　(D) -1

4. 已知集合 $A=\{x \mid x>1\}$, $B=\{x \mid x>a\}$,若 $A \subseteq B$,则实数 a 的取值范围是 ( )

(A) $a>1$　(B) $a \leqslant 1$　(C) $a<1$　(D) $a \geqslant 1$

5. 写出集合$\{a, b, c\}$的所有子集,并指出其中哪些是它的真子集.

6. 已知集合 $A=\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$, $B=\{a^2, a+b, 0\}$,若 $A=B$,求 $a^{2009}+b^{2010}$ 的值.

7. 判断集合 $P=\{x \mid x^2-x=0\}$，$Q=\left\{x \,\middle|\, x=\dfrac{1+(-1)^n}{2},\ n\in \mathbf{Z}\right\}$ 的关系.

8. 已知集合 $A=\{1,\ 1+d,\ 1+2d\}$，$B=\{1,\ q,\ q^2\}$，当 d、q 为何值时，$A=B$?

9. 已知集合 $A=\{x \mid -4<x<2\}$，集合 $B=\{x \mid x^2-3ax+2a^2=0,\ x\in R\}$，求使 $B\subseteq A$ 的实数 a 的范围.

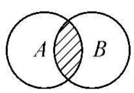
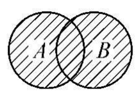
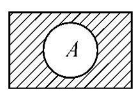
10. 已知集合 $A=\{x \mid -2<x<2\}$.

(1) 若集合 $B=\{x \mid x<a\}$ 满足 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围；

(2) 若非空集合 $C=\{x \mid 2a<x<a+1\}$，满足 $C\subseteq A$，求实数 a 的取值范围.

1.3 集合的运算

知识要点

	交集	并集	补集
符号表示	$A\cap B$	$A\cup B$	$\complement_U A$
描述法	$\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$	$\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$	$\{x \mid x\in U$ 且 $x\notin A\}$
文氏图			
关键字	公共元素	所有元素	

（续表）

	交集	并集	补集
运算性质	$A\cap A=A$ $A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup A=A$ $A\cup\varnothing=A$	$A\cap\complement_U A=\varnothing$ $A\cup\complement_U A=U$ $\complement_U(\complement_U A)=A$
重要性质	$(A\cap B)\subseteq A\subseteq(A\cup B)$ $(A\cap B)\subseteq B\subseteq(A\cup B)$ $A\cap B=A\Rightarrow A\subseteq B$ $A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$ $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$		
解题方法	在集合基本运算中，应注意数形结合思想的运用，有两个方面，其一：有关数集的运算，借助数轴这一工具；其二，有关集合包含关系判断与运算，考虑用文氏图.		

典型例题

1. $A=\{x\mid x^2+ax+b=0\}$，$B=\{x\mid x^2+cx+15=0\}$，若 $A\cup B=\{3,5\}$，$A\cap B=\{3\}$. 求 a、b、c 的值.

【解析】 因为 $A\cap B=\{3\}$，所以 $3\in B$，由 $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\Rightarrow 3\cdot x_2=15\Rightarrow x_2=5$. 由 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\Rightarrow 3+5=-c\Rightarrow c=-8$. 且 $B=\{3,5\}$，所以 $A=\{3\}$.

$$\begin{cases}x_1+x_2=3+3=-a,\\ x_1x_2=3\cdot 3=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6,\\ b=9.\end{cases}$$

综上，$a=-6$，$b=9$，$c=-8$.

【备注】 (1) 韦达定理应用.

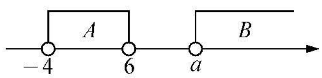
(2) 综合分析条件.

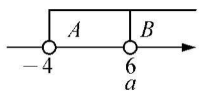
2. $A=\{x\mid -4<x<6\}$，$B=\{x\mid x>a\}$.

(1) 若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 a 的取值范围；

(2) 若 $A\cap B\neq A$，求 a 的取值范围.

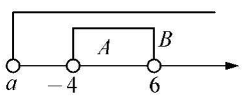
【解析】 (1) 若 $A\cap B=\varnothing$，

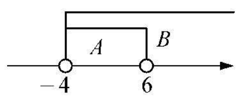




所以 $a\geqslant 6$，故 $A\cap B\neq\varnothing$ 时，$a<6$.

(2) 若 $A\cap B=A$，则 $A\subseteq B$.





所以 $a\leqslant -4$，

故 $A \cap B \neq A$ 时，$a > -4$.

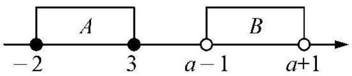
【备注】 (1) 数轴图.

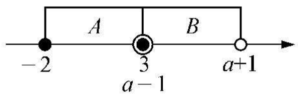
(2) 运算性质转化.

(3) 从反面思考来简化问题.

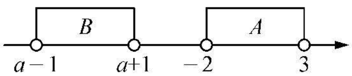
3. $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}$，$B=\{x \mid a-1<x<a+1\}$. 若 $\complement_U(\complement_U A \cup \complement_U B)=\varnothing$，求 a 的取值范围.

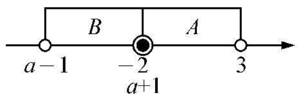
【解析】 $\complement_U(\complement_U A \cup \complement_U B)=\complement_U(\complement_U(A \cap B))=A \cap B=\varnothing$.

(1) 



，所以 $a-1 \geqslant 3 \Rightarrow a \geqslant 4$.

(2) 



，所以 $a+1 \leqslant -2 \Rightarrow a \leqslant -3$.

综上，$a \leqslant -3$ 或 $a \geqslant 4$.

【备注】 (1) 运算性质的熟练应用.

(2) 数轴图使用.

(3) 分类讨论思想方法.

4. $A=\{x \mid x^2+(P+2)x+1=0\}$. 若 $A \cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，求 P 取值范围.

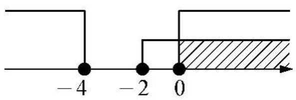
分析: $A \cap \mathbf{R}^+=\varnothing$，可有两种情况.

(1) $A=\varnothing$； (2) A 中没有正数.

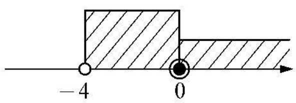
【解析】 (1) $A=\varnothing$. $\Delta=(P+2)^2-4<0 \Rightarrow -4<P<0$.

(2) A 中只有零与负数.

$$\begin{cases}\Delta=(P+2)^2-4 \geqslant 0, \\ x_1+x_2=-(P+2) \leqslant 0, \\ x_1 x_2=1 \geqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}P \leqslant -4 \text{ 或 } P \geqslant 0, \\ P \geqslant -2.\end{cases}$$



$P \geqslant 0$.

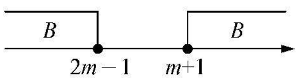
综上，

$P>-4$.

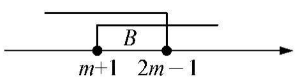
【备注】 分类讨论思想.

5. $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$，$B=\{x \mid x \leqslant 2m-1 \text{ 且 } x \geqslant m+1\}$. 若 $A \cup B=A$，求 m 取值范围.

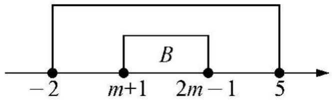
【解析】 $A \cup B=A \Rightarrow B \subseteq A$.

(1) 

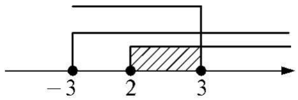
$B=\varnothing$. $2m-1<m+1 \Rightarrow m<2$.

(2) 

$B \neq \varnothing$.

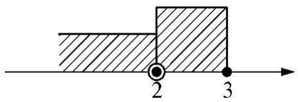


$\Rightarrow\begin{cases}2m-1\leqslant 5,\\ m+1\geqslant -2,\\ m+1\leqslant 2m-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m\leqslant 3,\\ m\geqslant -3,\\ m\geqslant 2.\end{cases}$

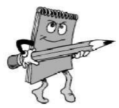


所以 $2\leqslant m\leqslant 3$.

综上，



所以 $m\leqslant 3$.



基础练习(1)

1. 集合 $A=\{x\mid -2<x<2\}$, $B=\{x\mid 1<x<3\}$,则 $A\cap B=$ ________.

2. 集合 $A=\{x\mid x=2n,\ n\in\mathbf{Z}\}$, $B=\{x\mid x=2n-1,\ n\in\mathbf{Z}\}$,则 $A\cap B=$ ________.

3. 集合 $A=\{5,\ a+3\}$, $B=\{a^2+1,\ a,\ a+1\}$,若 $A\cap B=\{2\}$,则实数 $a=$ ________.

4. 已知集合 $A=\{0,\ 1,\ 2\}$, $B=\{x\mid x=2a,\ a\in A\}$,则集合 $A\cap B$ 为 ( )

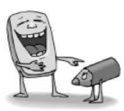
(A) $\{0\}$　(B) $\{0,\ 1\}$　(C) $\{1,\ 2\}$　(D) $\{0,\ 2\}$

5. 已知集合 A、B 满足 $A\cap B=A$,则下列关系式正确的是 ( )

(A) $A\subsetneqq B$　(B) $A\subseteq B$　(C) $A=B$　(D) $A\supsetneqq B$

6. 设集合 $A=\{x\mid x^2-px+2q=0\}$, $B=\{x\mid x^2-5x+q=0\}$,若 $A\cap B=\{3\}$,求实数 p、q 的值.

7. 已知集合 $A=\{y\mid y=x^2-2ax+3b\}$, $B=\{y\mid y=-x^2+2ax+7b\}$,且 $A\cap B=\{y\mid 2\leqslant y\leqslant 8\}$,求实数 a、b 的值.



能力提升(1)

1. 设 m, n 为自然数,$m>n$,集合 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m\}$,集合 $B=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$,满足 $B\cap C\neq\varnothing$ 的 A 的子集 C 共有________个.

2. 集合 $A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$,集合 $B\subsetneqq A$,并且 $a\in A\cap B$, $e\notin A\cap B$,则集合 B 的个数是________.

3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$, $B=\{x\mid x^2+px+q<0\}$,且满足 $A\cap B=$

$\{x \mid -1 \leqslant x < 2\}$,则 p, q 满足 ( )

(A) $2p + q + 4 = 0$　　(B) $p + q + 5 = 0$

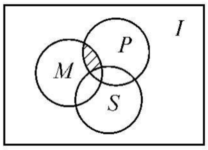
(C) $p + q = 0$　　(D) $p - q = 0$

4. 设 A、B、I 均为非空集合,且 $A \subseteq B \subseteq I$,则下列各式中错误的是 ( )

(A) $(\complement_I A) \cup B = I$　　(B) $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$

(C) $A \cap (\complement_I B) = \varnothing$　　(D) $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

5. 如图所示,I 是全集,M、P、S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是 ( )



(A) $(M \cap P) \cap S$

(B) $(M \cap P) \cup S$

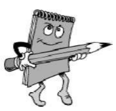
(C) $(M \cap P) \cap \complement_I S$

(D) $(M \cap P) \cup \complement_I S$

6. 设 $A = \{2, -1, x^2 - x + 1\}$, $B = \{2y, -4, x + 4\}$, $C = \{-1, 7\}$,且 $A \cap B = C$,求 x 与 y 的值.

7. 设 $A = \{(x, y) \mid y = |1 - x^2|\}$, $B = \{(x, y) \mid y = a, a \in \mathbf{R}\}$,当方程 $|1 - x^2| - a = 0$ 有三个解时,求 a 以及方程的三个解.

8. 已知 $M = \{(x, y) \mid |\sin \pi y| + \tan^2 \pi x = 0\}$, $N = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$,且 $P \subseteq (M \cap N)$,求集合 P 的个数.



基础练习(2)

1. 集合 $A = \{x \mid -1 < x < 2\}$, $B = \{x \mid 1 < x < 3\}$,则 $A \cup B =$ ________.

2. 集合 $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$,则 $A \cup B =$ ________.

3. 集合 $A = \{y \mid 2y^2 - 5y + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x = x\}$,则 $A \cup B =$ ________.

4. 若集合 A、B 满足 $A \not\subseteq B$,则下列结论错误的是 ( )

(A) $A \cap B = A$　　(B) $A \cup B = B$

(C) $A \cap B \subsetneqq B$　　(D) $A \cup B \subsetneqq B$