"世少赛"(中国区)选拔赛指定专用教材

海峡两岸数学邀请赛指定专用教材

给力数学

GEILI MATHEMATICS

丛书主编：叶立军

主编：李亚辉 罗强

我的第一本奥数书

奥数冠军的零起步秘笈

八年级

200个以上知识点

帮你构建数学知识体系

75道典型例题+75道深度拓展

让你轻松掌握解题技巧

225道跟踪练习及时学习效果检验

華東理工大學出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

"世少赛"(中国区)选拔赛指定专用教材

海峡两岸数学邀请赛指定专用教材

给力数学

GEILI MATHEMATICS

我的第一本奥数书

奥数冠军的零起步秘笈

八年级

丛书主编：叶立军

主　　编：李亚辉　罗　强

编　　委：李昱茜　高华岳　孟泽琪　李亚辉　罗　强　王晓楠　刘春江
陈思思　陈亚楠　王　莹　赵亚云　程龙红　郭　风

華東理工大學出版社

EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

·上海·

图书在版编目(CIP)数据

我的第一本奥数书：奥数冠军的零起步秘笈.八年级/李亚辉，罗强主编.—上海：华东理工大学出版社，2015.6

（给力数学·我的第一本奥数书/叶立军）

ISBN 978-7-5628-4248-4

Ⅰ.①我… Ⅱ.①李…②罗… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 079848 号

给力数学

我的第一本奥数书：奥数冠军的零起步秘笈(八年级)

丛书主编/ 叶立军
主　　编/ 李亚辉　罗　强
策划编辑/ 庄晓明
责任编辑/ 赵子艳
责任校对/ 李　晔
封面设计/ 裘幼华
出版发行/ 华东理工大学出版社有限公司
地　址：上海市梅陇路 130 号，200237
电　话：(021)64250306(营销部)
(021)64252718(编辑室)
传　真：(021)64252707
网　址：press.ecust.edu.cn
印　　刷/ 南通印刷总厂有限公司
开　　本/ 787 mm×1092 mm　1/16
印　　张/ 17.25
字　　数/ 372 千字
版　　次/ 2015 年 6 月第 1 版
印　　次/ 2015 年 6 月第 1 次
书　　号/ ISBN 978-7-5628-4248-4
定　　价/ 36.00 元

联系我们：电子邮箱 press@ecust.edu.cn
官方微博 e.weibo.com/ecustpress
天猫旗舰店 http://hdlgdxcbs.tmall.com

preface

前　　言

当下的数学教育存在很多误区，其中最大的误区就是“奥数万能”以及对应的“奥数无用”. 那么奥数到底是什么？中学生应不应该学习“奥数”？很多家长对此都心存疑虑. “奥数”是奥林匹克数学的简称. 1934 年和 1935 年，苏联开始在列宁格勒和莫斯科举办中学数学竞赛，并冠以数学奥林匹克的名称，1959 年在布加勒斯特举办第一届国际数学奥林匹克. 国际数学奥林匹克作为一项国际性赛事，由国际数学教育专家命题，出题范围超出了所有国家的义务教育水平，难度大大超过大学入学考试.

有关专家认为，只有 5% 的智力超常的青少年适合学奥林匹克数学，而能一路过关斩将冲到国际数学奥林匹克巅峰的人更是凤毛麟角. 只有在学校课堂上数学学得相对比较扎实、学有余力且又对数学有浓厚兴趣和钻研精神的学生才适合学习奥数.《我的第一本奥数书》就是一套针对学有余力且对数学有浓厚兴趣和钻研精神的学生的必备参考资料.

本书在内容编排上，结合最新奥数竞赛的要求，设置了以下栏目：

【知识・方法・规律】对每一讲所要掌握的知识点进行了提纲挈领的归纳总结(包括主要公式、定理和常用的数学思想方法等)，帮助学生对本讲的知识体系有一个全面的了解与认识，做到胸有成竹，从而提高学习效率.

【典例・解析・拓展】精选典型例题，进行深入分析，对每一道题的解题关键点都一一地进行了解读，帮助学生厘清思路、拓展思维，让学生真正能做到举一反三，全面提高解题综合能力.

【测训・反馈・应用】精选与本讲有关的针对性训练，杜绝题海战术，每道题都在书后的【思路・点拨・详解】中给出精辟的解题提示与分析.

即便不打算在奥数上有所建树，如果学有余力，也推荐大家研读本套丛书，这对于培养以下四方面的数学能力大有裨益.

1. 基础运算能力

这方面的能力表现为能准确、快速地处理数据；能熟练地对含字母的解析式进行运算，并能在完成运算后做出全面、准确、合理的结论；能明确算理，能理解如何进行算法的优化.

2. 逻辑思维能力

这方面的能力表现为能正确理解各数学对象间的逻辑关系；能严格从概念、理论出发进行逻辑推理，得出正确结论；能正确识别充分条件、必要条件和充要条件；能正确运用数学归纳法、反证法等基本论证方法.

3. 空间想象能力

这方面的能力表现为能正确认识空间图形的形状、大小和位置关系;能作出体现特定空间位置关系的几何图形;能在不便于作图的情况下正确想象出几何体之间的位置关系.

4. 数学语言表达能力

这方面的能力表现为能正确使用数学符号;能准确、简洁地表达出数学内容,且语句完整、连贯,层次清楚;当论证或解答各类数学问题时,能用字(或字母)准确,能注意到数学论文的书写规范,论文中的图形要求表现力强,且注重作图规范,能做到图、文相符.

除了上述四大能力之外,以下能力也在本套教材中有所体现:将实际问题抽象为数学问题的能力;数形结合相互转化的能力;观察、实验、比较、猜想、归纳问题的能力;研究、探讨问题的能力和创新能力.

由于水平有限,书中不足之处在所难免,笔者真诚地希望读者提出宝贵建议.

contents

目　录

第 1 讲

三　角　形

知识·方法·规律

1. 关于三角形的几个概念

（1）三角形定义：由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形叫作三角形.

（2）三角形的角平分线：在三角形中，一个内角的角平分线与其对边相交，这个角的顶点与交点之间的线段.

在图 1－1 中，因为 AF 平分 $\angle CAB$，

所以 $\angle CAF=\angle BAF$.

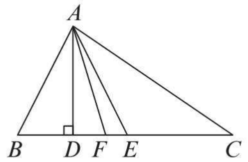

图 1－1

（3）三角形的中线：在三角形中，连接一个顶点与它对边中点的线段.

在图 1－1 中，因为 E 为 BC 的中点，

所以 $CE=BE$.

（4）三角形的高：从三角形的一个顶点向它的对边所在的直线作垂线，顶点和垂足之间的线段.

在图 1－1 中，因为 $AD\perp BC$，

所以 AD 为 BC 边上的高.

2. 三角形的性质

（1）三角形任何两边之和大于第三边

在图 1－2 中，$a+b>c$，$a+c>b$，$b+c>a$.

（2）三角形的内角和等于 $180°$

在图 1－2 中，$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

（3）三角形的一个外角等于和它不相邻的两个内角的和

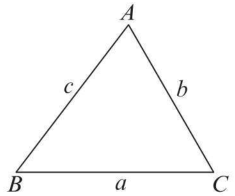

图 1－2

3. 三角形的分类

（1）按角分：锐角三角形、直角三角形、钝角三角形；

（2）按边分：等腰三角形、等边三角形.

典例·解析·拓展

【例 1】 三角形的三边 a、b、c 都是整数，且满足 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=9$，则此

三角形的面积等于(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【思维点拨】 本题的关键是将条件中的等式进行化简,通过因式分解解出常数 a、b、c 的大小;也可以直接通过观察确定 a、b、c 的取值范围,从而直接得到 a、b、c 的大小.

【解析】

解法一:将 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=9$ 因式分解:

$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2=9$,

所以 $a+b+c=3$.

因为 a、b、c 为整数,

所以 $a=b=c=1$,

故答案为 C.

解法二:因为 a、b、c 为整数,

所以 $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ 每一字母项都大于等于 1.

所以 a、b、c 只能取最小值:$a=b=c=1$.

【拓展】 三角形的三边长为 a、b、c,且满足 $\begin{cases}(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=8,\\(a+b+c)(a+c+b)(b+c+a)=64,\end{cases}$ 则此三角形的面积等于________.

【思维点拨】 本题使用海伦公式来计算三角形的面积.

解: 因为 $(a+b+c)(a+c+b)(b+c+a)=64$,

所以 $a+b+c=4$.

因为 $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=8$,

所以 $\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)=1$.

将上式代入海伦公式:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)},$$

得 $S=\sqrt{2}$,所以三角形的面积为 $\sqrt{2}$.

【例 2】 如图 1-3,$\triangle ABC$ 中,$\angle A=50°$,$\angle ABC$ 的平分线与 $\angle ACB$ 的外角 $\angle ACE$ 的平分线交于 D,求 $\angle D$ 的度数.

【思维点拨】 本题利用三角形的两个重要性质进行解决——三角形的内角和为180°，三角形的一个外角等于与之不相邻的两个内角之和.

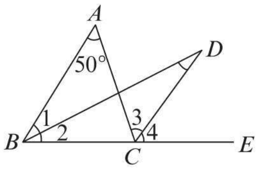

图 1－3

【解析】 因为$\angle ABC$的平分线BD与$\angle ACB$的外角$\angle ACE$的平分线CD相交于点D，

所以$\angle 4=\frac{1}{2}\angle ACE$，$\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC$.

因为$\angle DCE$是$\triangle BCD$的外角，

所以
$$\begin{aligned}\angle D&=\angle 4-\angle 2\\&=\frac{1}{2}\angle ACE-\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)-\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\angle A+\frac{1}{2}\angle ABC-\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\angle A.\end{aligned}$$

因为$\angle A=50°$，

所以$\angle D=25°$.

【拓展】 如图1－4，C在直线BE上，$\angle ABC$与$\angle ACE$的角平分线交于点A_1.

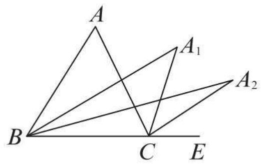

图 1－4

(1) 若$\angle A=60°$，求$\angle A_1$的度数；

(2) 若$\angle A=m$，求$\angle A_1$的度数；

(3) 在(2)的条件下，若再作$\angle A_1BE$、$\angle A_1CE$的平分线，交于点A_2；再作$\angle A_2BE$、$\angle A_2CE$的平分线，交于点A_3；依此类推，则$\angle A_2$，$\angle A_3$，…，$\angle A_n$分别为多少度？

【思维点拨】 本题是例2的拓展，依然利用三角形的性质：三角形的内角和为180°，三角形的一个外角等于与之不相邻的两个内角之和，并推广到第n个三角形的情形.

解： 因为
$$\begin{aligned}\angle A_1&=\angle A_1CE-\angle A_1BC\\&=\frac{1}{2}\angle ACE-\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\angle A,\end{aligned}$$

所以(1) 当$\angle A=60°$时，$\angle A_1=30°$；

(2) 当$\angle A=m$时，$\angle A_1=\frac{m}{2}$；

(3) 依此类推,当$\angle A_2=\frac{m}{4}$时,$\angle A_3=\frac{m}{8}$,$\angle A_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n m$.

【例 3】 在$\triangle ABC$中,$\frac{2}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,则$\angle A$是(　　).

A. 锐角　　　　B. 直角

C. 钝角　　　　D. 不确定

【思维点拨】 本题可以先假定$\angle A$的类型,再利用反证法证明.

【解析】 若$\angle A\geqslant 90^\circ$,那么$a>b$,且$a>c$.

于是$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,$\frac{1}{a}<\frac{1}{c}$,

于是$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,

即$\frac{2}{a}<\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,与条件不符,

因此$\angle A$是锐角.

【拓展】 设P为等腰$\mathrm{Rt}\triangle ABC$斜边AB上或其延长线上一点,$S=AP^2+BP^2$,那么(　　).

A. $S<2CP^2$　　　　B. $S=2CP^2$

C. $S>2CP^2$　　　　D. 不确定

【思维点拨】 本题中,$CP^2=CD^2+PD^2$是解题的关键.其中$CD=1$,PD有两种表示方法:$PD=AP-1$,$PD=1-BP$,将这两式代入$CP^2=CD^2+PD^2$中,就可以找到AP、BP、CP间的数量关系式.

解: 如图 1-5.作$CD\perp AB$,垂足是D.

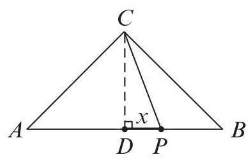

图 1-5

设$CD=AD=BD=1$,$PD=x$,则

$$CP^2=1+PD^2=1+x^2=1^2+(AP-1)^2$$
$$=2+AP^2-2AP.$$

同理,

$$CP^2=1^2+x^2=1^2+(1-BP)^2$$
$$=2+BP^2-2BP.$$

两式相加,得

$$2CP^2=4+AP^2+BP^2-2(AP+BP)$$
$$=4+AP^2+BP^2-2\times 2$$
$$=AP^2+BP^2.$$

当P在AB延长线上时,同法可证.因此选 B.

测训·反馈·应用

1. 已知一个三角形的三边长都是整数，且其中两条边长分别为15和2015，则这样的三角形共有(　　)个.

A. 29　　B. 30

C. 31　　D. 32

2. 如图1-6，在Rt△ABC中，AF是高，$\angle BAC=90^\circ$，且$BD=DC=FC=1$，则AC为(　　).

A. $\sqrt[3]{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt[3]{3}$

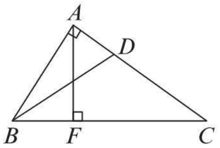

图1-6

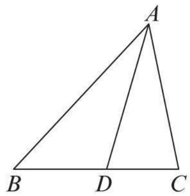

图1-7

3. 已知，如图1-7，△ABC中，$AB=5$，$AC=3$，则中线AD的取值范围是(　　).

A. $3<AD<5$　　B. $2<AD<4$

C. $1<AD<5$　　D. $1<AD<4$

4. △ABC中，$\angle BAC=30^\circ$，把△ABC按如图1-8的方法折叠，$\angle DEF=36^\circ$，则原△ABC的$\angle ABC=$(　　).

A. 60°　　B. 63°　　C. 64°　　D. 65°

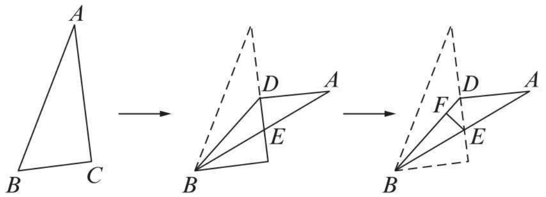

图1-8

5. 已知△ABC，$\angle B$为锐角，从定点A向边BC或它的延长线引垂线交BC于H点，又从顶点C向边AB或它的延长线引垂线交AB于K点. 当$\frac{2BH}{BC}$、$\frac{2BK}{BA}$为整数时，△ABC

一定是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形　　C. 直角三角形　　D. 等腰三角形

6. 用7根火柴棒首尾顺次连接摆成一个三角形,能摆成的不同的三角形的个数为________.

7. 如图1-9,在$\triangle ABC$中,过A点分别作$AD\perp AB$,$AE\perp AC$,且使$AD=AB$,$AE=AC$,BE和CD相交于O,则$\angle DOE$的度数是________.

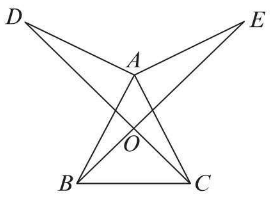

图1-9

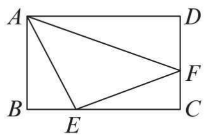

图1-10

8. 如图1-10,矩形$ABCD$中,E、F分别是BC、CD上的点,且$S_{\triangle ABE}=2$,$S_{\triangle CEF}=3$,$S_{\triangle ADF}=4$,则$S_{\triangle AEF}=$________.

9. 如图1-11,$\triangle ABC$中,AD平分$\angle BAC$,且$AB+BD=AC$,若$\angle B=62°$,则$\angle C=$________.

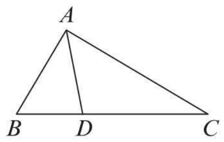

图1-11

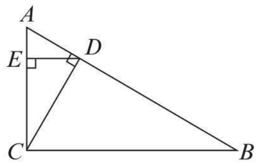

图1-12

10. 如图1-12,CD为直角$\triangle ABC$斜边AB上的高,$DE\perp AC$.设$\triangle ADE$,$\triangle CDB$,$\triangle ABC$的周长分别是p_1、p_2、p.当$\dfrac{p_1+p_2}{p}$取最大值时,$\angle A=$________.

11. 如图1-13,在$\triangle ABC$中,$AB=BC=AC$,$DE\perp AB$,$DF\perp AC$,请比较$\triangle AEF$和四边形$EBCF$的周长的大小.

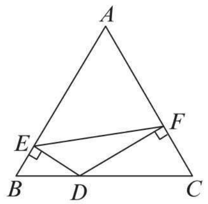

图1-13

12. 如图 1－14 所示，已知三角形内部的四个三角形面积相等且为 1 cm^2. 证明另外三个四边形的面积也相等，并求每个四边形的面积.

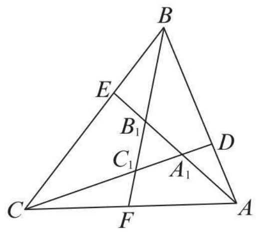

图 1－14

第 2 讲

全 等 三 角 形

知识·方法·规律

1. 全等三角形定义

能够重合的两个三角形叫作全等三角形.

2. 全等三角形性质

(1) 全等三角形对应边相等;

(2) 全等三角形对应角相等.

3. 三角形全等的条件

(1) 三边对应相等的两个三角形全等(SSS);

(2) 有一个角和夹这个角的两边对应相等的两个三角形全等(SAS);

(3) 有两个角和这两个角的夹边对应相等的两个三角形全等(ASA);

(4) 有两个角和其中一个角的对边对应相等的两个三角形全等(AAS).

注意:判定两个三角形全等必须有一组边对应相等.

4. 证题思路

(1) 已知两边:① 找夹角(SAS);② 找直角(HL);③ 找第三边(SSS).

(2) 已知一边一角

若边为角的对边:找任意角(AAS);

若边为角的邻边:① 找已知角的另一边(SAS);② 找已知边的对角(AAS);③ 找夹已知边的另一角(ASA).

(3) 已知两角:① 找两角的夹边(ASA);② 找任一边(AAS).

典例·解析·拓展

【例 1】 如图 2-1,AD 平分$\angle BAC$,$DE\perp AB$ 于 E,$DF\perp AC$ 于 F,且 $DB=DC$,求证:$EB=FC$.

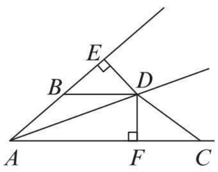

图 2-1

【思维点拨】 先根据角平分线上的点到两边的距离相等证得 $DE=DF$,再利用 HL 判定,Rt$\triangle DBE\cong$Rt$\triangle DCF$,从而得到 $EB=FC$.

【解析】 因为 AD 平分$\angle BAC$,$DE\perp AB$ 于 E,$DF\perp AC$

于 F,

所以 $DE=DF$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DBE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle DCF$ 中,

$DE=DF, DB=DC$,

所以 $\mathrm{Rt}\triangle DBE\cong \mathrm{Rt}\triangle DCF(\mathrm{HL})$,

所以 $EB=FC$.

【拓展】 如图 2-2,在 $\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,E 是 AB 的中点,以点 E 为圆心,EB 为半径画弧,交 BC 于点 D,连接 ED 并延长到点 F,使 $DF=DE$,连接 FC,若 $\angle B=70°$,求 $\angle F$ 的度数.

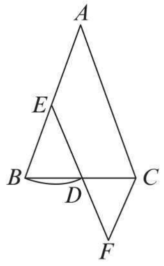

图 2-2

【思维点拨】 由题意可得 $EB=ED$,所以 $\angle B=\angle EDB=\angle ACB$,即可得 $EF\parallel AC$. 又 $AE=BE$,根据平行线等分线段成比例定理,可得 $BD=CD$,然后利用 SAS 即可证得 $\triangle BED\cong\triangle CFD$,即可得 $\angle F=\angle BED$.

解: 由题意可知 $EB=ED$,

所以 $\angle EDB=\angle B=70°$,

所以 $\angle BED=180°-\angle B-\angle BDE=40°$.

因为 $AB=AC$,

所以 $\angle ACB=\angle B$,

所以 $\angle EDB=\angle ACB$,

所以 $EF\parallel AC$.

因为 E 是 AB 的中点,

即 $BE=AE$,

所以 $BD=CD$.

在 $\triangle EBD$ 和 $\triangle FCD$ 中,

$DE=DF, \angle EDB=\angle CDF, BD=CD$,

所以 $\triangle EBD\cong\triangle FCD(\mathrm{SAS})$,

所以 $\angle F=\angle BED=40°$.

【例 2】 (1) 如图 2-3(1),矩形 $ABCD$ 沿着 BE 折叠后,点 C 落在 AD 边上的点 F 处. 如果 $\angle ABF=50°$,求 $\angle CBE$ 的度数.

(2) 如图 2-3(2),在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AC=8$,$AB=6$,E 是 AC 上的点,DE 平分 $\angle BEC$,且 $DE\perp BC$,垂足为 D,求 $\triangle ABE$ 的周长.

(3) 如图 2-3(3),在 $\triangle ABC$ 中,已知 AD 是 $\angle BAC$ 的平分线,DE、DF 分别垂直于