半序空間泛函分析

上 册

Л. В. 康托洛維奇等著

高等教育出版社

半序空間泛函分析

上　册

Л. В. 康托洛維奇等著
胡金昌　盧　文　郑曾同譯

高等教育出版社

半序空間泛函分析

下　册

Л. В. 康托洛維奇
Б. З. 烏　利　赫著
А. Г. 平斯克尔
何　紀　勤　譯

人民教育出版社

本書系根据苏联国家技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 1950 年出版的“半序空間泛函分析”一書譯出。本書的原作者康托洛維奇 (Л. В. Канторович)，烏里赫(Б. З. Вулих)，平斯克尔(А. Г. Пинскер)对这門学科有很多貢献。

本書只假定讀者学过实变函数，因此可供数学系高年級学生及研究工作者参考用。

本書譯稿經关肇直同志校閱，中譯本分上下册出版。

半序空間泛函分析

上 册

Л. В. 康托洛維奇等著

胡金昌　虞文　郑曾同譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

上海国光印刷厂印刷　新华书店发行

統一书号13010·533　开本850×1168 1/32　印张8

字数191,000　印数1—2,800　定价(10) 半 1.20

1958年12月第1版　1958年12月上海第1次印刷

本书系根据苏联国家技术理論书籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)1950年出版的"半序空間泛函分析"一书譯出。本书的原作者康托洛維奇(Л. В. Канторович),烏利赫(Б. З. Вулих),平斯克尔(А. Г. Пинскер)对这門学科有很多貢献。

本书只假定讀者学过实变函数論,因此可供数学系高年級学生及研究工作者参考用。此外,由于这种一般理論对高等数学分析的近似計算法有指导意义,又叙述了关于泛函方程(其具体的特殊形式即代数方程、微分方程、积分方程等)抽象理論的一章,因此对于关心应用数学的讀者也有参考价值。

本书中譯本分上下两册出版。

半序空間泛函分析

下　册

Л. В. 康托洛維奇等著

何紀勤譯

人民教育出版社出版 高等学校教材編輯部 北京宣武門内承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)

上海大众文化印刷厂印刷

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·774　开本 850×1168 1/32　印張 11 1/16

字数 190,000　印数 4,001—10,000　定价(5)¥1.50

1960年6月第1版　1960年10月上海第2次印刷

序

本書叙述綫性半序空間及其中的算子理論，是叙述这一新数学概念的第一本專著。这个理論可以認为是泛函分析的一个独立分支，而又与数学的其他許多部門有关。这个理論自創立迄今約十五年，基本上是苏联数学家的工作產品。現在已有不少著作研討这个理論，因而它已大有發展并獲得各方面的应用。我們自然首先要說一說这理論在近代数学中的地位。

在数学的發展过程中，除了積累經驗及新的事实以外，抽象与推廣的作用是异常重大的。这抽象与推廣的步驟，通常是这样進行的：用某种抽象方法，把以前在数学上討論过的一系列問題，統一成一个問題，并找出这問題的一般解答來。这样，对于一般問題所包括的一切个別問題，也都特別地給出了解答。然而这步驟的意义主要还不僅限于这一点，因为这些个別問題的一大部分解答是早就知道的；其更大的意义还在于：对問題作了这样一个新的提法之后，其本質就明确而且簡化到象中等数学的那种程度。从解决一般問題的过程中，又使我們可以發現一些新的办法，來提出并解决那在过去甚至不可能夢想到的新問題。这种進展的例子有：字母符号的引入和無窮小分析的發現。由于有了后者，那些在十六、十七世紀間只有当时第一流数学家才能解决的問題，如今成为可給普通学生做考試的題目了。

抽象方法的進一步重要進展是在十九世紀完成的；首先有非欧几里得几何(Лобачевский)，群論(Galois)及集合論(G. Cantor)。結果，公理方法在数学界獲得了公認。公理方法是这样的：把对具体对象(数，矩陣，多項式，函数)的研究，变为对適合某些公理(公

DA441/6

設)的东西所成的抽象集合的研究。对于这种普遍的系統所獲得的定理和結構,以后可以按非常不同的形式应用于不同的具体对象。在这方面,二十世紀中最重要的成就有:抽象空間的理論,近世代数(群,环,域),槪率論的公理化構成,最后还有泛函分析。

这里必須特別指出泛函分析的重要性,它是近世数学里最重要而且最有發展前途的領域之一。虽然这門科学兴起的时間不久,但它已在分析学的許多問題中獲得很大的应用。必須强調指出,巴拿赫及其学派所創立的賦范空間理論,及由于苏联数学家在这方面的工作而引起的新方向,对于泛函分析之成为一門独立科学,是有其特別重要意义的。

泛函分析的运用,照例能使我們揭露过去研究結果的意义,能使經典分析的結構系統化,并又將其大为簡化。此外,又能把問題的提法大为加深和推廣,从而得以把它們更往前推進;这就是說,除了把从前所得的結果(当然,如果沒有从前的結果,就不能有推進)系統化,以及在某种程度上把它們加以清理或«貶值»外,泛函分析的运用还同时作出了巨大的、有創造性的工作。

在这个意义上,泛函分析对于經典分析的作用,在某种程度上,可以跟解析几何及微積分对于几何曲綫問題的作用相比。

泛函分析發展的初期只是应用在理論問題上。目前,泛函分析的概念与方法,已成功地而且是多方面地应用到理論物理,数学物理以及应用数学上,特別是用于分析学的近似計算方法上。这样,泛函分析就有着直接的实际应用。

泛函分析的發展前途是远大的。我們認为,今后几十年內,可望在这方面產生新的成就,使数学分析的結構發生改革并且重新加以武裝。

作为本書主要內容的这个泛函分析的分支,是由当时(1935)泛函分析方面(也許就是在整个抽象数学中)的帶有本質性的缺点

而自然産生的。

在近代数学中起着主要作用的一切普遍概念：群，环，域，度量空間及拓撲空間等等，都可算是实数集的一个推廣。事实上，如果我們考察实数集的一些基本性質：1° 代数运算之存在(加与乘)，2° 極限关系—連續、距离，3° 布置，序；則在上述这些抽象概念內，都保存了实数集的某些性質：在群、环及場中，保存着第一項性質；在拓撲空間及度量空間中，保存着第二項性質；在拓撲群及綫性空間中，第一項及第二項性質都保存着；在有序集中，保存着第三項性質。

在保存最后那种性質(序)的道路上來加以推廣，已經顯然是不够的了。在数学上最常見的重要集合，如矩陣、多項式及函数等的集合，都以群、环的身分出現，也以拓撲空間的身分出現，但是，甚至象那跟实数集这样相近的結構，如同复数集与矢量集，也都不能自然地給它們規定次序，因此对这些結構，通常就不能引入布置次序的概念。

抽象結構中的这个缺点，在泛函分析方面特別感到突出。在对函数及序列的綫性空間作分析时甚为重要的具体討論中，正、不等、正运算等概念都具有重要的作用。但这些概念，以及与此有关的事实，在巴拿赫賦范空間中得不到任何反映；这就使我們不能用泛函分析的方法，來处理經典分析中的一些重要問題。

如我們已說过的，卽使对于矢量和函数，如果也象对于实数那样地來要求：任意两个不同元素，恒有一个較大一个較小，我們就已經不能自然地引入布置次序(>，<)的概念了。但是，如果我們不这样要求，而僅要求半有序的話，困难馬上就沒有了。例如，对于两个矢量，如果其中一个的所有分量，都大于或等于另一个的所有对应分量，我們自然就可以認为前者大于或等于后者；但是如果沒有这种情形，我們就不再引入大小关系。

由于泛函分析上的需要，在綫性集中引入半序是件特别重要的事。这样，就引出对所要研究的全部理論極为重要的一个概念，即半序綫性空間(簡称 K 空間)的概念。在这样命名的綫性集合里，有一类元素被定义为正的；并且通常不等式的性質保持有效；又，对于任何一个囿集，其确界的存在也是保証了的。

在这样的空間里，絕对値概念可以自然地引入，收斂概念也是如此。从这些定义來看，K 空間的性質在多方面接近于实数集，尽管它可以有多种的对象作为元素，如矢量，序列，及各类的函数等等。必須說明：半序系統概念本身以及跟它相近的概念，在以前的一些著作中也已遇到过。在这里要首先指出：沙杜諾夫斯基(С. О. Шатуновский)[1]关于極限的一般概念，戴狄金(Dedekind)[1]关于格的定义，以及布勒(Boole)[1, 2]在数理邏輯方面的工作。但是，这些工作及其对数学的总的進展上的价値，在它們出世之初并沒有受到足够的重視。后來(1934—1935)，不但在泛函分析方面，而且也在数学的其他各个部門，都需要考察半序集并在抽象系統中引入次序关系。于是又把早已知道的事实重新建立起來，又有人对这些概念开始作廣泛而深入的研究。

出現在这个时期的，有阿列山德罗夫(П. С. Александров)[1]的工作，他引入了离散空間的概念(这基本上与格的概念相同)，又闡述了这概念在拓樸学方面的意义；有庫洛什(А. Г. Курош)[1, 2]在格的分解理論方面的工作；有格里汶柯(В. И. Гливенко)[1, 2]关于研究各类格的工作，特別是关于度量格以及它对于測度論与概率論上可能有的应用。在这里还必須提到的同时期的工作，有史东(M. H. Stone)的工作，他研究了布勒代数以及如何將其实現的問題；有諾依曼(J. von Neumann)的工作，他研究了連續几何；有奥瑞(O. Ore)的工作，他研究了格的理論在代数上的应用；特別是畢克荷夫(G. Birkhoff)的工作，他研究了格理論的各种問

題。畢克荷夫著有一部專書(見 G. Birkhoff[4]),对这方面的結果作了一个簡賅的叙述,并概述了与这有关的其他問題。

但在本書中,一般半序集和格的理論及其应用,几乎沒有放進去。我們集中注意力于半序綫性集的理論,因为它对于函数論及泛函分析有最大的应用。

对于这方面,在列寧格勒進行了最深入的工作。在康托洛維奇(Л. В. Канторович)的早期(1935—1936)工作中,給出了半序綫性空間(以及更一般空間)的公理体系;建立了这种空間的基本性質,引入并研究了如下的最重要特殊空間:正則的,帶有度量函数的,賦范的;又建立了在这些空間上的綫性算子理論。这些研究曾在列寧格勒大学泛函分析討論会上报告过;其后(1936—1937年),康托洛維奇又講授了«以半序空間理論为基礎的泛函分析»这門專門課程,由此,列寧格勒就有一批数学家参加了这方面的工作,特別是本書的另外两位作者,尤金(А. И. Юдин),耶維支(М. А. Явец),以及后來的阿基洛夫(Г. П. Акилов),巴魯也夫(А. Н. Балуев)。这就使問題的研究范圍大为擴展。

平斯克尔(А. Г. Пинскер)(1938)引入了擴展 K 空間的运算及半加性泛函的概念,后者与离析元素的概念关系很密切,并在他以后的工作中廣泛地应用了它。烏里赫(Б. З. Вулих)(1940)建立了在 K 空間引入乘法运算的可能性并引入了乘法运算类;后來又知道,不但可以引入元素的乘積,而且还可以引入元素的任意函数。K 空間的結構,它的分解为分支,都被人研究了;新型的 K 空間被引入了(平斯克尔)。

最后,用具体空間(矢量的,函数的)來实現半序空間的問題有了深刻的研究,在这方面,列寧格勒的数学家的工作,是与克萊恩(М. Г. Крейн)的敖德薩学派的工作緊密結合在一起的。

在 1940 年,М. Г. 克萊恩及 С. Г. 克萊恩証明了由連續函数

的集來实現賦范半序綫性空間的可能性。由此，特別得到 A. И. 尤金早已得出的結果：有窮維的 K 空間与欧几里德空間同構。

随后，A. Г. 平斯克尔 [5, 10]，M. Г. 克萊恩及 C. Г. 克萊恩 [2]及角谷靜夫（C. Какутани）[1, 2] 討論了用可測函数及序列來实現賦范 K 空間的問題。最后，借可取無窮値的連續函数之助，得到了 K 空間的一般表現（Б. З. Вулих [10]）。

还要指出，更早一些时候，約由 1936 年起，M. Г. 克萊恩就研究过具有正元素所成錐体的賦范空間。在这方面，M. Г. 克萊恩及其門徒獲得很多重要而有趣的結果，并且这些結果有各式各样的应用。但由于这些問題不屬于本書的主要范圍，我們不預备加以敍述。加之，这些問題在 M. Г. 克萊恩与 M. A. 魯特曼（M. A. Рутман）[1] 在«Успехи Математических наук» 3.1 (1948) 的总結論文中，已有完整的介紹。

半序空間的一般理論对于具体空間（可測函数，有界变差函数）已有許多应用，它把已知事实重新闡明并導出了許多新的結果。但在这些結果中，要以 K 空間算子理論在各方面应用的成效为最大。这个理論大大地丰富了以賦范空間綫性算子理論为主的通常綫性泛函分析，因此，使泛函分析对經典分析的应用范圍大为擴展。

在这理論的特点中，必須指出如下这一重要事实：在这理論中，考察若干类綫性运算是很自然的事，但其中僅有一类与巴拿赫綫性算子类完全相同。正算子概念在这个理論中的作用是很大的，而在巴拿赫理論中則当然沒有这种概念。在泛函分析本身的应用中，我們可以拿算子的拓展問題为例，其中不但利用这些概念來給出算子可拓展的充分条件（Л. В. 康托洛維奇）（而这用以前的術語是做不到的），而且又証明在其他一些情形下拓展是不可能的（Г. П. 阿基洛夫）。

完备綫性泛函这个新概念(A. Г. 平斯克尔)促成了对于普遍形式的 K 空間及相配空間的結構作深刻的研究。綫性算子的解析表示問題在 Л. В. 康托洛維奇及 Б. З. 烏里赫的工作中有了研究。这些工作,与賦范及收斂空間中关于泛函及算子的解析表示的研究(Г. М. 菲赫金哥尔茨及 И. М. 盖尔馮德等)有密切关系。

在这理論对于分析的应用中,我們要指出(比方說)一个極簡單的途徑,來得到关于矩問題的定理,而这定理的証明在以前则是很麻煩的;此外,还可指出这理論对集的函数理論上的应用。

在对函数方程的应用方面(Л. В. 康托洛維奇),半序空間理論使我們有可能給出强函数方法的抽象处理,而这方法是解决存在問題的一个經典方法。应用了我們所得到的一般定理,可以獲得关于微分方程与積分方程解的存在、唯一性、連續性方面的新的和早已知道的定理。这方法的抽象处理也可用在方程的近似求解問題上。特别是,由于在估值时不用实数而用 K 空間中適当选擇的元素,使逐步逼近法的收斂范圍及問題中的第一固有值的估計更为准确。因此,在这些問題中,K 空間理論就跟实际应用有了直接的联系。

在本書中,若干非綫性分析問題(例如,凸析与部分加性算子理論)是不討論的,还有屬于拓撲性質的問題(K 空間的各种拓撲構造,拓撲半序群),半序群理論以及其他与 K 空間接近的理論(其研究已經开展且部分結果已發表),在本書中也沒有討論。

我們也沒有寫出 K 空間理論对于某些部門的应用,因为在这些部門中 K 空間的应用还沒有定形,例如在概率論基礎方面,在各态歷經(эргодическая)理論方面及在希尔伯空間的算子理論方面的应用。

我們可以期待,K 空間理論在其進一步的發展中,还可以找到对其他数学部門的应用,例如对于群的一般理論,对于环論,对

子集的描述理論等的应用。

我們希望，本書的出現將推進 K 空間本身的理論工作，以及推進它对数学其他部門的更廣泛的应用。

我們假定讀者应有实变函数論課程的知識。但書中也指出如何从 K 空間理論的普遍定理，來得出实变函数論中的一些事实。

本書并不需要讀者預先具有泛函分析方面的任何知識。但書中用到的賦范空間理論的一些材料，或者是由于它在一般連系上的重要性而提到了，或者是作为更一般結構下的特例而得出的。因此，本書可以看作是泛函分析的一个特殊而独立的教本，但沒有包括泛函分析中的一些重要部門。

本書第一部分(第一章至第六章)叙述空間本身的理論，第二部分(第七章至第十二章)叙述函数算子与函数方程。第十三章是單独的，它叙述实現問題。

讀者若只要求知道 K 空間理論的基本事实及其应用，可以不讀小字部分及第四，第十一，第十三章的全部，因这些地方在其余章節的大字部分并沒有用到。讀者若只注意算子理論及其在分析上的应用，而他又已知道泛函分析的概要，那末关于 K 空間的一般理論，他可以只讀第一章，第五章(其中的 1.1, 1.2 及 3.1) 及第六章(除 1.3 及 2.3 以外的大字部分)。这样，他就可以直接去研究第七、九、十及十二章中对他有兴趣的問題。

在本書的正文中，文献索引尽量減少，特別是不再指出本書作者的著作。文献資料放在書末的"資料附錄"中。

在本書各章里，以十進数字表示節、款、及个別定理。引用到同一章中的定理时，不再說出第几章。

作者衷心感謝他們的老师 Г. М. 菲赫金哥尔茨教授，他引導作者們注意泛函分析的問題，他推進了半序空間的理論，而且經常注意作者們的工作。他的很多宝貴的意見，在我們寫本書时都已

采納了。

在寫第九章及第十二章时，Г. П. 阿基洛夫具体地給了我們帮助。Д. А. 拉依可夫細心地閱讀了原稿，并提供了很多在最后校閱时为我們所采用的意見。对 Г. П. 阿基洛夫及 Д. А. 拉依可夫，我們深表感謝。

我們也感謝参加校对的 А. Н. 巴魯也夫，И. П. 梅索斯基赫，Г. Ш. 魯濱斯坦，及 М. Ф. 西罗霍夫。

上 册 目 錄

下 册 目 录

第二編　半序空間内的綫性算子