高等数学

GAO DENG SHU XUE

主 编 胡先富

副主编 李华平 游诗远

电子科技大学出版社

高等数学

主　编　胡先富
副主编　李华平　游诗远
编　者　(以姓氏笔画为序)
刘　光　但　军　李华平
胡先富　傅　伟　游诗远

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学: 胡先富主编—成都: 电子科技大学出版社, 2009.8

ISBN 978-7-5647-0310-3

Ⅰ. 高...　Ⅱ. 胡...　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 137733 号

高 等 数 学

胡先富　主编

出　　版: 电子科技大学出版社(成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦　邮编: 610051)

责任编辑: 郭　庆　徐守铭

主　　页: www.uestcp.com.cn

电子邮箱: usetcp@uestcp.com.cn

发　　行: 新华书店经销

印　　刷: 重庆科情印务有限公司

成品尺寸: 185mm × 260mm　印张　16　字数　399千字

版　　次: 2009 年 8 月第一版

印　　次: 2009 年 8 月第一次印刷

书　　号: ISBN 978-7-5647-0310-3

定　　价: 30.00 元

前 言

目前,高等职业技术教育已从规模扩张转向内涵建设,教学改革、教学质量成为时下高职教育面临的重要课题.高等数学作为高职院校绝大多数专业的文化基础课或专业基础课,是学生后续专业课程学习及可持续发展的基础平台,其教学改革、教学质量备受关注.高职数学教学改革的核心问题是给师生提供有利于教学互动的教材,它既要有利于教师创造性地教学,又要有利于学生自主学习、合作交流,而且还要反映现代科技新成果,与"工学结合"教学模式相适应.

这部《高等数学》教材由省部级示范性建设高职学院重庆城市管理职业学院从事高等数学教学第一线的教师,根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写而成.

在大量调研与理性思考的基础上,我们把高等数学课程设置为基础模块、应用模块和选修模块,分别与高等数学课程的文化基础课、专业基础课和素质拓展课定位相对应. 基础模块定位为文化基础通识课程; 应用模块定位为专业基础应用课程; 选修模块定位为素质拓展选修课程.

一、教材主要特色

1. 把握"以应用为目的,以必须、够用为度"的原则

高职数学教学要为学生后续专业课程的学习服务,为专业课程提供理论支撑、分析方法与计算方法,使学生能用数学理论知识、思想方法解决专业实际问题. 我们坚持"以应用为目的,以必须、够用为度"的原则设置教材内容,体现高等数学的工具性与现实应用性.

基础模块包括第 1 至第 5 章,建议学时数为 60 学时,内容为一元函数微积分学,在第 1 学期完成. 应用模块包括第 6 至 12 章,建议学时数为 80 学时,教学中根据专业需求进行选择性教学,内容包括多元函数微积分、常微分方程、无穷级数、矩阵代数、概率与数理统计,在第 2 学期完成. 选修模块内容为数学实验与数学建模,在第 2 学期开设,单独编写成册.

2. "职业与高等"双重属性并重

教材编写紧紧围绕"以应用为目的,以必须、够用为度"的原则,体现数学的工具性特征. 同时充分考虑高等数学的文化教育价值,体现高等数学的素质教育功能,力求突出科学性、先进性、思想性、应用性、实用性. 通过数学的学习提高学习者的数学素质与创造性思维能力.

3. 做到两个面向

教材编写做到"面向专业",以应用为目的,与专业课程对数学

的需求相适应;“面向学生”,内容设置具有一定的弹性,适应于学生的个体差异,与全人发展理念相适应. 在编写过程中既体现服务于专业又高于专业,充分考虑学生的可持续发展,体现数学的发展性、潜在性功能. 基础模块内容的设置分为基础要求与较高要求,习题设置为 A、B 两个层次. 应用模块内容的设置,既考虑学生的专业需求,又考虑学生的自主学习与提高,给学生留出一定的空间.

4. 以生为本,体现职业技术教育特色

从高职高专学生的现实基础、认知特征及职业技术教育的特点出发,以强化知识的应用为特色,注重基本思想方法、基础知识的教学,增强学生用数学的意识. 适当降低了理论要求和繁杂的运算,但又充分兼顾数学本身的逻辑性与体系的严谨性.

5. 优化知识结构

教材编写中,尽量优化知识结构,改变知识的呈现方式. 例如第 3 章函数的单调性与极值一节,在编写时进行了整合,显得简明扼要;第 9 章矩阵代数的编写,在传统线性代数编写模式的基础上进行了创新尝试,全章以矩阵的初等变换为主线,使学生以较少的学时掌握线性代数的基本方法、基本理论.

二、教材编写安排

这部《高等数学》教材共 12 章,由重庆城市管理职业学院刘光编写第 1 章,傅伟编写第 2 章,胡先富编写第 3、4、5、12 章,游诗远编写第 6、9 章,但军编写第 7、8 章,李华平编写第 10、11 章. 全书由重庆城市管理职业学院胡先富担任主编,并制订了编写大纲,完成了书稿的修改和统稿工作.

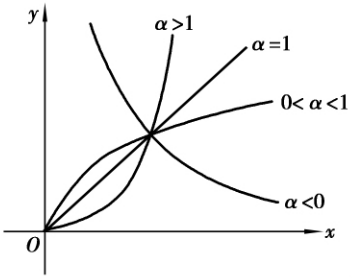
本教材适用于高职高专、专科层次的各类成人教育,也可作为专升本教材.

在教材的编写中进行了一些创新的尝试与探索,由于编者水平有限,不足之处难免,我们期望同行专家及读者批评指正.

《高等数学》教材编写组

2009 年 5 月

目　　录



第1章

函数、极限与连续

本章介绍函数、极限与连续的主要知识，它不仅是微积分知识体系的基础和理论，而且是学习微积分知识和应用的基本理念、工具和方法，同时为微积分学的扩展及其在相关领域的运用奠定坚实的理论基础.

1.1 初等函数

1.1.1 函数的概念与基本性质

1. 函数的定义

定义 1.1 对给定的非空实数集 D 和一个对应规则 f,如果对 D 中的每一个实数 x,按照规则 f 都能指出一个确定的实数 y 与之对应,则称规则 f 是 D 上的一个函数,并记为 $y=f(x),x\in D$. 其中,称 x 为自变量,y 为因变量,D 为函数的定义域,$Z=\{f(x)\mid x\in D\}$ 为函数的值域.

函数定义包含两个要素,即定义域和对应规则. 如果要区分两个函数是否相同,就看其定义域和对应规则是否都相同,否则视其为不相同. 例如,函数 $y=\ln x^2$ 与 $u=\ln t$ 是不同函数;函数 $y=\sqrt{x^2}$ 与 $u=|t|$ 是相同的.

记号 $f(x)$ 的意义表示变量 x 的函数值,而函数值的计算则依赖于规则 f 的具体模式.

例 1.1 设 $f(x+2)=x^2-2x+2$,求 $f(x)$ 与 $f(f(2))$.

解 令 $u=x+2$,则 $f(u)=(u-2)^2-2(u-2)+2=u^2-6u+10$,即 $f(x)=x^2-6x+10$.

因为 $f(2)=2$,所以 $f(f(2))=f(2)=2$.

例 1.2 某电信公司在其服务区内对每户每座电话机的使用收费标准规定为:每月所打电话的次数不超过 50 次的,只收月租费 25 元;超过 50 次的则每次加收 0.2 元. 那么每户每月电话费 y 和用户当月实际所打电话次数 x 的变化规律可表示为

$$y=f(x)=\begin{cases}25 & x\leqslant 50\\ 25+0.2(x-50) & x>50\end{cases}$$

这种函数表示,即所谓的分段函数.

例 1.3 设有分段函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & -1\leqslant x<0\\ 1-x & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

求函数 $f(x)$ 的定义域及 $f(-0.5)$ 和 $f(1)$ 的值.

解 函数 $f(x)$ 的定义域即是自变量 x 各个不同取值范围的并集.

因此,此函数的定义域为区间 $[-1,2]$.

$$f(-0.5)=-0.5+1=0.5 \qquad f(1)=1-1=0$$

2. 函数的几种基本性质

1)函数的有界性

定义 1.2 设函数 $y=f(x),x\in D$. 如果存在一个正实数 M,对任意的 $x\in D$,总有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立,则称函数 f 在 D 上有界. 否则,称函数 f 在 D 上无界.

一个函数在其定义区间上有界是指其所有的函数值都能夹在两个常数之间. 函数的有界性是一个整体性的概念,它强调的是函数在其整个定义区间上所具有的一种性质.

2)函数的单调性

定义 1.3 设函数 $y=f(x),x\in(a,b)$. 如果对任意两个实数 $x_1,x_2\in(a,b)$,且 $x_1<x_2$,

有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）成立，则称函数 f 在 (a,b) 内单调递增（或单调递减）.

函数的单调性与其定义区间的范围密切相关，它具有相对性和局部性，并非函数在整个定义域上所具有的一种性质.

3）函数的奇偶性

定义 1.4　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 对任意的 $x\in D$（且 $-x\in D$），若 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$）成立，则称函数 f 为偶函数（或称奇函数）.

函数的奇偶性是函数在整个定义区间内具有的一种性质. 在几何上，它表现出对称性. 即奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

4）函数的周期性

定义 1.5　设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 如果存在常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立，则称函数 f 为 D 上的周期函数，称常数 T 为函数的一个周期.

周期函数概念也具有整体性.

3. 反函数的概念与性质

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$，$x\in D_f$，$y\in Z_f$. 如果对任意 $x_1,x_2\in D_f$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 成立. 于是，对任意的 $y\in Z_f$，一定存在对应规则 f^{-1}，按照这个规则都能指出一个确定的实数 x 与之对应. 则规则 f^{-1} 是 Z_f 上的一个函数，称为函数 f 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，把函数 f 的反函数改写为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in D_{f^{-1}}=Z_f$，$y\in Z_{f^{-1}}=D_f$.

关于反函数，有以下结论：

（1）在一个区间上单调的函数一定有反函数，其反函数的单调性与已知函数一致.

（2）函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

（3）若 $y=f(x)$，$x\in D_f$，$y\in Z_f$，则 $y=f^{-1}(x)$，$x\in Z_f$，$y\in D_f$.

从定义可知，求反函数的过程可以分为两步：

第一步从 $y=f(x)$ 从解出 $x=f^{-1}(y)$；第二步交换字母 x 和 y，得 $y=f^{-1}(x)$.

4. 邻域

设 $\delta>0$，开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 或 $|x-x_0|<\delta$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，它表示这一范围的实数的集合；点 x_0 的 δ 邻域去掉 x_0 后的区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 或 $0<|x-x_0|<\delta$ 称为点 x_0 去心邻域，它表示这一范围的实数的集合.

类似的，称 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的左邻域，而称 $(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右邻域.

邻域常用于局部性细微变化问题的讨论.

1.1.2　初等函数

1. 基本初等函数

基本初等函数是研究和认知复杂函数的基础，它由下列六大类函数组成.

1）常数函数 $y=C$（常数）

图形为一条水平直线，如图 1-1 所示.

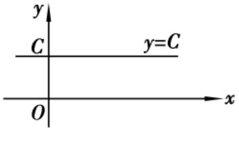


图 1-1

2）幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为常数）

对给定指数 α 所规定的幂函数，其定义域可根据这个指数对底数的约束条件加以判定. 幂函数的单调性，则由其指数 $\alpha>0$ 或 $\alpha<0$ 所确定.

在第一象限内，当 $\alpha>0$ 时，单调递增；当 $\alpha<0$ 时，单调递减，如图 1-2 所示.

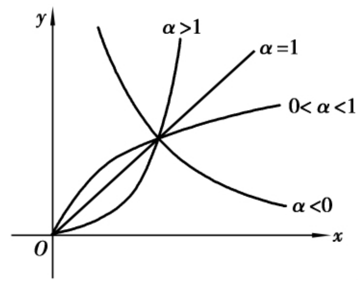


图 1-2

3）指数函数 $y=a^x(0<a$ 且 $a\neq1)$，其中 $x\in\boldsymbol{R}$，$y>0$.

指数函数的单调性，则由其底数 $a>1$ 或 $0<a<1$ 所确定，如图 1-3 所示.

4）对数函数 $y=\log_a x(0<a$ 且 $a\neq1)$，其中 $x>0$，$y\in\boldsymbol{R}$.

对数函数的单调性，则由其底数 $a>1$ 或 $0<a<1$ 所确定，如图 1-4 所示.

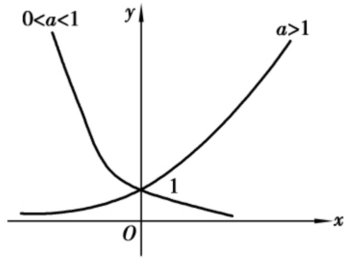


图 1-3

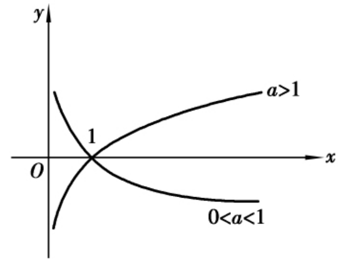


图 1-4

5）三角函数

三角函数包括以下六个函数. 这里，主要给出它们的定义和有关性质.

(1)正弦函数 $y=\sin x$，其中 $x\in\boldsymbol{R}$，$|y|\leqslant1$.

有界，奇函数，周期为 2π(最小正周期，以下雷同)，单调增区间为 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$，单调减区间为 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right)(k\in\boldsymbol{Z})$，如图 1-5 所示.

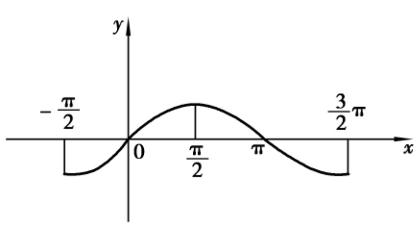


图 1-5

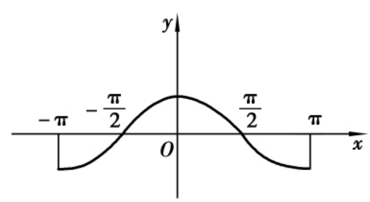


图 1-6

(2)余弦函数 $y=\cos x$，其中 $x\in\boldsymbol{R}$，$|y|\leqslant1$.

有界，偶函数，周期为 2π，单调增区间为 $(2k\pi-\pi,2k\pi)$，单调减区间为 $(2k\pi,2k\pi+\pi)(k\in\boldsymbol{Z})$，如图 1-6 所示.

(3)正切函数 $y=\tan x$，其中 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$，$y\in\boldsymbol{R}$.

无界，奇函数，周期为 π，在区间内 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\boldsymbol{Z})$ 单调增加，如图 1-7 所示.

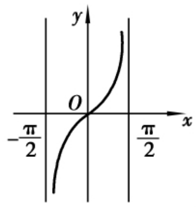


图 1-7

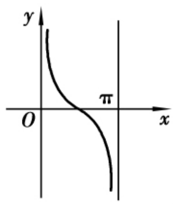


图 1-8

(4)余切函数 $y=\cot x$，其中 $x\neq k\pi$，$y\in \boldsymbol{R}$.

无界，奇函数，周期为 π，在区间内为 $(k\pi,k\pi+\pi)$ $(k\in \mathbf{Z})$ 单调减少，如图 1-8 所示.

(5)正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

6)反三角函数

反三角函数包括以下四个函数. 这里，主要给出它们的定义和有关性质.

(1)反正弦函数 $y=\arcsin x$，其中 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$.

有界，奇函数，单调递增，如图 1-9 所示.

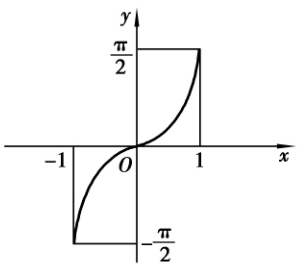


图 1-9

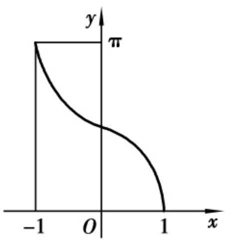


图 1-10

(2)反余弦函数 $y=\arccos x$，其中 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant \pi$.

有界，非奇偶函数，单调递减，如图 1-10 所示.

(3)反正切函数 $y=\arctan x$，其中 $x\in \boldsymbol{R}$，$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$.

有界，奇函数，单调递增，如图 1-11 所示.

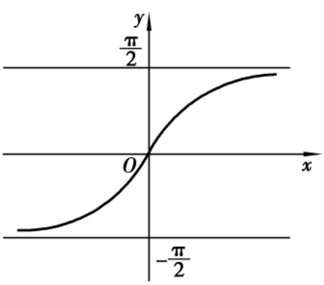


图 1-11

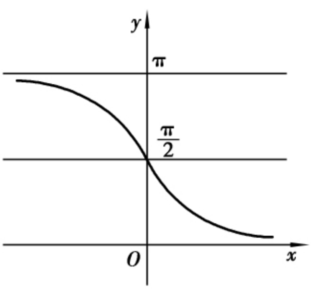


图 1-12

(4)反余切函数 $y=arc\cot x$，其中 $x\in \boldsymbol{R}$，$0<y<\pi$.

有界，非奇偶函数，单调递减，如图 1-12 所示.

2. **复合函数**

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，通过 u 的联系，如果 y 是 x 的函数，$y=f[\varphi(x)]$，则这个函数叫做由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数，其中 u 叫做中间变量.

例 1.4 指出下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的.

(1) $y=\sqrt{x^3+1}$，(2) $y=e^{\sin^2 x}$，(3) $y=\cos^3(2x-1)$，(4) $y=\ln(1+\sqrt{x^2+1})$

解 (1) y 由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^3+1$ 复合而成.

(2) y 由 $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

(3) y 由 $y=u^3$，$u=\cos v$，$v=2x-1$ 复合而成.

(4) y 由 $y=\ln u$，$u=1+v$，$v=\sqrt{t}$，$t=x^2+1$ 复合而成.

3. **初等函数**

以基本初等函数为基础，把其中有限多个相加、相减、相乘或相除(分母非零)，则可产生许多函数. 比如，$y=2^x+3x^2\sin x-1$ 等. 若把有限多个函数进行复合运算，则又可产生许多函数. 比如，$y=\sqrt{\sin x+1}$ 和 $y=\ln^2(\operatorname{arccot}x+2)$ 等. 把能够由基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的函数复合所产生的函数都统称为初等函数. 初等函数是非常广泛的一大类函数，也是微积分学的研究对象.

例 1.5 求函数 $y=\sqrt{3-x}+\arcsin(2x+1)$ 的定义域 D.

解 因为 $\begin{cases}3-x\geqslant 0\\ |2x+1|\leqslant 1\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x\leqslant 3\\ -1\leqslant x\leqslant 0\end{cases}$，于是 $D=[-1,0]$.

习 题 1.1

A 组

1. 解下列不等式，并用区间表示它们的解集.

(1) $(x-1)^2<9$；　(2) $|x-1|\geqslant 2$；　(3) $|2-3x|<4$.

2. 判断下列各组函数是否相同.

(1) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　(2) $y=3\ln x$ 与 $y=\ln x^3$；

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $h(x)=x+1$；　(4) $y=\sqrt{1+\cos 2x}$ 与 $y=\sqrt{2}\cos x$；

(5) $y=x^0$ 与 $y=\sec^2 x-\tan^2 x$.

3. 解答下列各题.

(1) 已知 $f(\sqrt{x+1}-3)=\sqrt{x+1}+3$，求 $f(3)$，$f(x-6)$.

(2) 若 $g(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0,\\ 2, & 0\leqslant x<1,\\ x-2, & 1\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$ 求 $g(3)$，$g(2)$，$g(0.5)$，$g(-0.5)$，$g(a-1)$.

(3)设 $f(x+1)=x^2-x+1$,求 $f(x)$.

4.求下列函数的定义域.

(1)$f(x)=x^2-x$;　　(2)$g(x)=\frac{2}{x-1}+\sqrt{1-x^2}$;

(3)$y=\frac{2x^2+1}{x^3-3x+2}$;　　(4)$y=\ln(\ln x)$.

5.判断下列函数的奇偶性.

(1)$y=-2x^3+3\sin x$;　　(2)$y=x^3+x+3$;

(3)$y=x^2+\cos x+1$;　　(4)$y=2^x+2^{-x}$;

(5)$y=2x(x+1)(x-1)$;　　(6)$y=-3$.

6.求下列函数的反函数.

(1)$y=x^3+1$;　　(2)$y=\ln(x+2)$;

(3)$y=2^{2x+5}$;　　(4)$y=\sin 2x$.

7.指出下列函数是由哪些基本初等函数或简单函数复合构成的.

(1)$y=\sqrt{x^2+1}$;　　(2)$y=(1+\ln^2 x)^2$;

(3)$y=2^{\arcsin x}$;　　(4)$y=\cos^2\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$;

(5)$y=\ln(1+\sqrt{\tan x^2})$;　　(6)$y=(1+2^{2x^2+1})^3$.

8.设某企业对某种产品制定的销售策略是:购买20kg及其以下按10元/kg收费;购买量如果不大于200kg,则超过20kg的部分按7元/kg收费;如果购买量超过200kg的部分,则按5元/kg收费,试给出购买量 x(kg)与费用 y(元)的函数关系.

B 组——应用与提高

1.解下列不等式.

(1)$1\leqslant|x-2|<3$;　　(2)$|x-1|-1\leqslant 2|x|$.

2.求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{16-x^2}-\frac{2x^2-1}{\ln(x-1)}$;　　(2)$y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$.

3.判断下列函数的奇偶性.

(1)$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;　　(2)$y=\log_2\frac{1-x}{1+x}, x\in(-1,1)$.

4.求下列函数的周期.

(1)$y=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;　　(2)$y=|\sin x|$;　　(3)$y=\tan\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

5.证明函数 $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$ 为奇函数.

6.确定函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|\leqslant 1\\ x-1, & 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$ 的定义域并作出图形.

1.2 函数的极限

1.2.1 数列极限的概念

已知无穷数列$\{f(n)\}$,且$f(n)=\dfrac{2n+1}{n}$,$n\in\mathbf{N}$.下面来看关注当序号n取自然数无限增大时(用记号$n\to\infty$表征n的这种变化方式和趋势),项$f(n)$的变化趋势.容易看出,当$n\to\infty$时,项$f(n)$的值将无限趋近于常数2(用记号$f(n)\to 2$表征项$f(n)$的这种变化方式和趋势).事实上,这一无限变化过程可用$|f(n)-2|=\dfrac{1}{n}$总能任意地小(即大于零而无限趋近于零)来刻画.对此,给出数列极限的描述性定义.

定义 1.7 设无穷数列为$\{f(n)\}$,A为常数.如果当n取自然数无限增大时,有$f(n)$的值无限趋近于常数A,即$|f(n)-A|$总能任意地小,则称当n趋向于无穷大时,数列$\{f(n)\}$以A为极限,记为$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=A$(或记作,当$n\to\infty$时,$f(n)\to A$).如果当$n$取自然数无限增大时,有$|f(n)-A|$不是总能任意地小,则称极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$不存在.

当$n\to\infty$时,称有极限值的数列为收敛数列,而称以零为极限值的数列(变量)为无穷小量;称不存在极限值的数列为发散数列.

例如,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=2$.也说,当$n\to\infty$时,数列$f(n)=\dfrac{2n+1}{n}$收敛于2.

又如,$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在,也说当$n\to\infty$时,数列$f(n)=(-1)^n$是发散数列.

你知道为什么,当$n\to\infty$时,数列$f(n)=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$收敛于0;而当$n\to\infty$时,数列$f(n)=2n-100$发散吗?

另外,为了提升数列极限的应用能力基础,需要建立一些常用的已知极限,它们是:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$($C$为常数); (2)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)$;

(3)$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0(|q|<1)$; (4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{n^p}=0(p>0)$.

例如,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10}=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}=0$.

1.2.2 函数极限的概念与性质

关于函数$y=f(x)(x\in D)$的极限,现在关注自变量x按照一定的方式无限变化时,函数值$f(x)$的变化趋势.关于自变量x无限取值的变化趋势有下列六种情形:

(1)自变量x从某一时刻起总取正数而无限增大,记为:$x\to+\infty$;

(2)自变量x从某一时刻起总取负数其绝对值无限增大,记为:$x\to-\infty$;

(3)自变量x可取正数或负数但其绝对值无限增大,记为:$x\to\infty$;

(4)自变量x在点x_0的左右邻近取值变化而无限趋近于x_0,记为$x\to x_0$;

(5)自变量 x 在点 x_0 的右侧邻近取值变化而无限趋近于 x_0,记为 $x\to x_0^+$;

(6)自变量 x 在点 x_0 的左侧邻近取值变化而无限趋近于 x_0,记为 $x\to x_0^-$.

1. 当 $x\to\infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=1+\dfrac{1}{x}$(如图 1-13 所示),当 $|x|$ 无限增大时,有 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 1,即 $|f(x)-1|$ 总能为任意地小,称当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 1 为极限.

定义 1.8　设函数为 $y=f(x)(x\in D)$,A 为常数.如果当 x 的绝对值无限增大时,有 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 A,即 $|f(x)-A|$ 总能任意地小,则称当 $x\to\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或记作,当 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to A$).

如果当 x 趋于向无穷大时,有 $|f(x)-A|$ 不是总能任意地小,则称极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 不存在.

可以类似地给出:当 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 是否以 A 为极限的定义以及有关的记法.

根据以上极限定义,可以建立起一些常用的已知极限,如:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x^n}=0$($n\in\mathbf{N}$,$a$ 为常数);

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{x^p}=0$($a$ 与正数 p 均为常数);

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$($0<a<1$);

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x$ 不存在($0<a<1$);

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$($a>1$);

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x$ 不存在($a>1$);

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$;

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$;

(9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$;

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=0$;

(11) $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在;

(12) $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 不存在.

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^n}=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}}=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 不存在,$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$ 不存在,等.

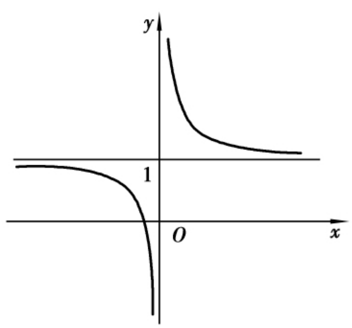


图 1-13

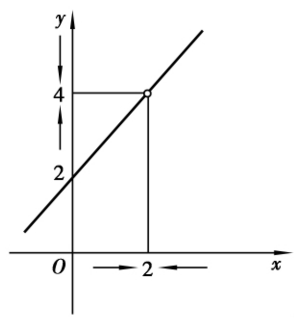


图 1-14

2. 当 $x\to x_0$ 函数 $f(x)$ 的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$(如图 1-14 所示),当 x 不等于 2 而无限趋近于 2 时,有 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 4,即 $|f(x)-4|$ 总能任意地小,称当 $x\to2$ 时,函数 $f(x)$ 以 4 为极限.

定义 1.9　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义(点 x_0 可以除外),A 为一个常数.如果当 x 不等于 x_0 而无限趋近于 x_0 时,有 $f(x)$ 的值无限趋近于常数 A,即 $|f(x)-A|$ 总能任意

地小，则称当$x\to x_o$时，函数 $f(x)$以 A 为极限，记作$\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=A$(或记作，当 $x\to x_o$ 时，$f(x)\to A$).

如果当 x 不等于 x_o 而无限趋近于 x_o 时，有$|f(x)-A|$不是总能任意地小，则称极限$\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$不存在.

由此定义可见，函数在一点的极限是否存在仅与它在该点附近的变化有关，而与函数本身在该点有无定义无关. 也就是说，研究函数在一点的极限时，不论函数在该点是否有定义，都仅仅只是关注函数在该点的去心邻域内的变化情况而已，这种考虑将有利于区分函数在一点处的变化特性.

例如：(1)$\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，(2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，(3)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$，(4)$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{x+1}$不存在.

根据以上极限定义，可以建立下列几个常用的已知极限，如：

(1)$\lim\limits_{x\to x_o}x^n= x_o{}^n$；(2)$\lim\limits_{x\to x_o}\sin x=\sin x_o$；(3)$\lim\limits_{x\to x_o}\cos x=\cos x_o$.

例如，$\lim\limits_{x\to -2}x^3=-8$，$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

$x\to x_o$ 包括 $x\to x_o^-$ 与 $x\to x_o^+$ 两种情况，此时的极限分别称为左右极限.

定义 1.10 设函数 $f(x)$在点 x_o 的某个右邻域内有定义，A 为一个常数. 如果当 x 大于 x_o 而无限趋近于 x_o 时，有 $f(x)$的值无限趋近于常数 A，即$|f(x)-A|$总能任意地小，则称当 $x\to x_o^+$ 时，函数 $f(x)$以 A 为右极限，记作 $f(x_o+0)=\lim\limits_{x\to x_o^+}f(x)=A$.

如果当 x 大于 x_o 而趋近于 x_o 时，有$|f(x)-A|$不是总能任意地小，则称右极限 $f(x_o+0)$不存在.

在此，读者可以自己试着给出函数在一点的左极限的定义和有关的表示方法.

例如，设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<0,\\ 2, & x=0,\\ \cos x, & x>0.\end{cases}$ 有：

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\cos x=1$，$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}2x=0$，

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}2x=-2$，$\lim\limits_{x\to \pi}f(x)=\lim\limits_{x\to \pi}\cos x=-1$.

3. 函数极限的性质

性质 1.1 若极限$\lim f(x)$存在，则极限值是唯一的.

记号$\lim f(x)$下面没有标明自变量的变化过程，是指对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$均适用.

性质 1.2 $\lim C=C$(C 为任意常数).

性质 1.3 设$\lim f(x)$与 $\lim g(x)$都存在，则：

(1)$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$.

(2)$\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)$.

特例 $\lim Cf(x)=C\lim f(x)$(C 为常数)；$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$($n$ 为正整数).

(3)当 $\lim g(x)\neq 0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$.

性质 1.3 称为函数极限的四则运算法则，其中的(1)和(2)两条性质还可推广到任何有限的形式.