



宁夏固原市回民中学新课程校本教材

总主编
◎ 晁广斌

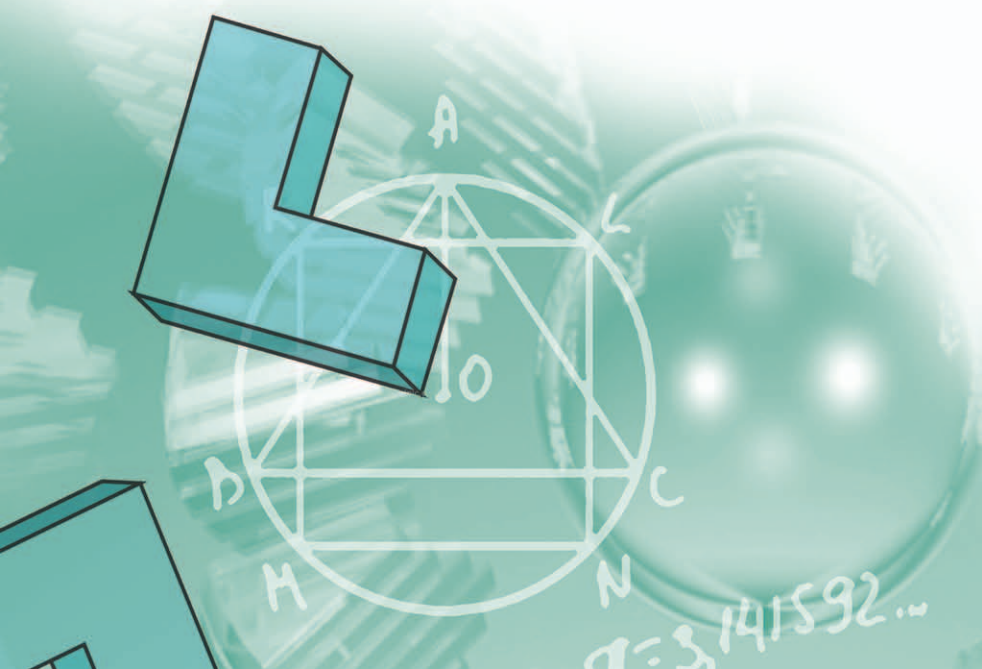
X I N K E T A N G

新课堂 5

必修

数 学

主编 朱全林



黄河出版传媒集团
宁夏教育出版社



宁夏固原市回民中学新课程校本教材

总主编
◎ 晁广斌

X I N K E T A N G

新课堂 5

必修

数 学

主编 朱全林



黄河出版传媒集团
宁夏人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课堂. 高中数学. 5: 必修 / 晁广斌主编. —银川:
宁夏人民教育出版社, 2010.8

ISBN 978-7-80764-340-1

I. ①新… II. ①晁… III. ①数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 171471 号

新课堂 高中数学 必修 5

晁广斌 主编

责任编辑 刘毅伟

封面设计 赫欢

责任印制 刘丽

黄河出版传媒集团
宁夏人民教育出版社 出版发行

地址 银川市北京东路 139 号出版大厦(750001)

网址 www.nxcbn.com

网上书店 www.hh-book.com

电子信箱 nxhhsz@yahoo.cn

邮购电话 0951-5014284

经销 全国新华书店

印刷装订 宁夏雅昌彩色印务有限公司

开本 880mm×1230mm 1/16 印张 10 字数 316 千

印刷委托书号 (宁)0007528 印数 1330 册

版次 2010 年 8 月第 1 版 印次 2010 年 8 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978-7-80764-340-1/G·1273

定价 14.00 元

版权所有 翻印必究

《新课堂》编写委员会

主 任:晁广斌

副主任:李有民 马金成 郭新仁 汤效震

委 员:马廷军 何桂琴 张瑞硕 褚万宗 李续正 马云刚
王志杰 杨晓红 李华云 刘国奇 张 园 张 强
李立鹏 杨 平 姚清涛 朱全林 吴小红 曹巧玲
米文福 王卫安 郭云峰 季荣岩 郭九庆 郭志明
崔福刚 李志成 马毅兵 王 勇 樊治平 海 波
马应国 马德贵 尹文铎

本 册 主 编:朱全林

本册编写人员:褚万宗 季 彬

固原市回民中学是固原市市直唯一一所民族中学,自治区第三所财政特补中学,固原市委、市政府重点建设的民族示范性高级中学。学校坐落在固原新区大明城。国家投资 1.2 亿元,在 338 亩的土地上,给山区广大青少年建设了一个花园式学校,可谓学习的乐园。

回民中学以兼容的心胸、并蓄的姿态,广泛吸纳全国各地贤俊之才,培养了一支优秀的教师队伍,其中,中国人民大学、北京师范大学、华东师范大学、华中师范大学、东北师范大学、陕西师范大学、兰州大学和西安外国语大学等全国重点大学的优秀毕业生来我校从教的就超过 40 人。目前,在宁南山区高级中学里,回民中学拥有学历结构最优的教师队伍,可谓师资雄厚。

新的领导班子以狠抓教学质量为突破口,以提高教师教学质量为首要工作,以培养优秀人才为目标,组织了一批长期工作在教学第一线、教学经验丰富、学习成绩突出的骨干教师,依据新课程标准和《2009 年宁夏高考考试说明》,开展课题研究,集体攻关,精心编写了这套高中教辅丛书——《新课堂》。

《新课堂》是经宁夏新闻出版局审定同意,由宁夏人民教育出版社出版的我校第一套校本教材,本丛书与人教版高中新课程教材配套使用,凝聚了我校一大批名师的心血,具有自己鲜明的特色。

一、《新课堂》是回民中学教师教育教学的经验积累

《新课堂》注重知识与技能、过程与方法、情感态度与价值观三维目标的和谐发展。通过构建系统化的知识结构,提供多样化的学习材料,精心设计研讨式的问题情境,帮助学生理解课程内容,培养学生的探究意识、创新精神和实践能力。

二、《新课堂》是回民中学教师集体智慧的结晶

我们强调,最有价值的课题是在实践中产生的,课题研究的生命力在于给实践以指导。在《新课堂》编写过程中,我们突出新课程理念,全面贯彻和落实新课程精神,从我校实际出发,注重学法指导,提倡自主探究,强调能力培养,突显创新设计,力求让广大师生耳目一新。



三、《新课堂》是回民中学学生打好基础的坚实保证

《新课堂》更加注重针对性和实效性,紧扣教材,知识点全面,层次清晰,选择每节课的重点和难点进行剖析,循序渐进,加深学生对主干知识的理解和认识。同时,考查方式多样,内容新颖,形式上更加实用。单元测试卷和参考答案活页装订,便于阶段检测。

四、《新课堂》是回民中学学生通向成功的高速公路

《新课堂》促进学生学习方式的转变,倡导积极主动的学习态度和自主、合作、探究的学习方式。本套丛书各栏目的设置特别注重调动学生学习的积极性,发挥学生的主体作用,挖掘他们的学习潜能,通过点拨学习思路、方法和技巧,诠释课程的重点和难点,引导学生获取知识,夯实基础,逐步形成自觉学习的习惯。

本套丛书融历史与未来的辩证理念为一体,是内容和形式的完美结合,编排和设计大气、新颖。我们自信而来,期待与您一起分享这份精彩。

《新课堂》丛书一定有许多不足,广大师生在使用过程中有好的建议和宝贵意见,请不吝赐教,以便修订,使丛书的质量不断提高,日臻完善。

编 者

2009 年 8 月

目录

CONTENTS

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理 /001

1.1.1 正弦定理(一) /001

1.1.1 正弦定理(二) /003

1.1.2 余弦定理(一) /006

1.1.2 余弦定理(二) /008

1.2 应用举例 /011

单元知识整合 /016

第二章 数列

2.1 数列的概念与简单表示法(一) /021

2.1 数列的概念与简单表示法(二) /025

2.2 等差数列(一) /028

2.2 等差数列(二) /032

2.3 等差数列的前 n 项和(一) /035

2.3 等差数列的前 n 项和(二) /039

2.4 等比数列(一) /042

2.4 等比数列(二) /046

2.5 等比数列的前 n 项和 /049

单元知识整合 /053

第三章 不等式

3.1 不等关系与不等式 /060

3.2 一元二次不等式及其解法(一) /064

3.2 一元二次不等式及其解法(二) /068

3.3 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题 /072

3.3.1 二元一次不等式(组)与平面区域 /072

3.3.2 简单的线性规划问题 /076

3.4 基本不等式: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ /081

单元知识整合 /085

第一章测试卷 /091

第二章测试卷 /095

第三章测试卷 /099

综合测试卷 /103

参考答案 /107

第一章 解三角形

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理(一)

——自·主·探·究——

课标导学

kebiaodaoxue

1. 理解正弦定理的推导过程.
2. 掌握正弦定理的内容.
3. 能运用正弦定理解决一些简单的三角形问题.

基础梳理

jichushuli

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 a, b 分别为角 A, B 所对的边, 则 $a > b \Leftrightarrow$ _____.
2. 正弦定理: 在一个三角形中, _____, 即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. (其中 R 为这个三角

形外接圆的半径)

3. 正弦定理的常见变形

- (1) $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
- (2) $\sin A =$ _____, $\sin B =$ _____, $\sin C =$ _____.
- (3) $a:b:c =$ _____, $\frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C} =$ _____.
- (4) $a \sin B =$ _____, $b \sin C =$ _____, $a \sin C =$ _____, $\frac{a}{b} =$ _____, $\frac{a}{c} =$ _____, $\frac{b}{c} =$ _____.

4. 一般地, 把三角形的三个角 A, B, C 和它们的对边 a, b, c 叫做三角形的_____, 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做_____.

——重·难·点·突·破——

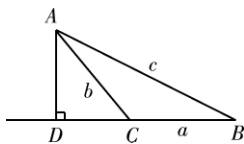
疑难剖析

yinanpoux

1. 有关正弦定理的推导

当三角形为直角三角形或锐角三角形时的情况, 课本上已有推导过程, 下面推导当三角形为钝角三角形时的情况.

若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 如图, 已知 C 为钝角, 设 BC 边上的高为 AD , 根据三角函数的定义, $AD = c \sin B$, $AD = b \sin \angle ACD = b \sin(\pi - C) = b \sin C$, $\therefore c \sin B = b \sin C$, 即 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. 如果设 AB 边上的高为 CE , 同理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.



综上所述, 在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等, 即 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

2. 正弦定理的应用

- (1) 已知两角和任一边, 求其他两边和一角.

(2) 已知两边和其中一边的对角, 求另一边的对角, 从而求其他的边和角.

(3) 已知其中一边和这一边的对角, 求这个三角形外接圆的半径.

对于第(1)类, 其解是唯一确定的, 他一般先由三角形内角和求得第三个角, 再利用正弦定理求其他两边.

对于第(2)类, 其解不一定唯一, 会出现一解、两解或无解三种情况(详细剖析见下一节).

典型题解

dianxingti jie

题型1

已知两角及一边解三角形

例1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $c = 10$, $A = 45^\circ$, $C = 30^\circ$, 求 a, b 和 B .

解析 本题考查正弦定理的应用, 已知两角 A 和 C , 可求出第三个角 B 为 105° , 然后利用正弦定理求出两边 a 和 b , 在求解的过程中, 要注意对“ $\sin 105^\circ$ ”作三角变换.

答案 $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{10 \times \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 10\sqrt{2}.$$

$$B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ.$$

$$\text{又} \because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{10 \times \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = 20 \sin 75^\circ$$

$$= 20 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

$$\therefore a = 10\sqrt{2}, b = 5(\sqrt{6} + \sqrt{2}), B = 105^\circ.$$

[点评] 如果已知三角形的任意两个角与一边,可由三角形的内角和定理,计算出三角形的第三个角,并由正弦定理计算出三角形的其他两边.

[借题发挥1] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 10, B = 60^\circ, C = 45^\circ$,则 c 等于 ()

A. $10 + \sqrt{3}$

B. $10(\sqrt{3} - 1)$

C. $\sqrt{3} + 1$

D. $10\sqrt{3}$

题型2 已知两边和其中一边的对角解三角形

例2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}, B = 45^\circ$,求 A, C 和 c .

[解析] 本题考查了正弦定理的应用,利用正弦定理先求出 A ,然后利用 a 和 b 的关系(大边对大角)得到 A 和 B 的关系,从而确定角 A 的个数及大小,求出其余的边和角.

[答案] 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, $\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\because a > b, \therefore A = 60^\circ \text{ 或 } A = 120^\circ.$$

$$\text{当 } A = 60^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ,$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2};$$

$$\text{当 } A = 120^\circ \text{ 时, } C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 45^\circ - 120^\circ =$$

$$15^\circ, c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore A = 60^\circ, C = 75^\circ, c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \text{ 或 } A = 120^\circ, C = 15^\circ, c =$$

$$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}.$$

[点评] 已知三角形两边及一边对角解三角形时,利用正弦定理求出另一边的对角,再求其余的边和角.在利用正弦定理求解的过程中,要注意灵活使用三角公式及正弦定理的变形,如 $c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{a \sin C}{\sin A}$ 等;另外,此种题型往往碰到解的个数不确定的情况,此时,可根据边和边、角和角之间的关系进行判断.

[借题发挥2] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b = \sqrt{2}, c = 1, B = 45^\circ$.求 a 和 C .

题型3 正弦定理与三角公式的综合应用

例3 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $B = 60^\circ, \tan A \tan C = 2 + \sqrt{3}$,又知顶点 C 的对边 c 上的高为 $4\sqrt{3}$,求三角形三边的长.

[解析] 本题考查正弦定理与三角公式的简单的综合应用问题,由已知条件不难求出 $\tan A$ 和 $\tan C$,从而求出 A 和 C ,然后根据边 $c = 4\sqrt{3} \cot A + 4\sqrt{3} \cot B$,进而问题得解.

[答案] $\because B = 60^\circ, \therefore A + C = 120^\circ$.

$$\text{又 } \tan(A + C) = \frac{\tan A + \tan C}{1 - \tan A \tan C}, \tan A \tan C = 2 + \sqrt{3} \quad ①,$$

$$\therefore \tan A + \tan C = 3 + \sqrt{3} \quad ②,$$

$$\text{由 } ①② \text{ 得 } \tan A = 1, \tan C = 2 + \sqrt{3} \text{ 或 } \tan A = 2 + \sqrt{3}, \tan C = 1,$$

$$\therefore A = 45^\circ, B = 60^\circ, C = 75^\circ \text{ 或 } A = 75^\circ, B = 60^\circ, C = 45^\circ.$$

$$\text{当 } A = 45^\circ \text{ 时, } b = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{6}, a = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 8,$$

$$c = 4\sqrt{3} \cot 45^\circ + 4\sqrt{3} \cot 60^\circ = 4\sqrt{3} + 4;$$

$$\text{当 } A = 75^\circ \text{ 时, } b = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 75^\circ} = 4\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1), a = 8,$$

$$c = 4\sqrt{3} \cot 75^\circ + 4\sqrt{3} \cot 60^\circ = 8(\sqrt{3} - 1).$$

$\therefore$ 三边 a, b, c 的长分别为 $8, 4\sqrt{6}, 4\sqrt{3} + 4$ 或 $8, 4\sqrt{6}(\sqrt{3} - 1), 8(\sqrt{3} - 1)$.

[点评] 正弦定理的考查与三角函数结合在一起,以正弦定理及其变形公式为工具,利用三角恒等变换解决问题.

[借题发挥3] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $c = 10, \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}$,求 a, b 及 $\triangle ABC$ 的内切圆半径.

提·升·训·练

1. 在 $\triangle ABC$ 中,一定成立的是 ()

A. $a \sin A = b \sin B$

B. $a \cos A = b \cos B$

C. $a \sin B = b \sin A$

D. $a \cos B = b \cos A$

2. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角之比为 $A : B : C = 3 : 2 : 1$,那么对应的三边之比 $a : b : c$ 等于 ()

A. $3 : 2 : 1$

B. $\sqrt{3} : 2 : 1$

C. $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$

D. $2 : \sqrt{3} : 1$

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 3, b = 3\sqrt{3}, B = 60^\circ$,则 a 所对角的正弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 8, B = 60^\circ, C = 75^\circ$,则 b 等于 ()

A. $4\sqrt{2}$

B. $4\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{6}$

D. $\frac{32}{3}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中, $B=60^\circ$, 最大边与最小边之比为 $(\sqrt{3}+1):2$, 则最大角为 ()
A. 45° B. 60° C. 75° D. 90°
6. $\triangle ABC$ 中, $A=\frac{\pi}{3}$, $BC=3$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 ()
A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$
B. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$
C. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$
D. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$
7. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, 已知 $A=105^\circ$, $B=45^\circ$, $b=2\sqrt{2}$, 则 $c=$ _____.
8. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A=60^\circ$, $a=3$, 则 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=$ _____.
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\tan A=\frac{1}{3}$, $C=150^\circ$, $BC=1$, 则 $AB=$ _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A=60^\circ$, 外接圆半径 $R=\sqrt{3}$, 则 $a=$ _____.

11. 解答下列各题:

- (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A=45^\circ$, $a=2$, $b=\sqrt{2}$, 求 B ;
(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=10$, $b=8$, $A=70^\circ$, 求 $\sin B$.

12. 锐角 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 设 $B=2A$, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.

1.1.1 正弦定理(二)

——自·主·探·究——

课标导学

kebiaodaoxue

1. 熟练掌握正弦定理及其变式的结构特征和作用.
2. 探究三角形的面积公式, 并结合正弦定理解三角形.
3. 能根据条件判断三角形的形状.
4. 能根据条件判断三角形解的个数.

基础梳理

jichushuli

1. 在解三角形时, 常用到以下的结论
- (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A>B \Leftrightarrow a>b \Leftrightarrow$ _____.
- (2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=$ _____, $A+B=$ _____,
 $\frac{A+B}{2}=$ _____; $\cos(A+B)=$ _____, $\cos \frac{A+B}{2}=$ _____,
 $\sin(A+B)=$ _____, $\sin \frac{A+B}{2}=$ _____.

(3) 在锐角三角形中, $A+B>\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ _____ $\Leftrightarrow$ _____.

2. 三角形的面积公式

- (1) 已知一边和边上的高: $S=\frac{1}{2}ah_a$, $S=$ _____,
 $S=$ _____.
- (2) 已知两边及其夹角: $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, $S=$ _____,
 $S=$ _____.
- (3) 已知三边 a, b, c 及内切圆的半径 r : $S=$ _____.
- (4) 已知三边 a, b, c (海伦公式), $S=$ _____,
 这里 $p=$ _____.

——重·难·点·突·破——

疑难剖析

yinanpoux

1. 三角形解的个数的讨论

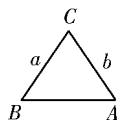
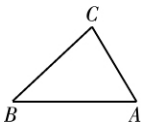
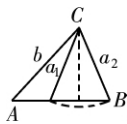
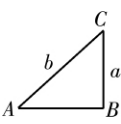
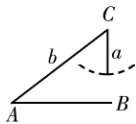
利用正弦定理解决“已知两边和其中一边的对角, 求其他两角和一边”的问题时, 由于在某些情况下不能确定三角形, 可能出现一解、两解或无解的情况, 应结合图象并根据

“三角形大边对大角”来判断解的情况, 做到正确取舍. 下面以“已知 a, b 和 A 时解三角形”为例加以说明.

(1) 若 $A \geq 90^\circ$, 由于一个三角形中不能有两个直角或钝角, 因此 B 必为锐角, 即 $B < A$, 从而当 $a > b$ 时, 有一解; 当 $a \leq b$ 时, 无解.

(2) 当 $A < 90^\circ$, 如下表:

表一

$a = b$	$a > b$	$a < b$		
		$a > b \sin A$	$a = b \sin A$	$a < b \sin A$
 一解	 一解	 两解	 一解	 无解

2. 三角形形状的判断

三角形按角分为: 锐角三角形、直角三角形、钝角三角形; 按边分为: 等腰三角形、不等边三角形; 等腰三角形中包含等腰直角三角形. 应用正弦定理判定三角形形状时通常需由正弦定理实现边角转化得出边的关系或角的关系, 即要么转化为边, 要么转化为角, 进而得出结论, 在正弦定理的推广中, $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ 是边转化为角的主要工具.

典型题解

dianxingtijie

题型1

已知两边及其中一边的对角, 判断三角形解的情况

例1 已知下列各三角形中的两边及其中一边的对角, 先判断三角形是否有解. 有解的, 解三角形.

(1) $a = 7, b = 8, A = 105^\circ$;

(2) $a = 10, b = 20, A = 80^\circ$;

(3) $a = 2\sqrt{3}, b = 6, A = 30^\circ$.

解析 本题考查已知两边及一边的对角判断三角形解的个数问题, 可利用正弦定理结合三角形内角和定理解决.

答案 (1) $a = 7, b = 8, a < b, A = 105^\circ > 90^\circ$, $\therefore$ 本题无解.

(2) $a = 10, b = 20, a < b, A = 80^\circ < 90^\circ$, 讨论如下:

$\therefore b \sin A = 20 \sin 80^\circ > 20 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$,

$\therefore a < b \sin A$, $\therefore$ 本题无解.

(3) $a = 2\sqrt{3}, b = 6, a < b, A = 30^\circ < 90^\circ$.

又 $\therefore b \sin A = 6 \sin 30^\circ = 3, a > b \sin A$, $\therefore$ 本题有两解.

由正弦定理得

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{6 \sin 30^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } B = 60^\circ \text{ 或 } 120^\circ.$$

当 $B = 60^\circ$ 时, $C = 90^\circ$,

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3} \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 4\sqrt{3};$$

当 $B = 120^\circ$ 时, $C = 30^\circ$,

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2\sqrt{3} \sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

$\therefore B = 60^\circ, C = 90^\circ, c = 4\sqrt{3}$ 或 $B = 120^\circ, C = 30^\circ, c = 2\sqrt{3}$.

点评 对于解决已知两边及其中一边的对角, 判断三角形解的个数的问题, 如果所给角是直角或钝角, 则根据大角对大边来判断; 如果所给角是锐角, 则根据有解、无解的图形(表一)来判断.

借题发挥1 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a = 2\sqrt{3}, A = 30^\circ$, 讨论当 b 为

何值(或在什么范围内)时, 三角形有一解、两解或无解?

题型2

判定三角形的形状

例2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b \sin B = c \sin C$, 且 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$, 试判断三角形的形状.

解析 本题考查利用正弦定理判定三角形形状的问题, 关键是将已知条件中的边角关系式进行转化, 要么都用边表示, 要么都用角表示, 然后得出结论. 本题将角转化为边较简单.

答案 由正弦定理得 $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$,

$$\therefore b \cdot \frac{b}{2R} = c \cdot \frac{c}{2R}, \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2,$$

$$\therefore b^2 = c^2, a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等腰直角三角形.}$$

点评 (1) 要判断三角形的形状特征, 必须深入研究边与边的大小关系: 是否两边相等? 是否三边相等? 是否符合勾股定理? 还要研究角与角的大小关系: 是否两个角相等? 是否三个角相等? 有无直角或钝角?

(2) 解题的思想方法是: 从条件出发, 利用正弦定理等进行代换、转化、化简、运算, 找出边与边的关系或角与角的关系, 从而作出正确判断.

(3) 一般有两种转化方向: 要么转化为边, 要么转化为角.

借题发挥2 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a \cos A = b \cos B$, 求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形.

题型3 应用正弦定理及变形证明一些三角恒等式

例3 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $\frac{a - c \cos B}{b - c \cos A} = \frac{\sin B}{\sin A}$.

[解析] 本题考查利用正弦定理及其变形证明三角恒等式问题,观察等式的特点,有边有角,需把边、角统一,为此用正弦定理将 a, b, c 分别转化为 $\sin A, \sin B, \sin C$,此时,本题完全转化成三角函数的问题了.

[答案] 由正弦定理得 $\frac{a - c \cos B}{b - c \cos A} = \frac{2R \sin A - 2R \sin C \cos B}{2R \sin B - 2R \sin C \cos A} =$

$\frac{\sin A - \sin C \cos B}{\sin B - \sin C \cos A}$, 又 $\because A + B + C = 180^\circ$,

$$\begin{aligned} \therefore \text{上式} &= \frac{\sin(180^\circ - B - C) - \sin C \cos B}{\sin(180^\circ - A - C) - \sin C \cos A} \\ &= \frac{\sin(B + C) - \sin C \cos B}{\sin(A + C) - \sin C \cos A} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C - \sin C \cos B}{\sin A \cos C + \cos A \sin C - \sin C \cos A} \\ &= \frac{\sin B \cos C}{\sin A \cos C} = \frac{\sin B}{\sin A}. \therefore \text{原等式得证.} \end{aligned}$$

[点评] 利用正弦定理及其变形证明三角恒等式,实质仍是三角函数的运算问题,只不过在运算过程中,我们需要利用正弦定理统一边或角;另外,要熟记三角形中的一些三角公式,并能灵活运用,如: $A + B + C = \pi$; $\sin(A + B) = \sin C$; $\cos(A + B) = -\cos C$; $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$; $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$ 等.

[借题发挥3] 在 $\triangle ABC$ 中,求证: $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

提·升·训·练

1. 不解三角形,下列判断中正确的是 ()

- A. $a = 7, b = 14, A = 30^\circ$, 有两解
B. $a = 30, b = 25, A = 150^\circ$, 有一解
C. $a = 6, b = 9, A = 45^\circ$, 有两解
D. $b = 9, c = 10, B = 60^\circ$, 无解

2. $\triangle ABC$ 中,已知 $a = 5\sqrt{2}, c = 10, A = 30^\circ$,则 B 等于 ()

- A. 105° B. 60°
C. 15° D. 105° 或 15°

3. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a = x, b = 2, B = 45^\circ$,若三角形有两解,则 x 的取值范围是 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$
C. $(2, 2\sqrt{2})$ D. $(2, 2\sqrt{3})$

4. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $0 < \tan A \tan B < 1$,则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 不能确定

5. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\sin A : \sin B : \sin C = m : (m + 1) : 2m$,则 m 的取值范围是 ()

- A. $(0, +\infty)$ B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$
C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

6. $\triangle ABC$ 中,已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 4 : 5 : 6$,又 $\triangle ABC$ 的周长为7.5,则其三边长分别为_____.

7. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\tan B}{\tan A}$,则 $\triangle ABC$ 是_____三角形.

8. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b = 2\sqrt{2}, a = 2$,且三角形有解,则 A 的取值范围是_____.

9. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $bc = 20, S_{\triangle ABC} = 5\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的外接圆半

径为 $\sqrt{3}$,则 $a =$ _____.

10. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B} = \frac{c}{\cos C}$,试判定 $\triangle ABC$ 的形状.

11. 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边,已知 $a = 2, C$

$= \frac{\pi}{4}, \cos \frac{B}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,求 $\triangle ABC$ 的面积 S .

1.1.2 余弦定理(一)

——自·主·探·究——

课标导学

kebiaodaoxue

1. 理解用向量的数量积证明余弦定理的方法.
2. 掌握并熟记余弦定理.
3. 能运用余弦定理及其推论解三角形.

基础梳理

jichushuli

1. 余弦定理: 三角形中任何一边的_____等于其他两边的

_____减去这两边与它们的_____的_____的
_____的_____倍, 即 $a^2 =$ _____,
 $b^2 =$ _____, $c^2 =$ _____.

2. 余弦定理的推论: $\cos A =$ _____, $\cos B =$ _____,
 $\cos C =$ _____.

——重·难·点·突·破——

疑难剖析

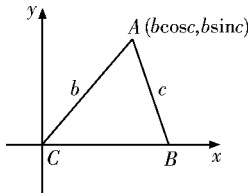
yinanpouxi

1. 余弦定理的推导

教科书中应用向量为工具, 通过向量的数量积构建了方程, 得出余弦定理, 下面我们再用两种方法证明余弦定理.

(1) 利用坐标法证明余弦定理

如图, 以 C 为原点, 边 CB 所在直线为 x 轴, 建立平面直角坐标系. 设点 B 的坐标为 $(a, 0)$, 点 A 的坐标为 $(b\cos C, b\sin C)$, 由两点间距离公式得 $|AB| = \sqrt{(b\cos C - a)^2 + (b\sin C - 0)^2}$.



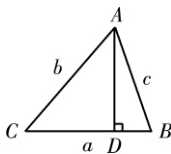
$$\text{即 } c^2 = b^2 \cos^2 C - 2ab \cos C + a^2 + b^2 \sin^2 C,$$

$$\text{整理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{同理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA, b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB.$$

(2) 利用三角法证明余弦定理

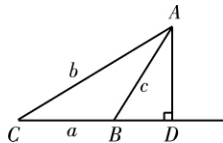
当三角形为锐角三角形时, 如图, $|AD| = b\sin C$, $|BD| = |BC| - |CD| = a - b\cos C$, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, 根据勾股定理得 $|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2$,



$$\text{整理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{同理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA, b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB.$$

当三角形为钝角三角形时, 如图, $|AD| = b\sin C$, $|BD| = |CD| - |BC| = b\cos C - a$, 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, 根据勾股定理得 $|AB|^2 = |AD|^2 + |BD|^2 = (b\sin C)^2 + (b\cos C - a)^2$,



$$\text{整理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

$$\text{同理, } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA, b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB.$$

2. 余弦定理的应用

(1) 已知两边和所夹的角解三角形, 基本方法是先用余弦定理求第三边, 再用正弦或余弦定理求另一角, 最后利用三角形内角和求第三个角.

(2) 已知三角形的三边解三角形, 基本方法是先用余弦定理求出一个角, 再用正弦定理或余弦定理求出另一个角, 最后利用三角形内角和定理, 求出第三个角.

典型题解

dianxingti jie



题型1 已知三角形的三边求角

例1 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=7, b=3, c=5$, 求最大角和 $\sin C$.

[解析] 本题考查余弦定理的应用(2), 根据三角形的性质大角对大边知 A 为最大角, 利用余弦定理的推论求得 A , 然后利用正弦定理求得 $\sin C$.

[答案] $\because a > c > b, \therefore A$ 为最大角,

$$\text{由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{2}, \therefore A = 120^\circ.$$

$$\text{又 } \because \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \sin C = \frac{c}{a} \sin A = \frac{5}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

[点评] (1) 已知三角形的三边求角, 主要利用余弦定理的变形公式即推论求解.

(2) 本题求 $\sin C$ 也可采用下面方法求解:

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14}, \therefore C \text{ 为锐角}, \therefore \sin C \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{5\sqrt{3}}{14}. \end{aligned}$$

[借题发挥1] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$,求 $\triangle ABC$ 各角的度数.

[借题发挥2] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 a, b 是方程 $x^2 - 5x + 4 = 0$ 的两个根, $C = 60^\circ$,求 c .

题型2 已知三角形的两边及其夹角,求第三边和另两角

例2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=2, b=2\sqrt{2}, C=15^\circ$,求 A, B 和 c .

[解析] 本题考查余弦定理的应用(1),已知 a 和 b 以及 C ,利用余弦定理公式 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 求得 c ,然后利用正弦定理或余弦定理求得 A 和 B ,另外注意在运算过程中,需对 15° 作“拆角”变换.

[答案] $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

由余弦定理得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4 + 8 - 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 8 - 4\sqrt{3}$,

$$\therefore c = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$,

$$\therefore \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{a \sin 15^\circ}{c} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore b > a, \sin A = \frac{1}{2}, \therefore A = 30^\circ,$$

$$\therefore B = 180^\circ - A - C = 135^\circ.$$

[点评] 已知三角形的两边及其夹角解三角形,主要根据余弦定理理解,在求解过程中,当然也可用正弦定理.

题型3 余弦定理公式的灵活应用

例3 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c ,已知 $a^2 + c^2 - b^2 = \sqrt{3}ac$,则 B 等于 ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$

[解析] 本题考查余弦定理的灵活应用,分析题中等式形式上的特点,确定变形的方法是两边同除以 $2ac$.

$$\therefore \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore B = \frac{\pi}{6}.$$

[答案] A

[点评] 加强余弦定理的灵活应用这方面的训练,搞清楚所给条件的特点,确定变形的方向及方法,做到有的放矢.

[借题发挥3] 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $(a+b+c)(b+c-a) = 3bc$,求 A .

提·升·训·练

- 已知 $\triangle ABC$ 中, $a:b:c=3:5:7$,则此三角形的最大角为 ()
A. 150° B. 120° C. 90° D. 135°
- 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,已知 $A = \frac{\pi}{3}$,
 $a = \sqrt{3}, b = 1$,则 c 等于 ()
A. 1 B. 2 C. $\sqrt{3} - 1$ D. $\sqrt{3}$
- 锐角 $\triangle ABC$ 中,已知 $b = 1, c = 2$,则 a 的取值范围是 ()
A. $(1, 3)$ B. $(1, \sqrt{5})$
C. $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$ D. 无法确定

- $\triangle ABC$ 中,已知 $a^2 - c^2 + b^2 = ab$,则 C 等于 ()
A. 60° B. 45° 或 135°
C. 120° D. 30°
- 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $A = 30^\circ, AB = 2, BC = 1$,则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$
- 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对边的长分别为 a, b, c ,设向量 $\mathbf{p} = (a+c, b)$, $\mathbf{q} = (b-a, c-a)$,若 $\mathbf{p} \parallel \mathbf{q}$,则 C 等于 ()
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
- 在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边,已知 $a =$

- $\sqrt{3}, b=3, C=30^\circ$, 则 $A =$ _____.
8. $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $a=1, b=\sqrt{7}, c=\sqrt{3}$, 则 $B =$ _____.
9. 在 $\triangle ABC$ 中, 三边的长为连续的自然数, 且最大角为钝角, 这个三角形三边的长分别为 _____.
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c , 已知 $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 7 : 8$. 则 $a : b : c =$ _____, $B =$ _____.
11. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a-b=4, a+c=2b$, 且最大角为 120° , 求三边长.

12. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 已知 a, b 是方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ 的两根, A, B 满足 $2\sin(A+B) = \sqrt{3}$.
- (1) 求 C ;
- (2) 求 c 及 $\triangle ABC$ 的面积.

1.1.2 余弦定理(二)

——自·主·探·究——

课标导学

kebiaodaoxue

1. 熟练掌握正、余弦定理在解决各类三角形问题中的应用.
2. 利用正、余弦定理判断三角形的形状.
3. 利用正、余弦定理解决一些综合问题.

基础梳理

jichushuli

1. 正弦定理: _____, 变形公式 _____.
2. 余弦定理: $a^2 =$ _____, $b^2 =$ _____, $c^2 =$ _____, $\cos A =$ _____, $\cos B =$ _____, $\cos C =$ _____.
3. 解三角形的类型
 - (1) 已知三边求三角, 利用 _____ 定理.
 - (2) 已知两边和它们的夹角, 求第三边和其他两个角, 利用 _____ 定理.

- _____ 定理.
- (3) 已知两角和任一边, 求其他两边和一角, 利用 _____ 定理.
- (4) 已知两边和其中一边的对角, 求第三边和其他两角, 用 _____ 定理.
4. 在 $\triangle ABC$ 中,
- $a^2 + b^2 < c^2 \Leftrightarrow \cos C < 0 \Leftrightarrow C > \frac{\pi}{2}$, 可得此三角形为 _____ 三角形.
- $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow \cos C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$, 可得此三角形为 _____ 三角形.
- $a^2 + b^2 > c^2 \Leftrightarrow \cos C > 0 \Leftrightarrow C < \frac{\pi}{2}$, 此三角形形状不确定.

——重·难·点·突·破——

疑难剖析

yinanpoux

1. 利用正、余弦定理解三角形

正弦定理和余弦定理都反映了三角形中边与角的关系, 用其解三角形可分为以下几类:

(1) 已知三角形的两边和其中一边的对角解三角形, 基本方法是先由正弦定理求出另一条边所对的角, 用三角形的内角和定理求出第三个角, 再用正弦定理求出第三边, 注意判断解的个数.

(2) 已知三角形的两角和任一边解三角形, 基本方法是若所给边是已知角的对边时, 可由正弦定理求出另一边, 再由三角形内角和定理求出第三个角, 最后由正弦定理求出第三

边; 若所给边不是已知角的对边时, 先由三角形内角和定理求出第三个角, 再由正弦定理求出另外两边.

(3) 已知三角形的两边和它们的夹角解三角形, 基本方法是先用余弦定理求出第三边, 再用正弦定理或余弦定理求出另一角, 最后用三角形内角和定理求出第三个角.

(4) 已知三角形的三边解三角形, 基本方法是先用余弦定理求出一个角, 再用正弦定理或余弦定理求出另一个角, 最后用三角形内角和定理求出第三个角.

从以上分析来看, 在解三角形过程中, 求某一个角时既可用正弦定理, 又可用余弦定理, 各有长处, 应用余弦定理运算可能较复杂, 但在 $(0, \pi)$ 上的角与其余弦值是一一对应的, 所以不需讨论; 而应用正弦定理时运算量小, 但由于 $(0, \pi)$ 上正弦值与角并非一一对应, 所以往往需要分类讨论.

2. 利用正弦定理、余弦定理判断三角形的形状

利用三角形中边的关系和角的关系,判断三角形的形状,其常用方法是:

(1) 利用正弦定理化边为角,即将已知式子统一用角表示,然后通过三角运算判断三角形的形状.

(2) 利用余弦定理化角为边,即将已知式子统一用边表示,然后通过代数运算判断三角形的形状.

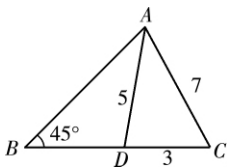
典型题解

dianxingtijie

题型1

正弦定理、余弦定理的综合应用

例1 如图,在 $\triangle ABC$ 中,已知 $B = 45^\circ$, D 是 BC 边上一点, $AD = 5$, $AC = 7$, $DC = 3$,求 AB .



解析 本题考查综合运用正弦定理和余弦定理解三角形问题,根据题目已知条件,在 $\triangle ACD$ 中,可用余弦定理求出 C ,然后在 $\triangle ABC$ 中,利用正弦定理求出 AB 即可.

答案 在 $\triangle ADC$ 中,

$$\cos C = \frac{AC^2 + DC^2 - AD^2}{2AC \cdot DC} = \frac{7^2 + 3^2 - 5^2}{2 \times 7 \times 3} = \frac{11}{14}.$$

$$\text{又 } 0^\circ < C < 180^\circ, \therefore \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C},$$

$$\therefore AB = \frac{\sin C}{\sin B} \cdot AC = \frac{5\sqrt{3}}{14} \times \sqrt{2} \times 7 = \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

点评 对于解三角形问题,首先分析所求元素与已知条件能否建立起直接的联系,即能否直接利用正弦定理或余弦定理解决;若不能,则往往转移三角形,借此利用正弦定理或余弦定理求出一个或多个未知元素,然后再在某个三角形中运用正弦定理或余弦定理求出所要求的未知元素,这便是综合运用正、余弦定理解三角形问题.

借题发挥1 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $B = 45^\circ$, $AC = \sqrt{10}$, $\cos C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求 BC 边的长;

(2) 设 AB 的中点为 D ,求中线 CD 的长.

题型2

利用正、余弦定理判断三角形的形状

例2 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $b^2 \sin^2 C + c^2 \sin^2 B = 2bc \cos B \cos C$,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

解析 本题考查正、余弦定理在判断三角形形状时的应用,可利用正弦定理化为角的关系或利用余弦定理化为边的关系求解.

答案 解法一: 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径,将原式化为 $\sin^2 B \sin^2 C = \sin B \sin C \cos B \cos C$.

$$\because \sin B \sin C \neq 0,$$

$$\therefore \sin B \sin C = \cos B \cos C.$$

$$\text{即 } \cos(B+C) = 0, \therefore B+C = 90^\circ. \therefore A = 90^\circ.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

解法二: 将已知等式变为

$$b^2(1 - \cos^2 C) + c^2(1 - \cos^2 B) = 2bc \cos B \cos C.$$

由余弦定理得

$$b^2 + c^2 - b^2 \cdot \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 - c^2 \cdot \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2 = 2bc \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

$$\text{即 } b^2 + c^2 = \frac{[(a^2 + b^2 - c^2) + (a^2 + c^2 - b^2)]^2}{4a^2}.$$

$$\therefore b^2 + c^2 = a^2.$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

点评 已知三角形中的边角关系,判断三角形的形状,有两条思路:其一根据正弦定理公式 $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ (R 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径)化边为角,再进行三角恒等变换求出三个角之间的关系;其二根据余弦定理的推论化角为边,再进行代数恒等变换求出三条边之间的关系.

借题发挥2 已知方程 $x^2 - (b \cos A)x + a \cos B = 0$ 的两根之积等于两根之和, a, b 为 $\triangle ABC$ 的两边, A, B 为两个内角,试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

题型3

利用正、余弦定理证明三角恒等式

例3 在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c ,且满足 $2a + 2c = (\sqrt{3} + 1)b$. 求证: $2\cos \frac{A-C}{2} = (\sqrt{3} + 1) \sin \frac{B}{2}$.

解析 要证等式成立,需将条件 $2a + 2c = (\sqrt{3} + 1)b$ 化为角的关系,然后利用三角知识证明.

答案 设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R ,

$$\text{由正弦定理得 } 2\sin A + 2\sin C = (\sqrt{3} + 1) \sin B,$$

$$\therefore 4\sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} = (\sqrt{3}+1) \sin B.$$

$$\because A+B+C=\pi, \frac{A+C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{B}{2},$$

$$\therefore 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) \cos \frac{A-C}{2} = 2(\sqrt{3}+1) \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}.$$

$$\text{即 } 2\cos \frac{A-C}{2} = (\sqrt{3}+1) \sin \frac{B}{2}.$$

[点评] 注意三角函数有关公式在证明三角恒等式的应用. 利用正、余弦定理证明三角恒等式问题, 首先分析等式形式上的特点, 然后确定证明方向. 一般地, 有三种证明方向: ①从左到右; ②从右到左; ③两边同时证明, 得到相同的结果. 总体来说, 一般本着从繁到简的原则去证明, 在证明时, 要注意边和角的统一.

[借题发挥3] 在 $\triangle ABC$ 中, 求证: $c(\cos B - b \cos A) = a^2 - b^2$.

题型4 三角形中的综合问题

例4 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c . 设 a, b, c 满足条件 $b^2 + c^2 - bc = a^2$ 和 $\frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$, 求 A 和 $\tan B$.

[解析] 本题考查正弦定理、余弦定理、两角差的正弦公式、同角三角函数的基本关系式等基础知识, 考查基本运算能力, 先根据余弦定理求出 A , 再利用余弦定理求出 $\tan B$.

[答案] 解法一: 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore A = 60^\circ.$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } C = 180^\circ - A - B = 120^\circ - B.$$

由已知条件及正弦定理得

$$\frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(120^\circ - B)}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot B + \frac{1}{2},$$

$$\text{解得 } \cot B = 2, \text{ 则 } \tan B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{解法二: 由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}, \therefore A = 60^\circ.$$

$$\text{由 } b^2 + c^2 - bc = a^2 \text{ 得 } \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 - \frac{c}{b} = \frac{15}{4}.$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

$$\text{由正弦定理得 } \sin B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{2}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\text{由 } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ 得 } a > b, \text{ 故 } A > B, \therefore B \text{ 为锐角,}$$

$$\text{则 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \therefore \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{1}{2}.$$

[点评] 解决正、余弦定理与函数、向量、三角函数、不等式、平面向量相结合的综合问题, 要抓住问题的衔接点, 找到解决问题的突破口, 这就要求我们在平常学习的过程要注意知识之间的相互联系.

[借题发挥4] 已知 $k \in \mathbf{Z}$, 在钝角 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c .

$$(1) \text{ 若方程组 } \begin{cases} x^2 + y = 7k, \\ 2kx + y = 3(k^2 + 1) \end{cases} \text{ 有实数解, 求 } k \text{ 的值;}$$

$$(2) \text{ 对于 (1) 中 } k \text{ 的值, 若 } \sin C = \frac{k}{\sqrt{2}}, \text{ 且有关系式 } (c-b) \cdot \sin^2 A + b \sin^2 B = c \sin^2 C, \text{ 试求 } A, B, C \text{ 的度数.}$$

提·升·训·练

- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a = \sqrt{3} + 1, b = \sqrt{3} - 1, c = \sqrt{10}$, 则 $\triangle ABC$ 的最大角的度数为 ()
A. 60° B. 90° C. 120° D. 150°
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 7, BC = 5, AC = 6$, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ 等于 ()
A. 19 B. -14 C. -18 D. -19
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b \cos A = a \cos B$, 则 $\triangle ABC$ 为 ()
A. 直角三角形 B. 锐角三角形
C. 等腰三角形 D. 等边三角形
- 已知等腰三角形的底边长为6, 一腰长为12, 则它的外接圆半径为 ()
A. $\frac{7\sqrt{15}}{5}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $\frac{8\sqrt{15}}{5}$ D. $6\sqrt{3}$

- 下列三个命题, 其中正确命题的个数是 ()
①若 $\tan A \tan B > 1$, 则 $\triangle ABC$ 一定是钝角三角形;
②若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$, 则 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形;
③若 $\cos(A-B) \cos(B-C) \cos(C-A) = 1$, 则 $\triangle ABC$ 一定是等边三角形.
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2, BC = 5, S_{\triangle ABC} = 4$, 则 $AC =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} \left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \right) =$ _____.
- $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c 且 $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}$, 则 $C =$ _____.
- 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $B = 45^\circ, C = 60^\circ, a = 2(\sqrt{3} + 1)$, 则