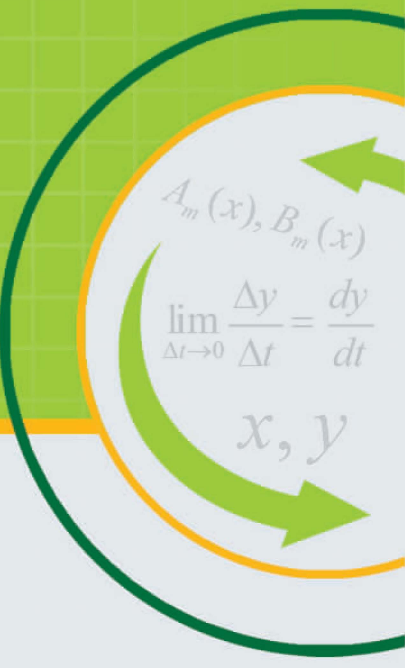
高等教育试用教材

常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

主编 贾保华

- 基本概念
- 一阶微分方程的初等解法
- 一阶微分方程的基本理论
- 高阶微分方程
- 线性微分方程组



黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社

高等教育试用教材

常微分方程

CHANGWEIFEN FANGCHENG

主编　贾保华

黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/贾保华主编. —银川:宁夏人民出版社,2011.12

ISBN 978-7-227-04924-1

Ⅰ.①常… Ⅱ.①贾… Ⅲ.①常微分方程 Ⅳ.①0175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 267347 号

常微分方程 贾保华 主编

责任编辑 郭永顺 马宗明

封面设计 张 文

责任印制 李宗妮

黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社 出版发行

地　　址 银川市北京东路 139 号出版大厦（750001）

网　　址 http://www.yrpubm.com

网上书店 http://www.hh-book.com

电子信箱 renminshe@yrpubm.com

邮购电话 0951-5044614

经　　销 全国新华书店

印刷装订 宁夏书宏印刷有限公司

开 本 880 mm × 1230 mm 1/32　印 张 9.25　字 数 200 千

印刷委托书号 (宁)0012215　印 数 500 册

版 次 2011 年 12 月第 1 版　印 次 2011 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-227-04924-1/O·9

定 价 25.00 元

序　言

常微分方程已有悠久历史，而且继续保持着进一步发展的活力，其主要原因是它的根源深扎在各种实际问题之中。上世纪三十年代，定性理论中的重要研究对象——极限环（孤立周期解），在当时蓬勃发展起来的无线电技术理论中找到它的对应物——孤立稳定的等幅震荡，使常微分方程定性理论在当时最新的技术科学中建立了自己的落脚点，得到了实际的应用，从而刺激了它飞跃地发展。在完善理论的同时继续深入其它新兴技术学科的领域。近几十年来，世界科学技术进入了核能、火箭、人造卫星的时代，常微分方程和它的定性理论及方法不论在应用上，还是在理论上均不断的扩展着自身的领域，显示出前所未有的强大生命力。

当今已进入到信息时代，计算机及其技术已经普及应用，正是由于计算机技术的发展才更有力的促进了常微分方程的理论和应用方面的发展。使用计算机和数学软件可大大的促进数学包括常微分方程的学习、教学和研究，从而使得常微分方程的理论及其应用都得到了更快更新的发展。目前，在高等院校，大学生数学建模竞赛已经普及，研究生数学建模竞赛也已开展，这是高等院校提高素质教育及教学改革的重要手段。而常微分方程

模型是数学模型的基本内容之一，这也为常微分方程的应用开辟了新的途径。

常微分方程这门课程是师范院校数学系的一门基础课，它是在学生已经掌握了数学分析、线性代数、空间解析几何及普通物理等课程的基础知识的基础之上，首次较普遍、较深入的利用上述课程的知识，用以初步解决数学理论和实际问题中出现的一批重要而基本的微分方程问题。同时，在这个过程中自然地提出和建立起微分方程本身的基础理论和基本方法，也为若干后继课程(如数理方程、微分几何、泛函分析等)作好了准备。当然它本身的发展又离不开复变函数论、实变函数论、拓扑学及代数几何分支的支援。我们深深地感觉到，它在训练学生分析问题和初步解决某些实际问题的能力方面起着显著的作用。它的理论和方法，过去和现在都对力学、天文、物理、化学、生物各种技术科学(如自动控制、无线电电子学等)及若干社会科学(如人口理论、经济预测等)提供了有力的工具。后者反过来也不断向它提出新的问题，使它获得了不断深入向前发展的基础。

这本教材是作者本人在多年讲授这门课程的过程中，根据本人的教学体会以及一些感受，又紧密联系教学大纲和教学计划，再结合学生学习这门课程的过程中一些实际现状而写出的。力求体现同类教材的特色和优点，努力做到产生一本让学生容易学习，易于掌握，又能深入理解和掌握这门课程的理论知识的教材。本教材从培养目标出发，注意体现“少、广、新”的原则，力求培养学生具有坚实的理论基础和广阔的视野。在表达方面，在充分注意科学性和严密性的前提下，力求通俗易懂，深入浅出，详尽透彻，易教易学。教材中所安排的内容，基本上符合教学计

划所规定的学时要求。

全书共分为五章内容。其中第一章是基本概念方面的知识，主要介绍了微分方程及其解得定义和几何解释以及一些基本知识，以此作为基础，以便尽快进入主题。第二章主要介绍了一阶微分方程的初等解法，详细介绍了十多种类型的一阶微分方程的解法，其中一阶线性方程的解法，恰当方程和积分因子法贯穿各种求解法之中。第三章是解的存在唯一性定理。微分方程最重要的理论基础是解得存在唯一性定理和解对初值的连续、可微性定理。这章内容是重点之一，有必要深入理解和掌握。第四章，高阶微分方程，主要介绍了 n 阶线性方程的基本理论和解法。分为线性和非线性方程两类方程进行。条理和主线清晰，涉及到的概念较多，编写中力求兼顾理论上的严密性和解法上的实用性，并采用了向量、矩阵和矩阵指数函数等方法。本章内容也是本课程的重点之一，需要重点讲授和学习。为加强对学生的能力培养和科学的思维方法的训练，本书每章、节中间和后面都配备了较多的例题和习题，它们都经过精心选择，与正文内容密切配合，有些还是正文内容的补充和提高，参看这些例题和演练这些习题，有助于加深对教材中基本理论知识的理解和掌握。

编写这本教材，本人虽竭尽全力。但由于作者水平有限，书中难免存在缺点错误和不妥之处。敬请各位同行、专家和读者批评指正，并提出宝贵的修改意见。

贾保华

2011 年 11 月 10 日

目　录

第一章　基本概念

常微分方程是由人类生产实践的需要和发展而产生的。所谓微分方程，就是联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数或微分的方程。物理学、化学、生物学、工程技术和某些社会科学中的大量问题，一旦加以精确的数学描述、往往会出现微分方程。一个实际问题只要转化为微分方程，那么问题的解决就有赖于对微分方程的研究。在数学学科的一些分支中，微分方程也是经常用到的重要工具之一。本章将通过一些具体的实例，介绍如何建立微分方程的问题，以及有关的一些最基本的概念。

§1　微分方程的实例

本节主要介绍几个微分方程的实例。通过这些例题可以看到从各方面提出的微分方程的问题。

例 1　求一曲线，该曲线在各点 (x,y) 处的切线斜率为

$3x-2$，且过点（0, 1）。

解 设所求曲线的方程是 $y=y(x)$。由题意知所求曲线应满足方程 $\frac{dy}{dx}=3x-2$，这即为要建立的微分方程。求解该方程，求出 $y(x)$，问题得以解决。

例 2 人口估计问题

设 $y = y(t)$ 为某个国家在时间 t 的人口总数，增长率为 $r=a-by$，其中正常数 a，b 是生命系数。经测算得 a=0. 029, b 依赖于各国的社会经济条件，在无移民的情况下，试建立 $y = y(t)$ 应满足的微分方程。

解 因为 $y(t)$ 表示人口的总数，所以它是一个不连续的阶梯函数，为了应用微积分的方法，可用一个光滑的函数近似代替它，并把这个光滑的函数仍然记为 $y(t)$

人口总数 $y(t)$ 在时间 t 的变化率为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}$$

由已知条件，人口的变化率 $\frac{dy}{dt}$ 等于人口总数 $y(t)$ 与其增长率 $a-by$ 的乘积，故有

$$\frac{dy}{dt}=(a-by)y$$

这即为所要建立的微分方程。

例 3 摩托艇以 10 千米/小时的速度在静水上运动。全速

后停止了发动机，过 20 秒后，艇的速度减至 v_1=6 千米/小时。试求发动机停止 2 分钟后艇的速度。这里设水的阻力与艇的运动速度成正比。

解 令艇的速度为 $v=v(t)$，由牛顿第二定律得该艇的速度应满足方程，

$$m\frac{dv}{dt}=-kv \qquad (k>0)$$

或

$$\frac{dv}{dt}=\lambda v$$

其中 $\lambda=-\frac{k}{m}$。这即为要建立的微分方程。

例 4 一质量为 m 的物体, 在空中由静止自由下落，设空气阻力与运动速度成正比，试求物体运动速度的变化规律。

解 所求的物体运动速度变化规律,是时间 t 的未知函数。用 $v=v(t)$ 表示。物体下落时，受到重力与阻力的影响，重力 mg 和运动方向一致，阻力 kv， k 是比例系数，与运动方向相反。运动所受的净力为 $F=mg-kv$，由牛顿第二定律，即 $F=ma$（a 是加速度），得到方程

$$m\frac{dv}{dt}=mg-kv \quad （其中 a=\frac{dv}{dt}）$$

或

$$m\frac{dv}{dt}+kv=mg$$

满足该方程的函数 $v(t)$，即为所求的速度变化规律。

通过以上例题，我们看到产生微分方程的一些背景，当然我们还可以举出大量的实例，如在物理、化学、天文、生物、电子技术、自动控制、宇宙飞行等领域，都存在着大量的微分方程问题。因此，社会生产实践是微分方程取之不尽的基本源泉。微分方程是解决这类问题的一个非常有力的数学工具。这也是微分方程理论联系实际的一个重要方面。

作为一门基础课，我们应当把重点放到微分方程本身的问题上，即要掌握微分方程的一些基本理论并要学习各种各样类型的微分方程的求解方法，这也就是我们解决实际问题的必要工具。

习题 1.1

1． 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程。

（1）曲线上任意一点 $p(x,y)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积都等于常数 a^2。

（2）曲线上任意一点 $p(x,y)$ 的法线与 OX 轴的交点为 Q，

且有 $PQ=OP$.

（3）一曲线上任意一点 (x,y) 处的切线介于坐标轴间的部分总被切点分成相等的部分。

2. 潜水艇在水中下降时，所受阻力与下降速度成正比。潜水艇由静止下降，求下降时速度与时间的关系

3. 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成比例，如果物体在20分钟内由100℃冷却至60℃，那么在多长时间内，这个物体的温度达到30℃？假设空气的温度为20℃。

§2　基本概念

在§1节中已经介绍了微分方程产生的背景以及如何建立微分方程的问题。本节将介绍微分方程的概念以及一些相关的基本概念

1) **定义 1.1**　含有自变量、未知函数、以及未知函数的导数（或微分）的等式称作微分方程。

例如：

$$\frac{dy}{dx}=5x^2-2y\ ,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+3(\frac{dy}{dx})^2-15xy=e^x\ ,$$

$$y''+2y=\sin x\ ,\qquad xy''-5y'+3xy=\sin x$$

都是微分方程。

微分方程中出现的未知函数只含有一个自变量。则这种方程称作常微分方程。上述四个方程都是常微分方程。

自变量的个数是两个或两个以上的微分方程，称作偏微分方程。

例如:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=x^2-yz\text{，}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

是偏微分方程。其中 u 是未知函数， x ， y ， z 是自变量。

本书主要讨论常微分方程及其相关的概念与解法。为讨论方便，以下把常微分方程简称为微分方程或方程。

2) 方程的阶数、线性方程和非线性方程

方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为这个方程的阶。

如

$\frac{dy}{dx}=5x^2-2y$ ， $xy'-ye^x=\sin x$ ， $(\frac{dy}{dx})^2-3xy=\sqrt{x}$ 是一阶方程。

而

$\frac{d^2y}{dx^2}-2(\frac{dy}{dx})^3=\sin 3x$ ， $x^2y''-3xy'=\ln x$ 都是二阶方程。

$$\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0$$ 是 n 阶方程。

一阶方程的一般形式是 $F(x,y,\frac{dy}{dx})=0$ 或，$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，n 阶方程的一般形式是 $F(x,y,y',y''\cdots,y^{(n)})=0$。已解出 n 阶导数的 n 阶方程的一般形式是

$$\frac{d^n y}{dx^n}=f(x,y,y'...,y^{(n-1)})$$

线性方程是微分方程中一类极其重要的方程，如果在方程 $F(x,y,y',y''\cdots,y^{(n)})=0$ 中，左端是 y 及 $y',y''...,y^{(n)}$ 的一次有理整式，则称该方程是线性方程。否则称为非线性方程。

例如方程:

（1）$x\frac{dy}{dx}+y=x^2$ （2）$4\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$

（3）$x^2\frac{d^3y}{dx^3}+2x\frac{d^2y}{dx^2}+7\frac{dy}{dx}-5y=0$

分别是一阶、二阶、三阶的线性方程.

而

（4）$\frac{dy}{dx}-\frac{x}{y}=0$ （5）$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+\sin y=0$

（6）$\cos(\frac{dy}{dx})+x\frac{d^3y}{dx^3}-\sqrt{y}=x^3$

分别是一阶、二阶、三阶的非线性方程。

线性方程与非线性方程有很大的不同，但在一些条件下，他们之间又有联系，因此，抓住这两者之间的区别与联系，是