单墫

初中数学指津

平面几何的知识与问题

单墫 著

上海辞书出版社

单墫

初中数学指津

平面几何的知识与方法

单墫 著

上 海 辞 书 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

单墫初中数学指津. 平面几何的知识与问题 / 单墫 著. —上海：上海辞书出版社，2014. 7
ISBN 978 - 7 - 5326 - 4079 - 9

Ⅰ. ①单… Ⅱ. ①单… Ⅲ. ①平面几何 Ⅳ. ①O123. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 026268 号

单墫初中数学指津——平面几何的知识与问题
单 墫 著
策 划/蒋惠雍 责任编辑/静晓英 董 放
助理编辑/王佳丽 封面设计/杨钟玮

上海世纪出版股份有限公司
辞书出版社出版
200040 上海市陕西北路 457 号 www. cishu. com. cn
上海世纪出版股份有限公司发行中心发行
200001 上海市福建中路 193 号 www. ewen. cc
浙江省临安市曙光印务有限公司印刷

开本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 16. 5 字数 309 000
2014 年 7 月第 1 版 2014 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978 - 7 - 5326 - 4079 - 9/O · 73
定价：40. 00 元

前 言

这几本课外读物，是提供给初中同学学习数学用的.

五十多年前，我也是中学生. 当时有几本小册子，如许莼舫的《几何定理和证题》，刘尼的《因式分解》等，都写得很好.

可惜这些书，现在都见不到了.

目前充斥市场的是各种练习册、习题集.

学数学，不是为了当熟练的"操作工"、"模仿秀"，而是为了学会思考.

大量重复的练习，不利于培养学习的兴趣，甚至会弄坏了学习的"胃口".

因此，上海辞书出版社向我约稿时，我承诺写几本有助于培养学习兴趣的书. 但现在年事渐高，体力与精力大不如前，花了一年时间才写成三册.

如果同学们能够耐心地阅读这几本书，并觉得对启迪思维有些帮助，那么我就心满意足了.

单 墫

2014 年 5 月

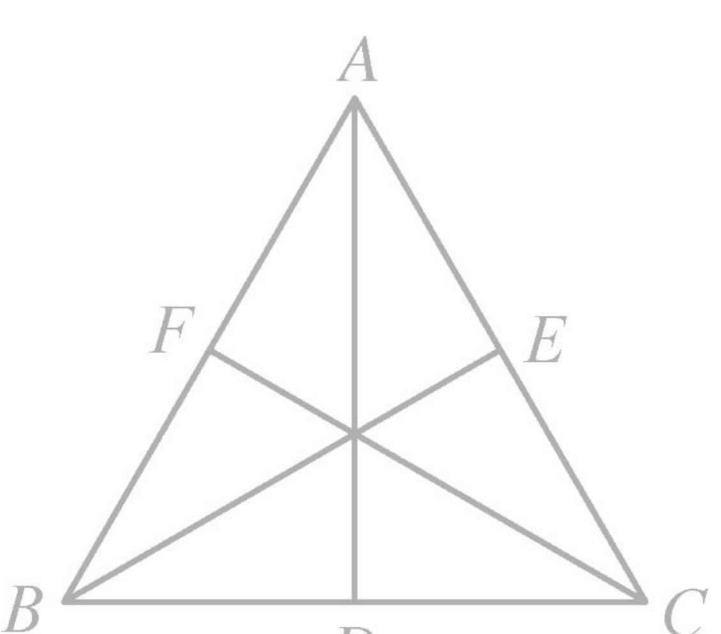
目 录

第一部分　平面几何知识 …… 1
1. 基本概念 …… 3
2. 三角形的全等 …… 7
3. 几何中的不等 …… 12
4. 平行线 …… 15
5. 三角形的内角和与公理体系 …… 18
6. 四边形 …… 21
7. 相似形 …… 25
8. 直角三角形 …… 30
9. 圆(一) …… 32
10. 圆(二) …… 37
11. 轨迹 …… 42
12. 三角函数 …… 47

第二部分　平面几何问题 …… 53
习题一 …… 55
习题二 …… 62
习题三 …… 69
习题一解答 …… 77
习题二解答 …… 121
习题三解答 …… 181

第一部分

平面几何知识



这一部分介绍几何的基础知识.

为什么要学习平面几何?

第一,平面几何有用.

丈量田亩,测量高度、距离,都需要几何.这也正是几何在各个文明发源地产生、积累与发展的原因.时至今日,平面几何的应用更为广泛,宇宙飞行、城市建设等无不需要几何知识.

这里的第一,只是最早的意思.这第一条理由并不是最重要的理由,更不是唯一的理由.下面的第二条理由才是最重要的.

第二,平面几何培养、发展我们理性思维的能力.

徐光启认为,几何学使人缜密.我们追求真理,寻找、发现各种(与图形有关的)规律,但绝不盲从.我们不满足于感性的知识,不轻信任何未曾证明的命题.大胆怀疑,眼见不再为实,试验的结果也不一定能作为依据,只有经过证明证实的结论才是可靠的.

学习数学,就要学习推理,学习证明.学习推理,学习证明,从平面几何入手可以说是一条最佳的途径.

如果不熟悉几何证明,那么就错过了获得严格论证这一概念的最好机会.在现代生活中就缺少一个真正的标准.

第三,平面几何是人类建立的第一个逻辑体系.

欧几里得的《几何原本》将主要的几何命题整理成一个严谨的体系.这种逻辑体系是人类文明的主要支柱之一.学习平面几何就应当学习这种体系.学习这种体系也就应当学习平面几何.

第四,平面几何产生了极为重要的公理化的思想.

欧氏平面几何体系的源头是几组公理.公理化的思想大大促进了数学的发展.

第五,公理的不同选取,产生了非欧几何.

非欧几何的产生,使人们认识到不能固步自封,应当大胆怀疑,永远求真.

从这五点理由可见学习平面几何很有必要.

平面几何对于数学表达,也有着难以替代的作用.本书的开始部分,叙述力求详细.后来逐步精简,着重写出关键步骤.希望学习几何的同学注意书面表达的完整(尤其在初学阶段)与简明.

1. 基 本 概 念

平面几何，研究同一个平面内的图形及它们间的关系.

点、直线是平面几何中的基本图形. 一条直线上有无穷多个点. 平面上其他的点在这条直线的两侧.

关于点与直线，我们有下面的公理（不加证明而采用的真理）.

公理 两点确定一条直线，即给定两个点 A、B，有一条直线过 A、B 两点，而且也只有一条直线过 A、B 两点.

直尺，就是经过两个已知点作直线的工具.

点，通常用一个大写的字母表示，如点 A、点 B. 直线，通常用两个大写字母或一个小写字母表示，图 1－1 中的直线就可称为直线 AB 或直线 a.

图 1－1

如图 1－1，直线上的两个点 A、B，将直线分为三个部分. A 点左边是以 A 为端点的射线，B 点右边是以 B 为端点的射线（均有一端可以无限延长），A、B 之间是以 A、B 为两个端点的线段. 这线段称为线段 AB.

由上面的公理可以推出下面的定理（经过证明的真理）.

定理 如果两条直线有公共点，那么它们恰有一个公共点.

已知：两条直线 a、b 有公共点 A.

求证：a、b 恰有一个公共点.

证明 假设点 B 也是直线 a、b 的公共点，那么直线 a 是过 A、B 两点的直线，b 也是过 A、B 两点的直线. 这与上面的公理矛盾. 因此，直线 a、b 只有一个公共点 A. 证毕.

在开始阶段，凡是重要的结论（如上面的定理），我们都写出“已知、求证”以及详细的“证明”.

证明的理由一定要充足，要说清楚.

上面的证法是反证法. 即先假设相反的结论成立，然后根据已有的公理、定理或已知条件导出矛盾，从而相反的结论不成立. 我们要证明的结论成立.

反证法，也称为归谬法.

同一平面的两条直线 a、b，如果有公共点（交点），就称为相交；如果没有公共点，就称为平行. 直线 a、b 平行，常记为 $a \parallel b$，“$\parallel$”读作“平行于”.

自一点 A 引出的两条射线 AB、AC 组成角，如图 1－2，记为 $\angle BAC$（注意将 A 写在 B、C 之间）或 $\angle A$. A 称为 $\angle BAC$ 的顶点，AB、AC 称为 $\angle BAC$ 的边.

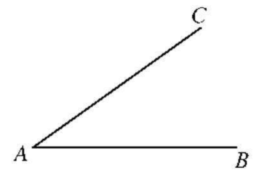


图 1－2

如果两个几何图形，其中一个可以通过在空间中的运动与另一个完全重合，那么就说这两个图形相等.

例如图 1－1 中的线段 AB 与它自身相等，而且有两种重合的方法：一种是 A 与 A 重合，B 与 B 重合；另一种是 B 与 A 重合，A 与 B 重合.

又如图 1－2 中的 $\angle BAC$ 与它自身相等，而且有两种重合的方法：一种是 AB 与 AB 重合，AC 与 AC 重合；另一种是 AC 与 AB 重合，AB 与 AC 重合.

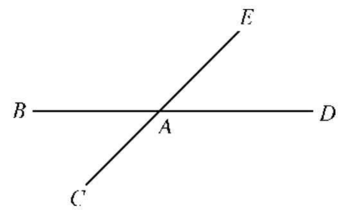


图 1－3

图 1－3 中，$\angle BAC$ 与 $\angle DAE$ 有公共顶点 A，并且射线 AD、AB 组成一条直线，射线 AE、AC 也组成一条直线，这样的两个角称为对顶角.

定理　对顶角相等.

已知：$\angle BAC$ 与 $\angle DAE$ 是对顶角.

求证：$\angle BAC = \angle DAE$.

证明　将图形翻转，使得 $\angle DAC$ 变为自身，即射线 AD 落到原来的 AC 上，AC 落到原来的 AD 上. 这时，AE 作为 AC 的延长线，应当落到原来 AD 的延长线 AB 上. 因此 $\angle DAE$ 与 $\angle CAB$ 重合.

所以 $\angle BAC = \angle DAE$. 证毕.

如果有三条线段 AB、CD、EF，并且线段 AB 内有一点 G，使得 $AG=CD$，$GB=EF$，那么线段 AB 就称为线段 CD、EF 的和.

如果有三个角 $\angle BAC$、$\angle DEF$、$\angle GHI$，并且 $\angle BAC$ 内有一条射线 AJ，使得 $\angle BAJ = \angle DEF$，$\angle JAC = \angle GHI$，那么 $\angle BAC$ 就称为 $\angle DEF$、$\angle GHI$ 的和.

如果射线 AB 与 AC 组成一条直线（如图 1－4），那么 $\angle BAC$ 称为平角. 显然平角都相等. 我们称平角为 180° 的角. 如果将平角等分为 180 份，那么每份是 1° 的角.

图 1－4

如果两个角的和是平角，那么其中的一个称为另一个的补角. 我们有

定理　同一个角的补角相等.

已知：$\angle BAE$、$\angle CAD$ 都是 $\angle BAC$ 的补角(如图 1-3).

求证：$\angle BAE = \angle CAD$.

证明　因为 $\angle BAE$ 是 $\angle BAC$ 的补角，所以 AC、AE 组成一条直线. 同理，AD 与 AB 组成一条直线.

所以 $\angle BAE$ 与 $\angle CAD$ 是对顶角.

由上一个定理，$\angle BAE = \angle CAD$. 证毕.

因为相等的角经过运动可以完全重合，这时它们的补角也完全重合，所以有

推论　等角的补角相等.

将一个平角 $\angle AOD$ 对折，使得边 OA 与 OD 重合，折痕为射线 OB，那么就得到两个相等的角，即 $\angle AOB$ 与 $\angle BOD$，它们都是平角 $\angle AOD$ 的一半.

平角的一半称为直角. 我们称直角为 $90°$的角.

图 1-5 中，两条直线 AD、BC 相交于 O. 如果 $\angle AOB$ 是直角，那么它是平角 $\angle AOD$ 的一半. $\angle BOD$ 是 $\angle AOD$ 的另一半，也是直角. 同样 $\angle DOC$、$\angle COA$ 也都是直角.

在 $\angle AOB$ 为直角时，称直线 OA 与 OB 垂直，并记为 $OA \perp OB$. "$\perp$"读作"垂直于". OA 称为 OB 的垂线.

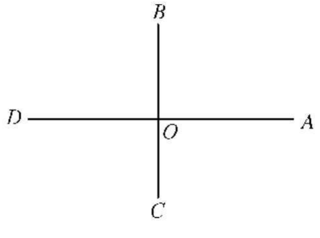


图 1-5

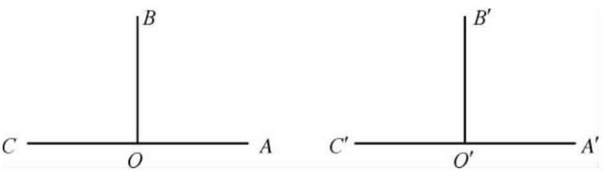


图 1-6

定理　直角都相等.

已知：$\angle AOB$、$\angle A'O'B'$ 都是直角(图 1-6).

求证：$\angle AOB = \angle A'O'B'$.

证明　设 OC、$O'C'$ 分别为 OA、$O'A'$ 的反向延长线. 将平角 $\angle C'O'A'$ 放到 $\angle COA$ 上，使得点 O' 与 O 重合，边 $O'A'$ 与 OA 重合. 这时，$O'A'$ 的反向延长线 $O'C'$ 与 OA 的反向延长线 OC 重合.

再将平角 $\angle COA$ 对折，使得边 OA 与 OC 重合，那么折痕就是直角 $\angle AOB$ 的边 OB，但平角 $\angle C'O'A'$ 已与平角 $\angle COA$ 重合，所以折痕也是直角 $\angle A'O'B'$ 的边 $O'B'$. 即直角

$\angle AOB$ 与直角 $\angle A'O'B'$ 重合. $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

如果两个角的和是直角,那么其中的一个称为另一个的余角. 显然有:

定理　同一个角的余角相等.

已知:$\angle AOC$、$\angle BOD$ 都是 $\angle COB$ 的余角(图 1-7).

求证:$\angle AOC = \angle BOD$.

证明　将图形翻转,使得 OB 与原来的 OC 重合,这时 OC 与原来的 OB 重合.

因为直角 $\angle AOB =$ 直角 $\angle COD$, OB 与原来的 OC 重合,所以 OA 与原来的 OD 重合. 于是 $\angle AOC$ 与原来的 $\angle DOB$ 重合, $\angle AOC = \angle BOD$.

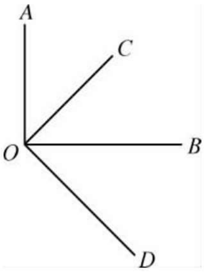


图 1-7

推论　等角的补角相等.

过一个已知点 A,可以作一条直线与已知直线 l 垂直. 如果利用三角板,只需将三角板上的直角的一条边与 l 对齐,直角的另一边通过 A,沿着这条边画的线就是所求的垂线(如图 1-8).

如果只准用直尺与圆规,那么可先以 A 为圆心,画圆弧交 l 于 B、C,再分别以 B、C 为圆心,同样长(例如 AB)为半径画圆弧,相交于 D, AD 就是所求垂线(如图 1-9).

如果 $AD \perp BC$,并且 D 在 BC 上,那么 D 称为垂足,也称为 A 在 BC 上的射影. 而线段 BD 称为线段 AB 在 BC 上的射影(如图 1-10).

图 1-8

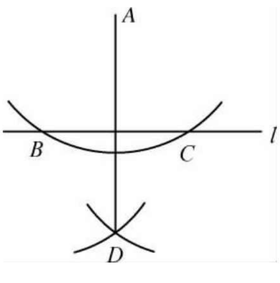


图 1-9

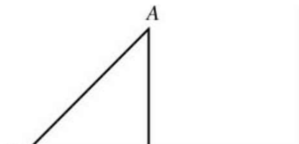


图 1-10

本节介绍了一些定义(如角、对顶角、平角),这些定义可以通过解题逐步加深理解,不需要死记硬背. 以下各节也是如此.

2. 三角形的全等

如图 2-1,三条首尾依次相连的线段 AB、BC、CA 组成的图形称为三角形. 记为 $\triangle ABC$. 一个三角形($\triangle ABC$)有三条边(AB、BC、CA),三个角($\angle A$、$\angle B$、$\angle C$),称为这个三角形的基本元素.

如果一个三角形可以经过运动放到另一个三角形上,使得它们完全重合,那么这两个三角形的对应边都相等,对应角也都相等. 这样的两个三角形是相等的三角形. 但习惯上(避免与两个三角形面积相等混淆),我们称这样的两个三角形为全等三角形. 即如果两个三角形的对应边都相等,对应角也都相等,那么这两个三角形称为全等三角形.

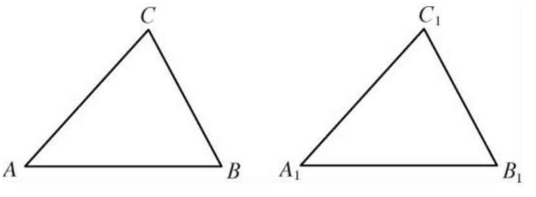


图 2-1

关于三角形的全等,有以下判定定理.

判定定理 **1**　如果一个三角形有两条边以及它们的夹角与另一个三角形的两条边及它们的夹角对应相等,那么这两个三角形全等.

已知: 如图 2-1, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

求证: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

证明　将 $\triangle A_1B_1C_1$ 放到 $\triangle ABC$ 上,使得点 A_1 与 A 重合,射线 A_1B_1 与 AB 重合.

因为 $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, 所以射线 A_1C_1 与 AC 重合.

因为 $AB = A_1B_1$, 所以射线 A_1B_1 上的点 B_1 与射线 AB 上的点 B 重合.

同理,点 C_1 与 C 重合.

于是, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 完全重合,即 $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. 证毕.

在 $\triangle ABC$ 中,如果 $AB = AC$, 那么这个三角形称为等腰三角形, AB、AC 称为腰, BC 称为底边, A 称为顶, $\angle A$ 称为顶角, $\angle B$、$\angle C$ 称为底角.

推论 **1**　等腰三角形的底角相等.

已知: $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$.

求证：$\angle B=\angle C$.

证明　在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACB$ 中，$AB=AC$，$AC=AB$，$\angle BAC=\angle CAB$，所以 $\triangle ABC\cong\triangle ACB$.

从而 $\angle B=\angle C$. 证毕.

判定定理 **2**　如果一个三角形有两个角及它们的夹边与另一个三角形的两个角及它们的夹边对应相等，那么这两个三角形全等.

已知：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle B=\angle B_1$，$\angle C=\angle C_1$，$BC=B_1C_1$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

证明　因为 $BC=B_1C_1$，所以可将 $\triangle A_1B_1C_1$ 放到 $\triangle ABC$ 上，使得线段 B_1C_1 与线段 BC 重合（B_1 与 B 重合，C_1 与 C 重合）.

可以使点 A_1 与点 A 在直线 BC 的同侧. 因为 $\angle B=\angle B_1$，所以射线 B_1A_1 与射线 BA 重合. 同理，射线 C_1A_1 与射线 CA 重合.

因为直线 BA、CA 只有一个交点，即点 A，所以直线 B_1A_1、C_1A_1 的交点 A_1 与 A 重合.

于是，$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 完全重合，即 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$. 证毕.

推论 **2**　有两个角相等的三角形是等腰三角形.

已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$.

求证：$AB=AC$.

证明　由 $\triangle ABC\cong\triangle ACB$ 易得结论（请读者补出详细过程）.

判定定理 **3**　如果一个三角形有三条边与另一个三角形的三条边对应相等，那么这两个三角形全等.

已知：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$AB=A_1B_1$，$AC=A_1C_1$，$BC=B_1C_1$.

求证：$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.

证明　因为 $BC=B_1C_1$，可以使线段 B_1C_1 与线段 BC 重合（B_1 与 B 重合，C_1 与 C 重合）. 并且，可以使点 A_1 与点 A 在直线 BC 的两侧（如图 2-2）.

连结 A、A_1. 因为 $AB=A_1B_1$，所以 $\angle BAA_1=\angle BA_1A$（推论 1）.

同理，$\angle CAA_1=\angle CA_1A$.

以上二式相加得

$$\angle BAC=\angle BA_1C.$$

由判定定理 1，$\triangle BAC\cong\triangle BA_1C$，即 $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$. 证毕.

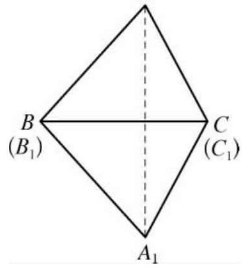


图 2-2

判定定理 4 如果一个三角形有两个角及一条边与另一个三角形的两个角及一条边对应相等，那么这两个三角形全等.

注意到三角形的内角和等于平角，判定定理 4 立即由判定定理 2 推出. 但三角形的内角和为平角，这个结论我们在第五节才讨论. 所以判定定理 4，我们现在不用，列在这里只是为了判定定理的完整.

如果一个三角形有两条边及一个角与另一个三角形的两条边及一个角对应相等，这两个三角形并不一定全等. 图 2－3 中的 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABC_1$ 就是反例，其中 $AB = AB$, $AC = AC_1$, $\angle B = \angle B$, 但两个三角形不全等(如图 2－3).

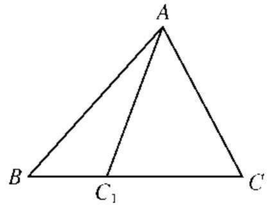


图 2－3

但对直角三角形却有：

判定定理 如果一个直角三角形的斜边及一条直角边与另一个直角三角形的斜边及一条直角边对应相等，那么这两个三角形全等.

已知：如图 2－4，在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 中，$\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$.

求证：$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

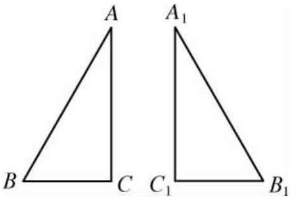


图 2－4

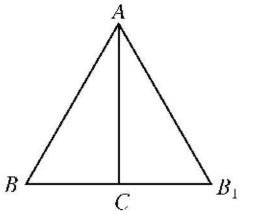


图 2－5

证明 因为 $AC = A_1C_1$，可以使线段 A_1C_1 与线段 AC 重合 (A_1 与 A 重合，C_1 与 C 重合). 并且可以使得 B、B_1 直线 AC 的两侧(如图 2－5). 因为 $\angle C$、$\angle C_1$ 都是直角，它们的和是平角，所以 B、C、B_1 三个点在一条直线上.

$\triangle ABB_1$ 中，$AB = AB_1$，所以 $\angle B = \angle B_1$.

由判定定理 4，$\triangle ABC \cong \triangle AB_1C$，即 $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. 证毕.

直角三角形 ABC 常常记作 $\text{Rt}\triangle ABC$.

在 $\triangle ABC$ 中，过 A 作对边 BC 的垂线，垂足为 D，则 AD 称为边 BC 上的高(如图 2－6). 同样可以定义 CA、AB 上的高 BE、CF. 三条高一定交于一点. 这点称为三角形的垂心(如图 2－7).

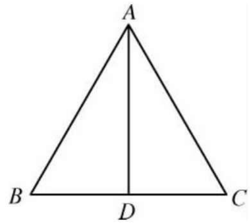


图 2 - 6

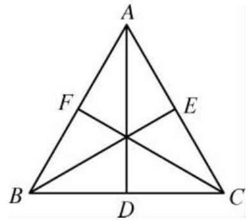


图 2 - 7

连结点 A 与边 BC 中点的线段(如图 2 - 8),称为边 BC 上的中线. 同样可以定义 CA、AB 上的中线. 三条中线交于一点. 这点称为三角形的重心.

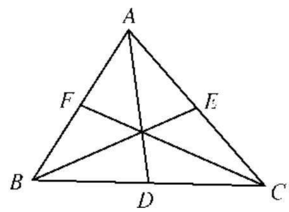


图 2 - 8

过线段 BC 的中点,并且与 BC 垂直的直线称为线段 BC 的垂直平分线或中垂线. 三角形三条边的垂直平分线交于一点. 这点称为三角形的外心.

如果点 D 在边 BC 上,并且 $\angle BAD = \angle DAC$,那么 AD 称为 $\angle BAC$ 的角平分线. 同样可以定义 $\angle ABC$、$\angle BCA$ 的角平分线. 三条角平分线交于一点. 这点称为三角形的内心.

以上四个关于三线共点的定理将在第十一节证明.

设 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, $AB = AC$, AD 是高,那么

$$\mathrm{Rt}\triangle ABD \cong \mathrm{Rt}\triangle ACD.$$

所以 $BD = CD$, $\angle BAD = \angle CAD$,即等腰三角形底边上的高,是底边上的中线,也是顶角的平分线.

由于底边上的中线、顶角的平分线都是唯一的,所以底边上的中线、顶角的平分线也是底边上的高. 即

等腰三角形底边上的高、中线、顶角平分线三者相同.

于是等腰三角形底边上的高也是底边的垂直平分线.

关于垂直平分线,我们有:

定理　线段垂直平分线上的点,到线段两端距离相等.

已知:线段 BC 的中点为 D,直线 $AD \perp BC$,点 M 在 AD 上.

求证: $MB = MC$.

证明

因为 $\angle MDB = \angle MDC = 90^\circ$, $BD = CD$, $MD = MD$,所以 $\triangle MDB \cong \triangle MDC$,

$MB = MC$.

证毕.

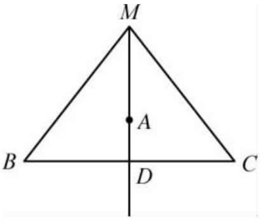


图 2－9

图 2－9 中，如果沿着直线 AD 对折，那么 M 点与自己重合，D 点也与自己重合. 由于 $BC \perp AD$，所以射线 DB 与 DC 重合. 又由于 $DB = DC$，所以 B 点与 C 点重合. 从而 MB 与 MC 重合，$\triangle MDB$ 与 $\triangle MDC$ 重合. 我们说 $\triangle MDB$ 与 $\triangle MDC$ 关于直线 AD 对称.

一般地，如果沿直线 l 对折，图形 F_1 与图形 F_2 重合，那么我们就说图形 F_1 与图形 F_2 关于直线 $\boldsymbol{l}$ 对称，l 称为对称轴. 这时对于每一对对称点 A_1、A_2，直线 l 是线段 A_1A_2 的垂直平分线.

如果图形 F 可以分成两个部分 F_1、F_2，而 F_1 与 F_2 关于直线 l 对称，那么 F 称为轴对称图形，直线 l 称为它的对称轴.

线段是轴对称图形，对称轴是垂直平分线.

角是轴对称图形，对称轴是角平分线.

等腰三角形是轴对称图形，对称轴是底边上的高.

三条边都相等的三角形称为等边三角形或正三角形. 正三角形的三个角都相等. 三个角都相等的三角形是正三角形.

正三角形是轴对称图形. 有三条对称轴，每条边上的高都是对称轴.

3. 几何中的不等

这一节介绍几个不等的关系.

将 $\triangle ABC$ 的一条边延长,例如设 CD 是 BC 的延长线,则 $\angle ACD$ 称为 $\triangle ABC$ 的外角(如图 3 - 1).

类似地,可以作出其他外角.

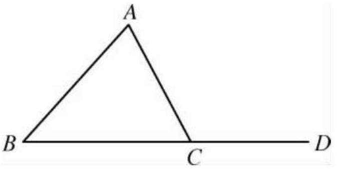


图 3 - 1

设有线段 AB 与 $A'B'$. 如果 AB 内有一点 C,使得 $AC=A'B'$,那么就说 AB 大于 $A'B'$($A'B'$ 小于 AB),记作 $AB>A'B'$($A'B'<AB$).

设有 $\angle AOB$ 与 $\angle A'O'B'$. 如果 $\angle AOB$ 内有一条射线 OC,使得 $\angle AOC=\angle A'O'B'$,那么就说 $\angle AOB$ 大于 $\angle A'O'B'$($\angle A'O'B'$ 小于 $\angle AOB$),记作 $\angle AOB>\angle A'O'B'$($\angle A'O'B'<\angle AOB$).

定理 **1** 三角形的外角大于和它不相邻的内角.

已知:$\triangle ABC$,CD 是 BC 的延长线.

求证:$\angle ACD>\angle A$.

证明 如图 3 - 2. 设 E 为边 AC 的中点. 延长中线 BE 到 F,使 $EF=BE$.

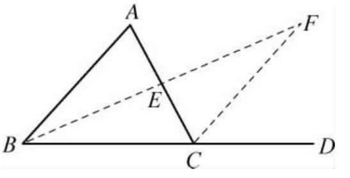


图 3 - 2

因为 $\angle AEB=\angle CEF$(对顶角相等),$EA=EC$,$EB=EF$,所以 $\triangle AEB\cong\triangle CEF$.

从而

$$\angle A=\angle ECF.$$

因为 CF 在 $\angle ACD$ 内,所以

$$\angle ACD>\angle ECF.$$

即 $\angle ACD>\angle A$. 证毕.