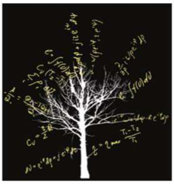


《让数学变得更容易》丛书

丛书主编◎张景中　彭翕成

BUDENGSHI TANMI

不等式探秘

彭翕成　杨春波　程汉波◎著

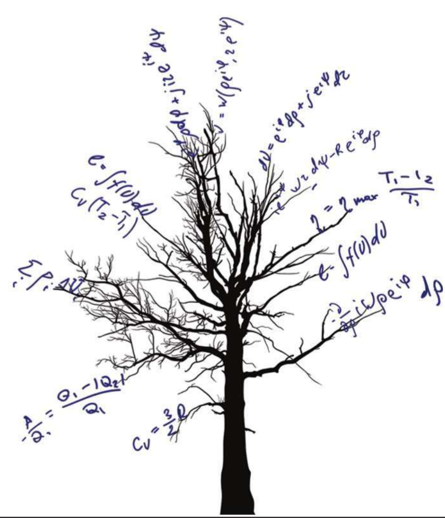
一、用科普的笔法来写，语言风趣幽默；

二、联系生活，用大量案例来类比不等式的种种性质；

三、数形结合，注重几何直观；

四、注重解题思路与方法的渗透，强调启发性；

五、重视基础性和通性通法，淡化特殊技巧；



湖南科学技术出版社

让数学变得更容易丛书
主编　张景中　彭翕成

不等式探秘

彭翕成　杨春波　程汉波　著

湖南科学技术出版社

图书在版编目（C I P）数据

不等式探秘 / 彭翕成，杨春波，程汉波著.-- 长沙 : 湖南科学技术出版社，2015.11
（《让数学变得更容易》丛书）
ISBN 978-7-5357-8671-5
Ⅰ. ①让… Ⅱ. ①彭… ②杨… ③程… Ⅲ. ①中学数学课－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603
中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第067636号

《让数学变得更容易》丛书
不等式探秘
丛书主编：张景中 彭翕成
著 者：彭翕成 杨春波 程汉波
责任编辑：赵 龙
出版发行：湖南科学技术出版社
社 址：长沙市湘雅路276号
http://www.hnstp.com
湖南科学技术出版社天猫旗舰店网址：
http://hnkjcbs.tmall.com
邮购联系：本社直销科 0731-84375808
印 刷：长沙宇航印刷有限公司
（印装质量问题请直接与本厂联系）
厂 址：长沙市岳麓区望城坡航天大院
邮 编：410205
出版日期：2015年11月第1版第1次
开 本：880mm×1230mm 1/32
印 张：11.25
字 数：270000
书 号：ISBN 978-7-5357-8671-5
定 价：28.00元

序

当你手里拿着这本书在翻看的时候，你也许会说，怎么又出了一本不等式的书?

确实，这些年出版不等式方面的的书籍实在太多了。

我国初等数学的研究轰轰烈烈。各个分支中，从事不等式研究的人数相对较多，整体水平颇高，所成立的中国不等式研究小组研究成果斐然，在国际上也有一席之地，引人瞩目。

而一般数学爱好者是不容易达到这个水平的，除了天赋，还需要十多年甚至是几十年的刻苦钻研。你若向这些专家请教，他们常常会蹦出两三个字母了事，如 GM，CS，EV，PQR，SOS 等。这也难怪，研究成果一多，后来者要想进入这一领域，就必须先阅读大量的文献资料，否则交流起来就有困难，也难取得成果。

基于此，目前市面上的不等式书籍难度偏大也情有可原了。高手之争导致难度节节攀升，书中的种种技巧对于广大中学老师和中学生而言，无异于看天书。

他们中的大部分人，无意成为不等式领域的专家，所以更迫切需要的是一些比较初级但又有一定深度的入门书籍，掌握不等式的基本思想和方法，夯实基础以便将来的进一步学习。

本书的写作初衷即在于此，帮助你理解不等式的基本思想，并掌握不等式最常用的方法和技巧。

本书分为两部分，第一部分共 14 章，介绍了十余个中学生

较为熟悉的不等式，每个不等式基本上都按“课堂掠影”、“精彩故事”、“不等式介绍”、“趣味案例”、“案例分析”、“不等式证明”、“不等式应用”、“思维点拨”八个模块进行编写。“课堂掠影”是笔者虚拟的，蕴含了一些教育规律与教学理念，但也难免会理想化一些，可供教师在讲授相关知识时参考；“精彩故事”为笔者原创，在故事中渗透不等式的精髓，可看作大胆的尝试；“趣味案例”“案例分析”是笔者收集整理的与每个不等式相关的生活实例，希望对经典不等式给出一点新的解释或好的说明；“不等式证明”、“不等式应用”虽是老生常谈的问题，但也做了一些努力，如不等式的无字证明，应用中一些思路、方法与技巧的揭示等；“思维点拨”则是对前面七个模块的补充，也有某些题目证明时的心路历程，为的是展现那“美丽背后的火热思考”。看完以上八个模块，想必读者对每个不等式都会有较为全面系统的认识了。

本书的第二部分收录了 7 篇文章，有不等式证明的理论阐述，如对称性问题、齐次性问题、不等式的加强，力求讲清不等式证明中的一些基本问题和基本处理方法；也有不等式证明的案例分析，如三个简单不等式问题的多证与推广、Nesbitt 不等式面面观、证明一组优美不等式的心路历程，实际上是现身说法地去揭秘一些不等式的证明过程，尽力做到理论与实践的有机结合；还有一些不等式的证明方法，属笔者学习不等式的心得体会，也与读者一并分享。

本书最大的特点，不在于整理了多少个不等式，并罗列其各种证法，而是：

一、用科普的笔法来写，语言读来风趣幽默；

二、联系生活，用大量生活案例来类比不等式的种种性质；

三、数形结合，注重几何直观；

四、注重解题思路与方法的渗透，强调启发性；

五、重视基础性和通性通法，淡化特殊技巧。

本书的框架与布局，由彭翕成设计。而具体执笔，则主要是由杨春波和程汉波来完成。彭翕成对全书统稿、补充并修改。本书的写作，曾得到不少朋友的关心与帮助，如郑州外国语学校的王昆仑老师，德惠市实验中学的王云阁老师等；本书的完成，还离不开作者家属们的支持与谅解，有刘玉琴、刘青丽、曾宪琴女士等，在此一并致谢！

我们感谢张景中先生为本书的题词，这是对我们的极大鼓励。出版“让数学变得更容易”丛书，想法就来自张先生的教育数学思想。本书也是我们学习教育数学理念做出的一点尝试和实践。欢迎读者批评指正。

最后，我们要感谢湖南科学技术出版社对教育教学的关心和热爱，才有了这套丛书。也希望更多的数学爱好者加入到本套丛书的写作中来。

彭翕成

2015 年 3 月于武昌桂子山

目　录

第〇章　不等式王国国规

国有国法，家有家规。不等式王国也自有其独特的规则。

实数分为正数、0 和负数。两实数相减，也无非是这三种结果。这对应着两数之间的关系——大于、等于和小于，用符号写来就是：

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b;$$

$$a-b=0\Leftrightarrow a=b;$$

$$a-b<0\Leftrightarrow a<b。$$

两实数的大小关系，三者必居其一。但有时为了考虑问题方便，也可合并处理。譬如将小于（<）和大于（>），合并为不等于（≠）；将小于（<）和等于（=），合并为不大于（⩽）；将大于（>）和等于（=），合并为不小于（⩾）。这和实数既可分为负数、0、正数，又可分为负数和非负数是一样的。

这样做可将三分支的情况简化为两分支，处理起来尤为方便。

明代冯梦龙所著《笑府》一书，收录《连负三局》这则笑话，细细品来，对我们理解小于或等于（即不大于）也有一定帮助。

有自负棋名者，与人角，连负三局。他日，人问之曰："前与某人较棋几局？"曰："三局。"又问："胜负如何？"曰："第一局我不曾赢，第二局他不曾输，第三局我要和，他不肯，罢了。"

对于两人下棋而言，无非输、和、赢三种情况。我们完全可将输、和、赢与小于、等于、大于一一对应起来。

第一局 x 不曾赢 y，即对 $x>y$ 作出否定，等价于 $x\leqslant y$。

第二局 y 不曾输 x，即对 $y<x$ 作出否定，等价于 $y\geqslant x$，即 $x\leqslant y$。

第三局 $x\neq y$，意味着 $x>y$ 或 $x<y$，但 y 不同意等于，则否定掉了 $x>y$，结局是 $x<y$。

其实前两局也是 $x<y$，只不过这人好面子，借用 $x\leqslant y$ 来隐藏，但他确实也没有撒谎。从逻辑上来说，此人是个高手，将三分支的逻辑关系应用得游刃有余。可猜测他们下的是中国象棋，如果是围棋，非输即赢，没有和局，这人就无计可施了。

同一问题，往往有不同的视角和思路。有时朝某一方向思考受阻时，我们不妨试试新的思路。

譬如：$1\leqslant 2$，对么？

有人认为不对，应该是 $1<2$ 才对，怎么可能等于呢？

和他解释：$\leqslant$意思为小于或等于，这中间是或的关系，两者有其一成立即可，并不需要二者同时成立。

但他就是想不明白——怎么有等于的可能啊！

确实，$1<2$ 比 $1\leqslant 2$ 显得更为精确，更符合我们的表达习惯。但 $1\leqslant 2$ 确实也是对的！

既然他已经走进死胡同了，我们就不从小于或等于的角度来说，而是将$\leqslant$理解为不大于。

1 大于 2 么？

不大于！

这就对了！

除以上三条准则外，不等式王国还有八大基本性质：

性质 1（对称性）如果 $a>b$，那么 $b<a$；如果 $b<a$，那么 $a>b$。即 $a>b\Leftrightarrow a<b$。

对称性表征的是同一系统的两种不同状态，$a>b$ 是从 a 的角度来说的，$b>a$ 则是从 b 的角度来说的，又因两者等价，故

呈现出一种对称的性态。

性质 2（传递性）如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$。即 $a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$。

从以上两个性质还可以推出不等式以下的性质：$c<b$，$b<a\Rightarrow c<a$。

数学家罗素很有怀疑精神。小时候，哥哥教他：若 A＝B，B＝C，则 A＝C。罗素对此很怀疑。罗素的怀疑并不是没有道理。该结论的成立是需要传递性来做保证的，并不是所有性质都具备传递性。传递性也并不显然，若将上式中的等号改成不等号，结论就会出问题了。假定 60 分及格，59 分和 60 分差不多，也及格；而 58 分和 59 分差不多，也及格……最后的结论就是 0 分也及格。又如同学关系：A 和 B 是同学，B 和 C 是同学，A 和 C 未必是同学。又如猜拳：剪刀赢布，布赢石头，但剪刀不能赢石头。

把数轴上的两个点 A 与 B 同时沿相同方向移动相等的距离，得到另外两个点 A_1 与 B_1，A 与 B 和 A_1 与 B_1 的左右位置关系不会改变。用不等式的语言表示，就是不等式的以下性质。

性质 3（可加性）如果 $a>b$，那么 $a+c>b+c$。

这就是说，不等式的两边都加上同一个实数，所得不等式与原不等式同向。

初中数学有一命题：三角形的任何两边之和大于第三边；任何两边之差小于第三边。两句话逻辑上是等价的。但对没学过不等式移项的初学者而言，两者却截然不同。性质 3 则为不等式的移项提供了理论保障：

$$a+b>c\Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b)\Rightarrow a>c-b,$$

这就是说，不等式中任何一项可以改变符号后移到不等式的另一边。

性质 4（可乘性）如果 $a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$。如果 $a>$

b，$c<0$，那么 $ac<bc$。

性质 4 是说，在不等式的两边同乘一个正数，不等号的方向不变；若同乘一个负数，则变为相反。由于除法是乘法的逆运算，故在不等式两边同除一个非零实数，也有类似结论。

性质 5（同向可加性）如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$。

性质 5 说明，两个同向不等式相加，所得不等式与原不等式同向。这可看作是两个不等式的加法运算。

性质 6（同向可乘性）如果 $a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$。

性质 6 说明，两边都是正数的同向不等式相乘，所得的不等式和原不等式同向。这可看作是两个不等式的乘法运算。

性质 7（乘方法则）如果 $a>b>0$，那么 $a^n>b^n$，（$n\in N$，$n\geqslant 1$）。

性质 7 说明，当不等式的两边都是正数时，不等式两边同时乘方所得的不等式和原不等式同向。该性质是性质 6 的直接推论。

性质 8（开方法则）如果 $a>b>0$，那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，（$n\in N$，$n\geqslant 2$）。

性质 8 说明，当不等式的两边都是正数时，不等式两边同时开方所得的不等式和原不等式同向。该性质可结合性质 7 用反证法证得。

以上这些关于不等式的事实和性质是解决不等式问题的基本依据。

第一章　糖水的秘密——糖水不等式

【课堂掠影】

叮铃铃——

一阵上课铃声响过，只见数学彭老师健步走进教室，不紧不慢地在黑板上写下这样的两个分数：

$$\frac{7890123456}{8901234567} 和 \frac{7890123455}{8901234566}。$$

彭老师笑着对大家说：不用计算器，谁能比比这两个数谁大谁小？

彭老师那略带挑战性的口吻一下子激起了同学们的兴趣，大家都拿起了笔，开始在纸上写写算算。

但观其表象，就知不易。用作差法稍稍一试就等价于判断下面这个式子的符号：

$7890123456 \times 8901234566 - 7890123455 \times 8901234567$，

这可都是十亿之多的数字相乘，该怎么比较它们的大小呢？用计算器也不一定算得出啊！

同学们锐气大减，一个个眉头紧锁，不知如何是好。

彭老师见状，说：大家看到一个问题时，先不要着急动手，而要看看、瞧瞧，仔细把题目打量一番，这叫观察，是解题的第一步；那我们看看这两个分数在形式上有什么特征或者是有什么联系呢？

经彭老师这么一启发，大家就炸开了锅，开始畅所欲言了。

“第一个分数的分子和分母的各位数字是连续的，第二个分数

的分子和分母开始时也是连续的。”

“这两个数都是真分数!”

“第一个分数的分子比第二个分数的分子大,分母也比第二个分数的大!”

“不仅比第二个分数的大,第一个分数的分子、分母还分别等于第二个分数的分子、分母都加 1。”

……

对于学生们的回答,彭老师都点头表示赞许。

“好,我们来总结一下。”彭老师一开口,教室里立刻安静了下来。大家都目不转睛地盯着彭老师,要瞧瞧彭老师怎么揭开这道题的神秘面纱。

“如果我们记 $A=\frac{7890123456}{8901234567}$,$B=\frac{7890123455}{8901234566}$,并且约定 $a=8901234566$,$b=7890123455$,那么 a 和 b 的大小关系是——”

“$a>b$!”

“A 和 B 可以用 a,b 表示吗?”

“可以!$A=\frac{b+1}{a+1}$,$B=\frac{b}{a}$。”同学们几乎是异口同声。

“那么 A 和 B 谁大谁小?”

同学们恍然大悟,又开始奋笔疾书了。

不一会儿,就听到好多同学那兴奋的呼喊——A 大!A 大!

“谁来说说这是为什么呢?”

“我来,我来”,一位男生抢着站了起来,“老师,作差就可以了,$A-B$ 通分整理得到的最后结果是 $\frac{a-b}{a(a+1)}$,因为 $a>b>0$,所以这个式子是正的,则 $A>B$”。

“很好!请坐。趁热打铁,利用刚才的思路,大家能快速比较出 $\frac{111}{1111}$ 与 $\frac{1111}{11111}$ 的大小吗?”

这两个分数真像是一对孪生兄弟，分子分母全是1，并且在$\frac{111}{1111}$的分子、分母上分别“加”1就是$\frac{1111}{11111}$了！但该怎么用数学语言来表达呢？

学生的思维是广阔的，过了一会儿，这道小题也被同学们识破了：

$$\frac{111}{1111}=\frac{1110}{11110}<\frac{1110+1}{11110+1}=\frac{1111}{11111}。$$

“太妙了！通过这两个例子，大家有什么收获？”

“遇题先观察，不要盲目地去计算。”

“那遇事呢？”

【精彩故事】

男孩喜欢上了女孩。

他向她表白，女孩的爸妈不同意。

原因很简单：女孩比男孩整整大一岁。

一天，男孩、女孩约好时间和地点，两人偷偷见面了。

女孩点了一杯咖啡，尝了尝说：“这咖啡太苦了。人们都说爱情是甜美的，我怎么品尝不出爱的滋味。”

男孩说：“别着急，加点糖试试吧！”

女孩问：“为什么加糖会变甜呢？”

男孩沉默不语。

男孩喊来服务员，又点了一杯咖啡，并叮嘱多放点糖。

咖啡端来了，男孩往女孩的杯子里倒了一些，摇了摇，让女孩再尝尝。

“还苦吗？”男孩问。

“现在好多了！”女孩说着露出了一丝微笑。

男孩望着女孩，深情地说：“我1个月大时，你13个月，你是我

的 13 倍；我 2 个月大时，你 14 个月，你是我的 7 倍；我 1 岁大时，你 2 岁，你是我的两倍。只要你愿意和我永远在一起，我们总在慢慢接近……”

女孩感动得热泪盈眶，两人的手紧紧地握在了一起。

多么可爱的男孩，不仅懂爱情，还懂数学。男孩和女孩的故事读来让人不禁潸然泪下。下面还是对男孩的“表白”做一简要分析：设男孩的年龄为 x（这里我们以月为单位），女孩的年龄为 y，则 $y>x>0$。当 $x=1$ 时，$y=13$，$\frac{y}{x}=13$；一个月后，x 与 y 都增加了 1，$x=2$，$y=14$，则$\frac{y}{x}=7$；又过了十个月，x 与 y 又增加了 10，$x=12$，$y=24$，则$\frac{y}{x}=2$。于是$\frac{13}{1}>\frac{14}{2}>\frac{24}{12}$，即随着岁月的推移，$\frac{y}{x}$ 会越来越小，也即男孩与女孩的年龄在不断地接近。

仔细品味男孩的最后一句话，发现这其中还蕴含着极限的思想：不论开始的时候 y 比 x 大多少，只要你愿意和我在一起，那么经过足够长的时间，我们的年龄差，相比于我们一起走过的风风雨雨，又算得了什么呢？终会变得微乎其微，可以忽略不计，用数学的语言说来就是 $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{y+m}{x+m}=1$。

那为什会有$\frac{13}{1}>\frac{14}{2}>\frac{24}{12}$，这其中的数学原理又是什么呢？

今天给大家介绍的主角——“糖水不等式”终于要登场了。

【不等式介绍】

a 克糖水中有 b 克糖（$a>b>0$），则糖的质量与糖水质量的比为$\frac{b}{a}$。若再添加 m 克糖（$m>0$），则糖的质量与糖水质量的比为

$\dfrac{b+m}{a+m}$。生活常识告诉我们：添加的糖完全溶解之后，糖水会变甜，即$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$。于是提炼出一个不等式：

$$若\ a>b>0, m>0, 则\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m} \tag{1}$$

这便是“糖水不等式”的由来。

假设有一种机器可以抽取出糖水中的糖，生活常识告诉我们：若把糖水中的糖抽掉 m 克，则糖水会变淡。于是提炼出一个不等式：

$$若\ a>b>m>0, 则\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a} \tag{2}$$

其实完全不必假设，只需逆向思维一下就可得到。这便是思维的厉害之处：事情不必真实发生，在脑子里想一下就发生了。

综合（1）、（2）得到不等式链：

$$若\ a>b>m>0, 则\frac{b-m}{a-m}<\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m} \tag{3}$$

我们假想有 k 杯（这里 k 不必为整数）相同的糖水，混合后糖的质量与糖水质量的比为$\dfrac{bk}{ak}$，重复上面的思维过程便得到更一般的不等式链：

$$若\ a>b>0, m>0, k>0, 则\frac{bk-m}{ak-m}<\frac{b}{a}<\frac{bk+m}{ak+m} \tag{4}$$

当 $k=1$ 时，便回到了(3) 式。

上面考虑的都是相同的糖水，假设现在有两杯浓度不同的糖水，一杯较浓、一杯较淡，现将这两杯糖水混合，所得糖水的浓度一定比浓的淡、比淡的浓，由此可以提炼出如下的不等式链：

$$若\ a_1>b_1>0, a_2>b_2>0, 且\frac{b_1}{a_1}<\frac{b_2}{a_2}, 则\frac{b_1}{a_1}<\frac{b_1+b_2}{a_1+a_2}<\frac{b_2}{a_2} \tag{5}$$

假设两种浓度的糖水分别有 k_1、k_2 杯，混合后又可提炼出不

等式链：

若 $a_1>b_1>0, a_2>b_2>0, k_1、k_2>0$，且 $\frac{b_1}{a_1}<\frac{b_2}{a_2}$，

则 $$\frac{b_1}{a_1}<\frac{b_1k_1+b_2k_2}{a_1k_1+a_2k_2}<\frac{b_2}{a_2} \quad (6)$$

当 $k_1=k_2=1$ 时，便回到了(5)式。

思维的翅膀还在不断地飞翔……

白水里加糖，变甜了；糖水里加数学，变得有味儿了！正可谓：

一杯白开水，加糖更甜美；

此中有数学，请君细品味。

谁料小小的一杯糖水，竟蕴藏了如此多的数学知识！

【趣味案例】

一个简单的不等式，经过生活中实际背景的洗礼，就会变得趣味曼妙起来。

案例 1：在 a 升煤油中加入 b 升水，液体的密度明显变大了。

案例 2：a 克某溶液中溶有 b 克某物质，若再加入 m 克该物质后完全溶解，则溶质的质量分数显然增加了。

案例 3：正值开学之际，某中学原计划招收高一新生 b 人，使全校学生总数达到 a 人，这样高一新生所占的比例为 $\frac{b}{a}$。现为了扩大办校规模，决定高一扩招 m 人，则高一新生所占比例变为 $\frac{b+m}{a+m}$，问扩招后高一新生所占比例是变大还是变小了？

案例 4：一只口袋里装有 3 个红球和 7 个白球。从口袋里任意摸出一个球，恰是红球的概率是多少？再向口袋里放入 2 个红球，则从口袋里任意摸出一个球，恰好是红球的概率是多少？若再放入 3 个红球呢？随着红球的不断放入，这个概率怎么变化？

案例 5：在中国，8 和汉字“发”谐音，取发财、发达之意，被称为