國立臺灣大學土木工程學研究所碩士論文

指導教授：楊 永 斌

桁架之非線性動力及混沌現象

(Nonlinear Dynamical and Chaotic Phenomena of Trusses)

研究生：吳 演 聲

中華民國八十三年六月

摘要

非線性動力系統除了規則行爲之外，還會出現類似隨機行爲的混沌現象，因此有必要對此一現象加以研究；傳統土木工程在這方面的研究甚少，本文係以土木上常見的桁架結構爲模型，進行先導性之研究。混沌現象的特徵爲：對初始條件具有敏感性(S.I.C.)及奇異吸子；我們可分別利用里阿普諾指數及碎形維度的觀念，將上述二個特徵予以量化。里阿普諾指數爲系統軌跡平均發散的速率，當最大里阿普諾指數大於零時，表示會發生混沌現象，而小於零時，則表示爲規則行爲；碎形維度爲一分數維度，用來描述龐加萊圖中，奇異吸子疏密的程度，因此可用來比較二個奇異吸子的差異所在。分析時採用蘭金－庫塔和紐馬克－貝他二種直接積分法，以確保分析結果的正確。

分析結果顯示：此系統會出現混沌現象，且這個混沌現象具有複雜的碎形結構，而由二種不同積分法所得到的相同結果顯示，混沌現象的確是系統的本質之一。系統會從規則行爲不斷地分歧爲混沌行爲，而這種分歧的過程並不是唯一的，最典型的是以週期倍增的方式進行分歧。在混沌邊界以上，週期行爲會和混沌行爲交互出現。另外，以本文所推導出的二個混沌邊界預測準則，所求出的混沌邊界與實際的混沌邊界比較相差不多，由此可看出推導之正確性。

目　　錄

表　目　錄

圖　目　錄

第一章　導論

1.1　研究動機與背景

一個完全決定性的非線性系統(deterministic nonlinear system)，除了規則行爲之外，還會有類似隨機(ramdom-like)的現象出現，即使是一個非常簡單的非線性系統，也都會有這種情形出現，此一現象於近年來引起了科學家及工程師的高度好奇，於是紛紛投入研究。

上述類似隨機的現象，我們稱之爲混沌(chaos)。它涵蓋的範圍非常地廣泛，舉凡力學、電學、化學反應、大氣，乃至於生理、生物及社會等各方面，都可發現它的存在。

土木工程方面應該也有混沌現象的存在，但是在這方面的研究卻非常地少，有鑑於此，本文乃以土木方面常見的桁架結構爲模型，一方面其研究其非線性動力行爲，另一方面則驗證是否有混沌現象的出現，並做爲日後研究更複雜行爲的基礎。

混沌現象的研究，最早可追溯到十九世紀末。龐加萊(Poincare)在研究牛頓行星力學時，首先揭露了混沌的潛在性，並認爲它是非線性系統的本質，可惜未受到重視；之後這方面的研究沉寂了一段時

間，直到二十世紀中葉才又有了開始。1963年，E. N. Lorenz在研究大氣對流的行爲時，發現了此一令人訝異的現象，隨後並發表了一篇名爲"Deterministic non-periodic flow"的論文，引起了學術界高度的重視，一時之間在這方面的研究

即如火如荼的展開，而論文也如雨後春筍般地大量出現。其中 Figenbaum(1978，1979) 發現任何系統週期倍增時，系統參數間會有某種的關係存在，並進而求得Feigenbaum常數；Moon及Holmes (1979) 利用磁電挫屈樑系統進行實驗，證明在眞實系統中，也會有混沌現象的出現，並將上述系統簡化成一維系統，進行理論分析，而推得混沌現象的預測準則；Moon (1980) 則利用磁電挫屈樑系統的實驗結果，推得一個半理論、半經驗的混沌預測準則；Linsay (1981) 曾對受非諧合外力作用下的系統，其週期倍增及混沌現象進行研究；而Novak和Frehlich (1982) 則針對達芬方程式(Duffing equation)中，由規則遞變到混沌的過程，進行研究；Holmes和 Moon (1983) 則詳細介紹了在多種不同的非線性力學系統中，所出現的奇異吸子和混沌現象，並嘗試對混沌現象的形成原因提出解釋；Wolf等 (1985) 曾提出如何由一組包含系統狀態的時間序列，計算出里阿普諾譜及碎形維度；McDonald等 (1985)則針對系統之碎形盆地邊界的特性，做了非常深入且詳細的討論。

Dowell和 Pezeshki(1986,1987,1988)，Asfar和 Masoud(1992)曾分別針對達芬方程式的混沌及週期倍增現象進行探討，後者並提出預測週期倍增的準則；Poddar等 (1988)曾對彈塑性樑的混沌行爲進行研究；Wiggins和 Shaw(1988)則探討三維系統，因史邁耳馬蹄映象 (Smale horseshoe map)出現，所造成的混沌現象；Tongue(1987)曾對混沌系統在數值模擬時的特性提出探討；Yeh和 Dimaggio(1991)曾對支承做圓周運動的單擺之混沌行爲進行研究；Abhyankar等 (1993)曾用數值方法求解受側向荷重樑之

偏微分方程式，並探討其混沌行爲。

1.2 研究目的與內容

本文主要研究的是，二根桁架所構成的系統，在大變位下之非線性動力行爲及混沌現象；並驗證非線性動力及混沌理論的正確性。本文的內容安排如下：

第二章 介紹非線性動力系統的類型，並利用相位圖和龐加萊圖的觀念，研究其具有的反應形式。

第三章 介紹混沌現象的特徵，及里阿普諾譜、碎形維度的計算方式，並探討它們和混沌現象間的關係。

第四章 介紹闌金－庫塔和紐馬克－貝他二種直接積分法的分析步驟，並比較二者之間的差異性，最後則探討分析時所須注意的地方。

第五章 利用桁架系統進行參數分析，並就其分析結果進行說明與探討。

第六章 爲結論。

第二章　非線性動力系統

2.1 前言

非線性動力系統存在於自然界的各個角落，其複雜多變的行爲，使得我們所處的世界多采多姿、千變萬化，但同時也造成我們在研究上的困難與迷惑，有鑑於此，在本章中乃嘗試將非線性動力系統予以歸類，並對其特性及反應作一詳細且系統化的探討，如此將可對非線性動力系統得到進一步的認識，有助於以後桁架系統的分析與研究。

本章的內容大致安排如下：第二節敘述非線性動力系統的特徵及其非線性的來源，並進行分類；第三節先介紹相位圖及龐加萊圖的觀念及形成過程，再藉此探討非線性動力系統各種不同的反應行爲；第四節爲結論。

2.2 非線性動力系統的特徵

2.2.1 非線性動力系統的定義

凡是系統方程式中含有一項或一項以上非線性項的動力系統，都稱之爲非線性動力系統，而其中的非線性項可以是任何形式，如 x^3, $\sqrt{x}$, $\sin x$, $\cdots$等，爲系統本身的特性，和外力無關。

非線性系統和線性系統最大的差別，在於後者滿足疊加原理，而前者則否，所以非線性系統在分析上較線性系統複雜許多。

2.2.2 非線性的來源

就傳統的力學(如動力學、彈性力學、結構力學等)系統而言，其非線性效應主要來自下列各種因素(Moon, 1987)：

1. 運動關係(kinematical relations)：例如對流加速度、柯氏加速度及向心加速度等。
2. 組成關係(constitutive relatons)：例如應力和應變的關係。
3. 邊界條件(boundary conditions)：如流體的自由表面及非剛性的支承等。
4. 非線性的徽體力(nonlinear body forces)：如電磁力等。
5. 大變位所造成的幾何非線性(geometric nonlinearities)：如桁架、樑及板等的大變位行爲。

土木工程方面所遭遇的非線性效應，幾乎都是由上述的因素所造成的，而本文所探討的桁架非線性，即是因爲考慮桁架大變位所引致出來的，這點在第五章方程式推導過程中，可清楚的看出。

2.2.3 非線性動力系統的分類

非線性動力系統的形式雖然千奇百怪、包羅萬象，但是我們卻可以利用它們本身一些基本的特性來加以分類，例如我們可以先依照系統所描述物理量的時間性質之不同，而將其分成下列二類：

1. 連續性系統 (continuous system)：其系統方程式爲微分方程 (differential equation)形式，例如

達芬方程式 (Duffing equation)：

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + x^3 = f\sin\omega t \tag{2.1}$$

或

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma\dot{x} - x^3 + f\sin\omega t\end{aligned} \tag{2.2}$$

及勞倫斯方程式 (Lorenz equation)：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y-x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned} \tag{2.3}$$

2. 離散性系統 (discrete system)：其系統方程式爲差分方程 (difference equation)形式，也就是所謂的映像(mapping)形式，例如：

赫能方程式 (Henon equation)：

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n\end{aligned} \tag{2.4}$$

及球跳方程式 (bouncing ball equation)：

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= (1-\epsilon)v_n + K\sin\varphi_n \\ & \varphi_n\ (\ mod\ \ 2\pi)\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + v_{n+1}$$

上述的連續性系統，還可依系統參數特性的不同，而再區分爲：

1. 決定性系統 (deterministic system)：系統中的參數皆爲一般變數，而不含隨機變數 (random variable)，例如達芬類型的方程式 (Duffing's type equation)：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2\beta y + \gamma_0 x - \alpha x^3\end{aligned} \tag{2.6}$$

式中 α, β, 及 γ_0 爲參數。

2. 非決定性系統 (indeterministic system)：系統的參數含有隨機變數，又稱爲隨機系統 (random system)，例如下列方程式：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -2\beta y + (\gamma_0 + \sigma\xi(t))x - \alpha x^3\end{aligned} \tag{2.7}$$

式中 α, β, 及 γ_0 爲一般參數，σ 表示隨機荷載的强度，$\xi(t)$ 則表示一平均值爲零 (zero mean)的爾格 (ergodic)隨機過程。

上述二大類系統又可依照能量守恆與否 (有無阻尼)的觀點，各自再區分爲保守系統 (conservative system)和非保守系統 (nonconservative system)二類，其中前者又稱爲漢米頓系統 (Hamiltanion system)，後者又稱爲耗能系統 (dissipative system)；

而保守及非保守系統又可再區分為自發性系統(autonomous system)(無外力作用)和非自發性系統(nonautonomous system)(有外力作用)二類等等，這種分類方法的好處是不但能逐步顯示出系統本身的特性，而且還有助於區分系統的反應行為，因此可作為分類的依據，分類結果詳列於圖2.1。

圖中所列出的只是一般文獻上所曾記載的系統類型，至於有無其他種類的系統則不易斷言，不過圖中所列出的，已經包含了我們一般經常遭遇的各種系統，因此仍不失其客觀性。另外，本文所探討的範圍僅局限於決定性系統，因此若無特別說明，以後各章節所稱的非線性動力系統，則概指決定性非線性動力系統。

2.3 非線性動力系統的反應

2.3.1 相位圖及龐加萊截面

一般在研究動力系統(尤其是線性系統)反應的時候，往往只須利用歷時圖，就大概可以了解全部的情形，但是當系統的反應行為比較複雜時，光憑一個歷時圖，就好像是在霧裡看花，無法清楚地得知真正的反應情形，所以為了能夠得窺系統反應的全貌，必須再利用一些其他的工具，而這些工具有二種：一種是相位圖(phase plot)，另一種則是龐加萊圖(Poincare plot)，以下先說明相位圖的觀念。

(1) 相位圖

將系統的行為利用相空間(phase space)的觀念所畫出的圖，稱為相位圖。其中相空間為由一系統之狀態變數(state

variable)所構成的空間，其最低維度等於系統狀態變數的個數，因為是由狀態變數所構成，所以又稱為狀態空間(state space)，而其中狀態變數指的是系統中，隨時間而變且滿足相空間標準形式的物理量，由於他們可以表示系統在任何時刻的狀態，故稱為狀態變數。

(2.2)式及(2.3)式的形式由於可以顯現出相空間的特性，所以稱為相空間標準形式，另外，對一連續性系統而言，其相空間標準形式，為由數個一階的微分方程式所組成，而不是一般常見的二階微分方程形式，這是值得注意的一點。以(2.2)式及(2.3)式所表示的系統為例，其狀態變數分別為x、y及x、y、z，故其對應的相空間維度分別為二維及三維，如圖2.2所示，其中二維的相空間又稱為相平面(phase plane)。

相位圖的特點如下：

1. 相位圖可同時顯示出系統多個物理量(如位移、速度…等)的變化情形。
2. 利用相位圖可得知系統在整個歷時中，所有曾經經歷過的狀態。
3. 相位圖中的每一點，可視為是系統在某一時刻的能量狀態。
4. 相位圖可顯現出系統一些內在的特性(如阻尼、初始條件等)及能量變化的情形。
5. 系統方程式在相位圖中，其實就是等於相位軌跡(見下節

)和其切線向量間的關係，因此相位圖可表達系統狀態和狀態時變率間之關係，如圖 2.2(a)、(b)所示。圖 2.2(a)中，(x_1, y_1)表示系統在t_1時的狀態，而其對應的切線向量$(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$則表示系統在t_1時的狀態時變率，那麼根據系統方程式：$\dot{X} = F(X, t)$，系統在t_1時有如下的關係存在：$\dot{X}_1=F(X_1, t_1)$，其中 $\dot{X}_1=(\dot{x}_1, \dot{y}_1)$， $X_1=(x_1, y_1)$，可清楚地看出二者之間的關係；同樣地，在t_2時也有上述的關係存在。

(2)龐加萊圖

這個方法爲龐加萊(Poincare)在1899年首先使用，所以稱之爲龐加萊圖，其基本原理如下(Berg 等 1984)：

圖 2.3 所示爲一三維的相空間D，L表示系統在相空間中的軌跡，稱爲相位軌跡(phase trajectory)。現在我們在這個相空間D中定義一個二維的平面Σ，稱爲龐加萊平面(Poincare plane)，而這個平面Σ和相位軌跡L相交於$A,B,C,D,E,F,\cdots$等各個點。

令平面Σ的法向量爲N，$A,B,C,D,E,F,\cdots$等各點上的切線向量分別爲$T_a,T_b,T_c, T_d, T_e,T_f,\cdots$，則由$T\cdot N > 0$的點(如圖中的 $A,C,E,\cdots$)所構成的集合，稱爲龐加萊映像(Poincare map)；而其他$T\cdot N < 0$的點(如圖中的$B,D,F,\cdots$)，則形成另一組龐加萊映像，最後，利用龐加萊映像所畫出的圖就稱爲龐加萊圖(Poincare plot)。

上述原理中，取$T\cdot N > 0$(或$T\cdot N < 0$)的點的主要原因是：(1)確保龐加萊平面能橫截(transverse)相位軌跡，因爲若

$T\cdot N = 0$時，表示龐加萊平面和相位軌跡相切，則無法取得所需的龐加萊映象。(2)使所取到的點(龐加萊映象)，全部都是由相位軌跡從龐加萊平面固定的一側，穿透平面，到達另一側而形成的(如圖 2.3所示)，如此可擷取系統軌跡在相空間的某種規律或秩序，使系統的一些特性容易彰顯出來。由上面的敘述可以知道，龐加萊圖的精神，其實就是將連續的相位軌跡轉變成離散的龐加萊映像，也就是將複雜的連續性系統(微分方程形式)，轉變成簡單且易處理的離散性系統(差分方程形式)。

龐加萊圖的優點如下：

1. 降低系統在相空間的維度：利用龐加萊圖的觀念，可以使得系統在相空間的維度最起碼減少一維，方便系統的分析。

2. 幫助簡化問題：例如在探討週期軌跡穩定性的問題時，若使用龐加萊圖(映像)，則可使問題簡化成只是探討固定點(fixed point)的穩定性而已，有助於掌握問題的核心所在。

3. 具有和相位軌跡相同的拓樸(topology)特性：例如相位軌跡中有吸子 (attractor，見下章)存在，則在龐加萊圖(映像)中也會有吸子存在，即系統在相空間的特性不會因龐加萊圖的形成過程而受到改變。

4. 提供另一種觀察系統反應的方式，並可彌補歷時圖及相空間在研究系統反應行爲時的不足。

對一個系統而言，龐加萊平面的取法有無限多種，不同

的取法會導致不同的龐加萊圖(映像)，但是其中很可能只有一種或少數幾種取法，才能使系統的行爲完全且有意義的呈現出來，不過遺憾的是，到目前爲止並沒有一個放諸四海而皆準的方法，可以明確的告訴我們如何才能取得適當的龐加萊平面，因此，我們只能採取試誤的方法，慢慢地找到合適的龐加萊平面。然而，試誤歸試誤，我們還是有一些原則可加以依循：因爲一個系統的反應和其系統的特性，也就是系統方程式，有著密不可分的關係，所以我們可以從方程式開始著手，觀察其外力或者是描述座標的形式等，甚至於可以先想像此系統在相空間的軌跡形式，找出其中的特徵所在，則所取的龐加萊平面要能顯現出這些特徵才算合適。

現在以一個二維强迫振動系統爲例，說明其龐加萊平面的取法：

$$\dot{X} = F(X, t) \qquad X \in R^2 \tag{2.8}$$

其中t爲外顯的(explicit)，表示系統受到外力作用，假定外力週期爲T。由於此系統爲受迫振動系統，所以其反應行爲必然和外力有很密切的關係，因此我們就從外力部分開始著手。令$\theta(t) = \omega t = \frac{2\pi}{T}t$，則(2.10)式變成：

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X, \frac{\theta}{\omega}) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$(X \;,\; \theta) \in R^2 \times S^1$$

由(2.11)式可以看出，系統經過上述的轉換後，相空間的維度由二維擴增爲三維，這樣做的目的主要是爲了能夠明確的表示出龐加萊平面在相空間中的位置及特性。接著將方程式用圓柱座標表示，則成爲如圖2.4所示的情形，其中L表示系統的相位軌跡。

在圖中我們可以很直覺地發現，龐加萊平面最適當的取法，必然是沿著半徑的方向(如圖中$\vec{OP}$的方向)，而相位軌跡與這個平面的交點(如圖中的$P_0, P_1, P_2, \cdots$)，就構成了前面所說的龐加萊映像；另外，$\vec{OP}$與$\vec{OX}$的夾角φ稱爲相角(phase angle)，不同的相角對應不同的龐加萊平面，其範圍介於 0 和 2π 之間(即 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)。

根據上面的敘述可知：相位軌跡和龐加萊平面每隔2π相交一次，所以在龐加萊(圖)映像中相鄰二點(如P_0和P_1)的間隔爲2π ($\theta(P_1) - \theta(P_0) = 2\pi$)，然而因$\theta = \omega t$，所以實際上等於相鄰二點的時間間隔爲$T$，恰好爲外力的週期，故實際在做分析的時候，只須每隔時間T(外力週期)取點，即可獲得所需的龐加萊圖(映像)；另外前面所提到的相角φ，則表示開始取點的時間t_0($t_0 = T\varphi/2\pi$)，不同的 t_0 會得到不同的龐加萊圖(映像)。

上述的方法可適用於任何受週期性外力作用的系統，至於其他類型的系統則可能無法適用，必須另外加以考慮。

2.3.2 系統之反應類型

非線性動力系統的反應行爲雖然千變萬化、無奇不有，在實際上我們大概可以將他們歸納成下列四種類型：

1. 漸近靜止行爲 (asymptotic stationary behavior)：

   系統的反應經過一段時間後會慢慢地趨向於靜止狀態，稱爲漸近靜止行爲。如圖 2.5(a)、(b) 所示，其中 (a)爲歷時圖，(b)爲相位圖，這種反應行爲由於會不斷地消耗能量，所以只存在於有阻尼且自由振動的系統。

2. 週期行爲 (periodic behavior)：

   系統每隔一段時間 T，會有相同的反應行爲出現,這種類型的行爲稱爲週期行爲，T 則稱爲週期。其歷時圖和相位圖分別如圖 2.6(a)、 (b) 所示，其中我們可以注意到其相位圖爲一封閉的曲線，稱爲極限圈 (limit cycle)，這是週期行爲的特徵之一。

3. 準週期行爲 (quasiperiodic behavior)：

   這種行爲是由二種或二種以上不相稱 (incommensurate)的頻率耦合 (coupled)而成的行爲，也就是說系統的反應行爲包含二種不同的頻率 (ω_1,ω_2)，且這二種頻率的比值爲無理數 (irrational) ($\omega_1/\omega_2=$ 無理數，稱爲不相稱)，因爲其週期無窮大，不是一個週期行爲，所以稱爲準週期行爲，其歷時圖和相位圖分別如圖 2.7(a)、(b) 所示。值得注意的是，此類系統在相空間的行爲，必須在比其原有相空間更高維度的相空間裡，才能完全的展現出來，因此若系統的相空間爲二維，則必須在三維或更高維的相空間，才能顯現出此種行爲完整的面貌 (圖 2.7(c))。

4. 混沌行爲 (chaotic behavior)：

   這種行爲看起來雜亂無章，好像是隨機行爲，但是實際上卻是亂中有序，所以稱之爲混沌行爲。圖 2.8(a) 爲其歷時圖，由圖中可看出果然是雜亂無章，一點規律性都沒有，只見亂不見序；圖 2.8(b) 爲其相位圖，這個圖看起來雖還有點亂，但是卻規律多了，表示眞的是亂中有序，不過這裡所敘述的只是大概的情形，還須進一步的探討才能得知眞正的規律所在，這點在下一章會有詳細的說明。

圖 2.9 所列的是各種非線性動力系統，和其對應的反應形式之間的關係。由圖中可以發現到，只有非線性的受迫系統，才會產生混沌行爲，其他系統則不會有此行爲出現(這種說法可能有點武斷，不過到目前爲止，的確只在非線性受迫系統中發現混沌現象)，原因大概可解釋如下：一個系統若沒有外界的干擾(指外力作用或能量輸入)，則系統會自主且規律性地達成穩定狀態；然而若系統受到外界的干擾，則在某些情形下系統無法與這個干擾互相協調，而不得不互相妥協，以一種異於平常但卻有秩序的方式，達到最終的穩定狀態，這也就是爲什麼只能在龐加萊圖中，才可看出規律性的原因(在龐加萊圖中系統的狀態和外力週期有密切的關係)。