

中外經世言三編

一
玉八冊

中外經世緒言三編卷九

學算筆談序

盧山先生

孟子言仁義禮智有四端吾謂算亦有端算之端者何計較之心也紀圖分果必爭其大水火
衡路必趨捷徑計較之顯然者無論矣他若衣服之工補短截長奇衣合度則有面積之端也
烹飪之工味鹹而和以水味淡而劑以鹽則有比例之意焉此皆能算之端具於生初者也是
故有是端而不知擴充之則囿於一藝一能之末有是端而知所以擴充之則統乎萬事萬物
綱故凡天文之高遠地域之廣輪居家而布帛粟菽在官而兵河鹽漕以至儒者讀書考證
經史商賈持籌權衡子母莫不待治於算此又算之切於日用斯須不可離者也夫以算之切
於日用者既如此具於生初者又如彼宜乎夫人而知之夫人而能之矣而世之學者輒託為
絕業而苦其難明者何哉竊嘗論之上古之算本簡捷而易明也自後世事物日變人心智虛
日出於是設題愈難布算愈繁而精其業者各以心得著書又好為隱互雜糅窮極微奧不屑
以淺近示人甚或秘匿其根源以炫異變易其名目以託古此蓋今古疇人之積習作者之恒
情算學之境因是而益深而學算之人宜其望洋而興歎也咸同以來風氣稍開四方嚮學者

漸衆津逮初學之書亦漸出顧或力求簡易語焉不詳或裨販成書無足觀覽或硜硜然隨問演草因題立術亦云曲盡能事矣然無論說以疏達之貫澈之學者病其煩瑣讀不終篇輒倦而思卧耳余有鑒於此而重惜人人具有擴充之力而未得其用力之途也思有以誘掖而引進之因舉學算次第之大旨并胸中所欲言者一一達之筆而著於篇演為算式以習其數設為問答以窮其趣法由淺而入深語雖繁而易曉聊以擴充其能算之端云爾至於辭句之俚俗體例之參差見哂高明所不計也刻既成因書其緣起於簡端以質海內游藝之君子

總論算法之理

華衡芳

人之心若果懵懵然茫無知覺則亦不必談及算學若其稍有知覺而能思維計較者即已有算學之理與有生以俱來試觀孩兒嬉戲見果必爭取其大者因其胸中已有一多寡之見存焉者也由是知算學之理為人心所自有並非自外而入故取算書中不甚繁重之題以語不習算法之人彼亦能積思而得其所求之數惟遲遲難易則與能算者大異焉此因算之未得其法則各數悉從心計而出故必甚難苟知算法則無論設數如何皆可以法馭之而心中可不必思索所以能事逸而功倍也夫一切算法其初皆從算理而出惟既得其法則其理即寓於法之中可以從法以得理亦可舍理以用法苟其法不誤則其理亦必不誤也

識數之法

華衡芳

物生而後有象象而後有法法而後有數則物之有數乃人之強立名目以記物之多寡者也故亦謂之數目

數目之名即一二三四五六七八九十是也然數可多至無窮若每數必立一名則不勝其繁且以不能盡紀其數故又立一簡便之法名其自一至九為單位之數滿十則為進一位之數仍以自一至九之各字記之而名之為當十之位滿百則又進一位亦仍以自一至九之各字記之若之為當百之位由此而百進為千十進為萬而十萬而百萬而千萬其位均以下一位之數滿十而進為一則任數之如何多皆可以此法記之

所以必以十進位者因人手有十指便於屈指計之也凡常用之數大抵以十進位者為多惟天文家度分秒之數則以六十進位

各位之數既俱可用自一至九之各數記之則其空位當以零字記之或作一圓以代零字亦可

凡學算法必先從識數起故識數為算學中第一步工夫不識數之人不可以學算也惟數目之字並無意義可尋其初必從強記而得所以人自孩提之時父母即教其識數聰明之人有

數歲即能識數者蓋童之人有數十歲仍不識數者

識數之法先將自一至十之十箇字習至極熟能一氣貫注而不凌亂錯雜便能將十箇物任取幾箇數之知其為何數再從一十一讀至一百則能數一百箇錢又知十百為千十千為萬等意則其父便可為無數之人

識數之工夫由於口練而成非但口中要熟亦須眼中看慣方能敏捷如將碁子五枚置于桌上則兒童不能隨口即言其數必用手一一數過而後知之此因眼光未習練之故也及已看慣則物之不滿十箇者于平常之人皆能一望而知之

惟因眼中亦能識數故數物可不必一箇一數而可任幾箇數之然亦各有數法譬如數錢數碁則以五箇一數而口中呼一五一十十五為最便譬如數雞卵則手中不能將五箇雞卵祇能兩箇一數而口中呼一雙兩雙至末則云幾雙或幾雙多一箇此因尋常習用之法而其中已暗以加法乘法為妙用焉惟不經道破則人亦不覺耳

大抵物之能隨手運動者數之易其不能隨手運動者數之稍難因不能將已數過者另置一邊也譬如入山林而數叢樹往往數之數次不得分明因其已然數過者與未數過者易致看錯非有遺漏則有重覆故不能得其真實之數然此亦有法焉可將他物於每數之樹次和作

誌則無誌者為求數過之樹易於遍數而通誌之以得其的確之數其作誌之意猶之另為一邊也

作誌之法惟手所能及之物或手雖不能及而可用長竿及之者則可若其物非手與竿之所能及則此法不能用譬如欲數清天空之星則其事甚難因不能於星上作誌也

人雖不能於星上作誌然可於紙上作點以肖其星故可觀列宿之形而一一繪之於紙以成星圖則數圖上之星與數天上之星無以異也所以星亦有數此皆識數以後之巧思也其法亦為各種巧思故遇一難算之題則必有一法以解之及解去此難又有一難於此者在前必又有一法以解之如此由淺入深步步各有難處而步步各有巧法故無論題之如何深奧皆可於紙上寫之算之以與人共明之

論加減乘除開方之用

算學中各種題若非用加減乘除開方等法以解之則不能得其所求之數可見此五者實為算學中各種利器藉以攻堅入深者也有此五者則於尋常淺近之算學中已無不能推算之題

然學算之人每不以加減乘除開方為難而以用此五者為難因題中所言之各數但有其彼

此相關之理而未明言其何數為實何數為法何當數當加減何數當乘除開方也况題之形狀萬變不窮知其一本必知其二通於此未必通於彼則加減乘除開方雖已習之極熟而不得其用之之道亦幾與不習者無異焉

然則如之何而後可惟有將從古迄今所有之各種算學題目由淺及深分門別類一一立術演草或加以圖說以明其何以當加減何以當乘除何以當開方則題意明而取題之法亦明可不致遇題束手矣

吾且掩卷思之古今來所有之算學書流傳於世者蓋止數百種吾所曾經寓目者亦有數十種此數十種書何種非將算學之題由淺入深分門別類按題立術演草附圖以明其加減乘除開方之故者與其抄撮前人之書以侈吾之卷帙曷若請學算之人自觀各種算書以明其加減乘除開方之用也哉

果如此說則筆談之作即可從此而止矣然而仍不能已者何也余於算學中暇饋者已數十年此中之甘苦知之最悉故欲將已歷過之境界已見到之地步為學者縷述之以助其觀書之功而省其枉費之力俾不致如余之盡從暗中摸索得來則吾願慰矣

吾於算學生平未嘗受業於人即與能算者相友善亦未嘗數數問難也惟樂觀各種算學之

書自十五六歲時偶於故書中檢得坊本算法心竊喜之日名夕展玩不數月而盡通其義吾父見其癖嗜此學必是性之所近也遂為之購求算學之書爰得周髀九章孫子五曹張邱建夏侯陽輯古海島益古演段測圓海鏡俾縱觀之除益古海鏡二書以外其為常法所能通者以加減乘除開方之法叙之無不迎刃而解惟於天元之術則格格不相入者幾及一年始得渙然冰釋後又得秦氏數書九章梅氏歷算全書羅氏觀我生室李氏遺書董方立遺書衡齋算學焦理堂算算記略春池游藝錄始知算學有古今中西之異同而幾何原本當時尚未譯全其前六卷世無單行之本惟數理精蘊中有之及購得數理精蘊遂能通幾何之學而吾年亦已二十矣是時海內算學名家如項氏梅侶徐氏君青戴氏岵士季氏秋初其所著各書尚未出因訪秋初於墨海書館見其方與西士偉烈亞力對譯代數學及代微積拾級尚未告竣秋初謂余曰此為算學中上乘功夫此書一出非特中法幾可盡廢即西法之古者亦無所用之矣余於是知天元之外更有代數微分積分之時術爰從其譯稿中錄得數條視之迄不得其用意之處又閱數年其譯本先後刊竣惠我一編披閱數頁外已不知其所語云何也蓋其格格不相入者猶之初讀海鏡時也詰諸李君則云此中微妙非可以言語形容其法盡在書中吾無所隱也多觀之則自解耳是豈旦夕之功所能通曉者哉余信其言反覆展玩不輟乃

有頭緒譬如傍晚之星初見一點旋見數點又見數十點數百點以致燦然布滿天空是余之代數其明也以漸非如天元之術不悟則已一悟則豁然開朗也然後知代數之術其層累曲折多於天元故其致用之處亦比天元更廣從此以後無時不究心於代數每覺李氏所譯之二種殊非易於入手之書故余又與西士傅蘭雅譯出代數術微積溯源三角數理代數難題解法流播於世於是今之言算者皆知西法之代數即是中法之四元而其淺深雖易則不可同日而語矣

或有問者曰如子之說則必先羅致多書而後可以學算乎抑不必羅致多書而亦可學算乎答之曰學算不多必書也惟擇其要者觀之而已其最易入手者為程氏算法統宗屈氏九數通考此二書於加減乘除開方之用言之極詳故於初學最相宜且從此又可學得開帶縱平方及正立方之法亦可稍知西法中各種名目九章算術為中法最古之書其文義與古書相往來亦學者不可不讀之書也能讀九章則一切古算書無不能讀矣是書鍾祥李雲門演有細草圖說極為詳細外間有刻本矣

幾何原本為西法中最古之書不言法而言理不言數而言象蓋徹乎立法之源凡九章所不及者無不賅也不讀幾何則不能明點線面體之理而於加減乘除開方之用終不能了然於

心目之間是書第十卷之理其深非初學所能通曉但觀其前六卷可也

幾何之界說及各題字字齊着力其釋題之語無一字不周到無一句無求應學者讀慣此書其心思自能縝密則看各種算學之題如禹鼎燭奸可以無遁形矣

論看題之法

華衡芳

初學之人於題中之各句句中之各字往往模糊看過不能字字盡見雖將其題看之多次算之數遍仍有一兩個最要緊之字未嘗看清其真未見此數字也是之而不知其用意之所在則此數個最要緊之字依然漠不關心亦猶之乎不見而已

題中之字句有極其着力者有不甚着力者又有可有可無者惟其可有可無反不甚着力之字往往皆顯露於面前一望即見而其極着力之字則藏伏隱匿於各字之間而使人不易見是在乎有題之眼光能識別之其辭氣輕重之間並有關係故於虛字尤不可忽略看過也

凡看算學之題務將其每句每字俱看完全不可有一字遺漏亦不可有一字不從心上經過則可知題之所語云何其注意之處何在即能知其某句某字着力不着力於是題中所暗藏之意思可以盡顯而各數相問之故亦確鑿可指而不至有游移兩可之見夫而後題中之各數能為我所用而我之加減乘除開方等法亦皆為題中各數所用而不至於捍格不相入矣

算學中各種題如用線縮成各種花樣之結加減乘除開方等法猶之各種器具可用以解結者也惟欲用各器以解其結必先看清結之絲縷方能有下手之處看題之法亦如是而已既能看清題中之絲縷則可將題中之絲縷不要緊之閒字閒句逐漸刪去之而變為另自一種說法惟其各數相關之理則不可與原題稍有背謬

假如有題云某日買筆二枝用錢十四文某日買墨一錠用錢十文某日買紙十張用錢二十文問共用錢若干

則題所問者為共用之錢而不計其用去之日故其筆墨紙三物雖非一日所買而其用去之錢則與一日用去者無異也所以題中之三箇某日二字俱與算法不相關可以刪去之又因題之所問者為共用之錢非問筆之每枝墨之每錠紙之每張其價若干也所以可改其題云筆十四文墨十文紙二十文共錢若干

然其所買之物實與所用之錢亦無相關因買筆買墨買紙之錢可作買茶買酒買漿之錢算之其共用之錢無異也即作一次買物二次買物三次買物并之其共用之錢亦無異也所以又可改其題云先用十四文後用十文又用二十文問共用錢若干則夫人而知當以此三數相加而得其共用之錢四十四文矣

世不一種題其字句一氣呵成不能稍為刪節則只可看明題意而將題中各數別作一簡易之說法

假如九章之題云五雀六燕集稱之衡雀俱重燕俱輕一雀一燕交而處衡適乎并雀燕重一斤問雀燕一枚各重幾何

則此題之意言五雀重於六燕也其五雀六燕之共重為十六兩也又言一雀五燕與四雀五燕其重相等也惟因一雀五燕與四雀一燕相并即為五雀六燕所以可將十六兩分為兩箇八兩一為一雀五燕之重一為四雀一燕之重則可改其題之說法云一雀五燕共重八兩四雀一燕亦共重八兩問雀燕一枚各重幾何

凡看數題而覺此題與彼題相似者必將其兩題看至極其透徹究竟其中或有略異之處否蓋題有面目雖異而算法則同者亦有面目相似而算法不同者

假如有兩題其一云原有錢一千文已用去四百文今剩錢若干其二云原有錢一千文今剩去四百文已用去若干

則此兩題之說法雖異而算法則同因用去之錢與今剩之錢相加必與原有之錢相等故於原有之中減了用去即是今剩之數於原有之中減了今剩即用去之數也

假如九章之題云今有兔先走一百步犬追之二百五十步不及三十步而止問犬不止復行幾何步反之

又如代數術中之題云有野兔為獵犬所追兔在犬前五十步犬每行三步兔能行四步而兔之三步等於犬之兩步問犬追若干步可得兔

觀此知中西皆有大追兔之題其說法及算法略有不同而所求之數則俱為犬之步數也其第一題不及三十步而止之句其三十是兔之步數若認作犬之步數則誤矣

算學之題大抵有比例者居多惟其相比之理每暗藏於所言各事之中其相比之數又顛倒錯亂和較雜糅於各數之內觀者最易為其混淆

即以四率比例之題而論其一率二率三率有順列於各句之內者亦有不依次序者試列六題如左

其一題云原有錢二十千文買得米十石今有錢五十千文問可買若干石

其二題云先將米十石售得錢二十千文今又欲得錢五十千文問須售去米若干石

其三題云今有錢五十千文欲以買米先用錢二十千文買得米十石問其錢可共買米若干石

其四題云今有錢五十千文欲以買米已知每米十石其價為二十千文問可買米若干石
其五題云甲有錢二十千文乙有錢五十千文均欲買米甲將其錢買得米十石問乙錢可買
米若干石

其六題云甲有米十石乙有錢五十千文甲以其米售得錢二十千文問乙錢可買米若干石
則以上六題其比例之率均為二十與十之比若五十與二十五之比

總言之算學中所有之各題其平正通達簡明直捷者固多而其暗藏機械有意難人者亦復
不少看題之人如聽斷疑獄如搜捕伏匿雖具明察之才精細之心苟非老成暗練洞悉此中
故智者不能盡知其情偽也

更有一種難題其設題之時已將題中要緊之義藏匿於人所不易留心之處而將題中不應
有之算理顯露呈露以使入易於誤認若不遲回審顧而後下手鮮有不受其愚弄者
假如有題云今有布一匹其長二十尺每日剪取一尺用之問幾日剪畢

則驟觀此題必答曰二十日殊不知其數已誤矣因題之所問者是幾日剪畢非問幾日用
畢也若問幾日用畢則每日用一尺其二十尺之布當為二十日用畢今問幾日剪畢則每
日剪去一塊其長一尺至第十九日已剪去十九塊計其已剪去十九尺其所剩之一塊適

得一尺可為第二十日之用而第二十日取此一塊布時不必再動剪刀則是十九日剪畢也

由此可見前題中末句之剪字乃是最着力之字斷乎不可輕忽者也看過之時若讀至末句不能將此剪字看出而以為與幾日用畢幾日可畢幾日而畢幾日乃畢無異則安得不誤耳耶

其所以易誤之故因題中所言之各數俱為整齊易算之數其二十尺為一尺之二十倍而一日剪一尺又明明有一比例之理置於面前則觀者不及轉念已不覺脫口而出曰二十日是驢不及舌矣

假如有題云今有竿高十尺有蟲從平地起緩竿而行每日能上二尺而夜間必縮下一尺問此蟲幾日能到竿頂

見此題而不細思其故必以為每日上二尺而下一尺則是只上一尺也一日上一尺則十日必上十尺而到竿頂矣所以必答曰十日

殊不知行至第八日其蟲之足迹已至九尺之處及縮下而在高第八尺處過夜至第九日窮日之力再上行二尺已到竿頂矣題所問者是能到竿頂之日其已到而再縮下則不計

矣

前題所以易誤之故由於始念之差蓋但知其每日只上一尺而忘其第一日上行之數已到二尺之處若以第一日為能到二尺而每日能上一尺固是九日到頂也

大抵看題之法不過是心思細密又能目練眼光令人不能乘我之隙耳非必每題按術一一能強識記之也

論駁題之法

華衡芳

學者既能看明題理即能用加減乘除開方等法以駁其題惟題之形狀萬變不窮則駁題之法亦當隨機應變不能執一以論也

尋常之算學書其每題之下必有各數又必有專并此題之術或更有細草圖說附焉則依其術以演其數固是易易惟每題各有一術若於不能記憶學算之人若非胸有成竹則一捲卷即不能算矣於是有將各術分明別類編成歌訣以便於記誦者殊不知所記者乃是乘法耳題目一變即無所用之矣

既明算理之人於書中所有之各題可不必觀其術曰如何自能止術以駁其題其所立之術或與本書之術相合或出於本書之外而能殊途同歸惟但明幾何而未習天元之人其所立

之術必枝枝節節而為之不能有一以貫之之理故其用心也苦而用力也勞
不論其題之如何變化而概用一法取之者惟天元之術能之然天元仍藉幾何為用故雖有
天元而幾何之理要不可以盡廢也

算學中有數種常用之法其理皆從幾何而出其法必由于學之而後能苟無其法則加減乘
除開方無所施其技而天元亦不能用矣茲設數題以各明其各法之用

一題 有大小兩數之和及大小兩數之較求其大小兩數

法以和較相加半之得大數以和較相減半之得小數

二題 有四率比例之一二三率求其第四率

法以二三兩率相乘一率除之得第四率

三題 有正方形或方形之縱橫兩邊求其方形之面積

法以縱橫兩邊相乘得方形面積

四題 有句股形求其面積

法以句與股相乘半之得句股形面積

五題 有平三角形求其面積