交大之星

新华传媒
XINHUA MEDIA

读交大之星　圆名校之梦

挑战名校压轴题 数学

中考篇

陈　铁 编著

P2

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

交大之星

挑战名校压轴题

数 学

（中考篇）

陈 铁 编著

上海交通大學出版社

内容提要

本书以新课标和中考说明为纲，以知识点为基础，系统地进行要点导航、典例精析，精选具有典型性、代表性的压轴题并给出相应的参考答案，方便学生练中学、学中练，达到巩固双基、发展思维、激发创新的目的。本书是初三学生同步练习压轴题的理想用书，也适合教师使用。

图书在版编目(CIP)数据

挑战名校压轴题. 中考篇. 数学 / 陈轶编著. —上海: 上海交通大学出版社, 2014
ISBN 978-7-313-12117-2

Ⅰ. ①挑… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①中学数学课—初中—习题集—升学参考资料 Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 219284 号

挑战名校压轴题——数学(中考篇)

编　　著: 陈　轶
出版发行: 上海交通大学出版社　　地　　址: 上海市番禺路 951 号
邮政编码: 200030　　电　　话: 021-64071208
出 版 人: 韩建民
印　　制: 常熟文化印刷有限公司　　经　　销: 全国新华书店
开　　本: 787 mm×1092 mm　1/16　　印　　张: 10
字　　数: 251 千字
版　　次: 2014 年 10 月第 1 版　　印　　次: 2014 年 10 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 978-7-313-12117-2/G
定　　价: 28.00 元

前　言

纵观整张中考试卷,压轴题分值大、难度高,要想打赢中考这场战役,就必须将压轴题收腹囊中,因为得压轴题者得天下.压轴题主要考查同学们在学习过程中对核心知识和重要数学方法、数学思想的理解和掌握水平,因此中考数学压轴题的设计,大都有以下共同特点:知识点多、覆盖面广、条件隐蔽、关系复杂、思路难觅、解法灵活,其中包含了数形结合、分类讨论、划归、转化、方程等精华的数学思想.压轴题之所以令很多学生望而却步,主要源于它涉及的知识点为数甚多,解题方法更是多种多样,但仔细剖析一下各类压轴题,就会恍然发现其中的规律.

本书的特点是将初三的压轴题按考点和解题方法进行细致的分类指导,分析解题思路,指导解题方法,传授解题技巧,将高难度的压轴题化为一个个台阶,学生们通过此书的学习可拾阶而上,顺利掌握各种压轴题解题技巧.本书列举的压轴题具有典型性、自主性、开放性的特点,适合初三学生边学边练,复习巩固,拓展提高,更为初中数学教师进行专题教学提供了精良的教学资料!

全书按照解题方法及解题类型共分成四个部分,19个专题.本书的第一部分是图形运动中的函数关系式的确定,包含了由比例线段产生的函数关系,由勾股定理产生的函数关系,由线段和差产生的函数关系,与面积有关的函数关系的综合练习题.第二部分是直角坐标平面内点的存在性问题,包含了相似三角形的点的存在性问题,等腰三角形的存在性问题,直角三角形的存在性问题,平行四边形的存在性问题,菱形的存在性问题,梯形的存在性问题的综合练习题.第三部分是数形结合,包含了几何计算和代数计算的综合练习题.第四部分是图形的运动,包含了图形的旋转,图形的翻折,图形的平移,图形运动中的定值问题,动点在线段及其延长线上,圆,猜想证明的综合练习题.

本书的每个专题包括【要点导航】、【典例精析】、【星级训练】、【挑战重点高中自主招生】四个板块.

【要点导航】　对本章节中常见题型和常见解题方法进行梳理、归纳、总结,形成知识网络,确立整体概念.

【典例精析】　精选具有代表性的经典例题,并对例题的解题思路进行详细剖析,严谨的解题过程让学生对题目中蕴含的数学思想与方法有本质的认识和提高,引导学生养成规范缜密的解题习惯,同时每个例题的最后辅以方法的点评指导,高屋建瓴,提升思想.

【星级训练】　仅有例题引领是远远不够的,按照先易后难的顺序为典型例题配套的题组训练题可以不断强化学生对某种解题技巧和方法的掌握,也是教师题组训练教学的好素材.所有的配套练习都有完整的答案供学生参考.

【挑战重点高中自主招生】 在重点高中要逐步扩大自主招生的比例的背景下,自主招生考试显得尤为重要,本书精选部分竞赛题和高中知识相关的题目并配有详细解答,帮助考生赢得考试胜利.

解压轴题需要的是综合能力,俗话说“冰冻三尺非一日之寒”,要想成为解题高手绝非一日之功,因此按照本书的专题设置循序渐进地完成一个个专题练习,便可面对各类压轴题的挑战时临危不乱,泰然处之.由于时间仓促,书中仍存在一些错误和不足之处,恳切希望广大师生提出宝贵建议和要求,以便完善修改.

编 者

2014 年 6 月

目　　录

第一部分　图形运动中的函数关系式的确定

动态几何题是中考“压轴题”的亮点之一. 这类题型的信息量大，经常把数与方程、函数与几何、函数与面积等联系在一起. 解题时要用运动和变化的眼光去观察、思考、研究问题，把握图形运动、变化的全过程，综合运用函数、方程、分类讨论、数形结合等数学思想去解决问题.

由比例线段产生的函数关系

要点导航

本专题的主要特点是两个变量在变化的过程中，其他某些线段也随之变化，根据图形的特征，找到这些有变化规律的线段，通过比例线段来建立函数的解析式. 此类题目根据相似三角形得到对应线段成比例来建立函数关系式.

典例精析

【例 1】 如图 1-1 所示，已知：在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=4$，$\tan\angle CAB=\dfrac{1}{2}$，点 O 在边 AC 上，以点 O 为圆心的圆过 A、B 两点，点 P 为 $\overset{\frown}{AB}$ 上一动点.

(1) 求 $\odot O$ 的半径.

(2) 联结 AP 并延长，交边 CB 延长线于点 D，设 $AP=x$，$BD=y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域.

(3) 联结 BP，当点 P 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点时，求 $\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABD}}$ 的值.

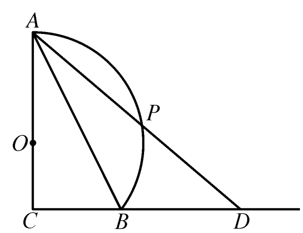


图 1-1

思路分析

1. 联结半径 OB，在 Rt$\triangle BOC$ 中利用勾股定理求解半径.

2. 过点 O 作弦 AP 的弦心距 OH，$\triangle ADC$ 和 $\triangle AOH$ 是一对相似三角形，利用比例线段求 y 关于 x 的函数解析式.

〖**解**〗 (1) 联结 OB，如图 1-2 所示.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=4$，$\tan\angle CAB=\dfrac{1}{2}$，所以 $AC=8$.

设 $OB=x$，则 $OC=8-x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，所以 $x^2=(8-x)^2+4^2$.

解得 $x=5$，即$\odot O$的半径为 5.

(2) 过点 O 作 $OH\perp AD$ 于点 H，如图 1-3 所示.

因为 OH 过圆心，且 $OH\perp AD$. 所以 $AH=\dfrac{1}{2}AP=\dfrac{1}{2}x$.

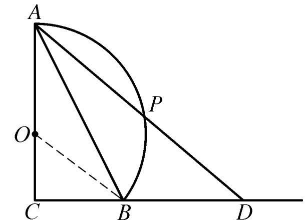


图 1-2

在 $\mathrm{Rt}\triangle AOH$ 中，可得 $OH=\sqrt{AO^2-AH^2}$，即 $OH=\sqrt{25-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{\sqrt{100-x^2}}{2}$.

在$\triangle AOH$和$\triangle ACD$中，$\angle C=\angle OHA$，$\angle HAO=\angle CAD$，

所以$\triangle AOH\backsim\triangle ADC$. 所以$\dfrac{OH}{CD}=\dfrac{AH}{AC}$，即$\dfrac{\frac{\sqrt{100-x^2}}{2}}{4+y}=\dfrac{\frac{x}{2}}{8}$，

得 $y=\dfrac{8\sqrt{100-x^2}}{x}-4$. 定义域为 $0<x\leqslant 4\sqrt{5}$.

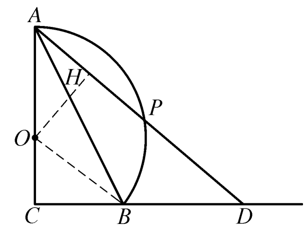


图 1-3

(3) 如图 1-4 所示. 因为 P 是$\overset{\frown}{AB}$的中点，所以 $AP=BP$. 因为 $AO=BO$，所以 PO 垂直平分 AB. 设 $\angle CAB=\alpha$，可求得 $\angle ABO=\alpha$，$\angle COB=2\alpha$，$\angle OBC=90^{\circ}-2\alpha$，$\angle ABC=90^{\circ}-\alpha$，$\angle ABD=90^{\circ}+\alpha$，$\angle APB=2\angle APO=90^{\circ}+\alpha$. 所以 $\angle ABD=\angle APB$. 所以$\triangle ABP\backsim\triangle ABD$. 所以$\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABD}}=\left(\dfrac{AP}{AB}\right)^2$，$\angle ABP=\angle D$. 由 $AP=BP$ 可得 $\angle ABP=\angle PAB$. 所以 $\angle PAB=\angle D$. 所以 $BD=AB=4\sqrt{5}$，即 $y=4\sqrt{5}$.

由 $y=\dfrac{8\sqrt{100-x^2}}{x}-4$，可得 $x^2=50-10\sqrt{5}$，即 $AP^2=50-10\sqrt{5}$.

$\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABD}}=\left(\dfrac{AP}{AB}\right)^2=\dfrac{50-10\sqrt{5}}{80}=\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$.

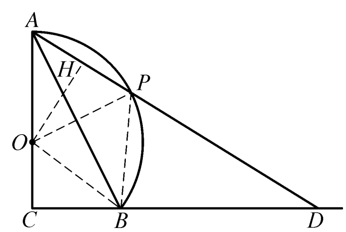


图 1-4

方法点睛

在圆中，联结半径和作弦的弦心距是最常用的辅助线. $\triangle ADC$ 和$\triangle AOH$ 构成一个相似的基本图形，再利用比例线段求函数解析式.

【例 2】 如图 1-5 所示，$\odot O$ 的半径为 6，线段 AB 与$\odot O$相交于点C和点D，$AC=4$，$\angle BOD=\angle A$，OB 与$\odot O$相交于点 E，设 $OA=x$，$CD=y$.

(1) 求 BD 长.

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出定义域.

(3) 当 $CE\perp OD$ 时，求 AO 的长.

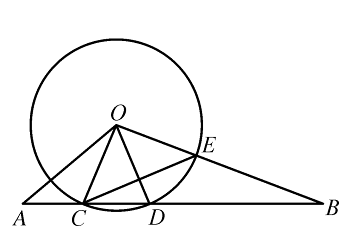


图 1-5

思路分析

1. 可证$\triangle ACO$、$\triangle AOB$和$\triangle DOB$相似，计算BD的长，用含y的代数式表示AB，利用比例$\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{AO}{AC}$求$y$关于$x$的函数解析式.

2. 当$CE\perp OD$时，在等腰$\triangle OCE$中，用三线合一得到$\angle COD=\angle BOD$. 经过等量代换，得到$\angle COD=\angle A$，由三角形内角和可得到等腰$\triangle ADO$.

〖**解**〗 (1) 因为$OC=OD$，所以$\angle OCD=\angle ODC$，所以$\angle OCA=\angle ODB$.

因为$\angle BOD=\angle A$，所以$\triangle OBD\backsim\triangle AOC$，$\dfrac{BD}{OC}=\dfrac{OD}{AC}$.

因为$OC=OD=6$，$AC=4$，所以$\dfrac{BD}{6}=\dfrac{6}{4}$，$BD=9$.

(2) 因为$\triangle OBD\backsim\triangle AOC$，所以$\angle B=\angle AOC$.

又因为$\angle A=\angle A$，所以$\triangle AOB\backsim\triangle ACO$，$\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{AO}{AC}$.

因为$AB=AC+CD+BD=y+13$，所以$\dfrac{y+13}{x}=\dfrac{x}{4}$.

所以y关于x的函数解析式为$y=\dfrac{1}{4}x^2-13$. 定义域为$2\sqrt{13}<x<10$.

(3) 如图1-6所示，因为$OC=OE$，$CE\perp OD$. 所以$\angle COD=\angle BOD=\angle A$.

所以$\angle AOD=180^\circ-\angle A-\angle ODC=180^\circ-\angle COD-\angle OCD=\angle ADO$，所以$AD=AO$.

所以$y+4=x$，解方程$\dfrac{1}{4}x^2-13+4=x$. 解得$x=2\pm2\sqrt{10}$(负值不符合题意，舍去).

所以$AO=2+2\sqrt{10}$.

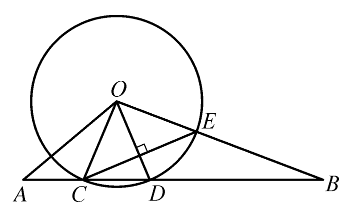


图1-6

方法点睛

第(3)小题当$CE\perp OD$时是第(2)小题的特殊情况，求出此时y与x的函数解析式与第(2)小题的解析式结合求出x的值是此类题目的常用方法.

星级训练

1. ★★★如图1-7所示，已知：在$\triangle ABC$中，$AB=4$，$BC=2$，以点B为圆心，线段BC长为半径的弧交边AC于点D，且$\angle DBC=\angle BAC$，P是边BC延长线上一点，过点P作$PQ\perp BP$，交线段BD的延长线于点Q. 设$CP=x$，$DQ=y$.

(1) 求CD的长.

(2) 求y关于x的函数解析式，并写出它的定义域.

(3) 当 $\angle DAQ=2\angle BAC$ 时，求 CP 的值.

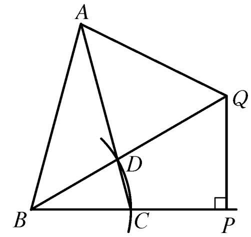


图 1-7

2. ★★★如图 1-8 所示，已知：半圆 O 的半径 $OA=4$，P 是 OA 延长线上一点，过线段 OP 的中点 B 做垂线交⊙O 于点 C，射线 PC 交⊙O 于点 D，联结 OD.

(1) 若 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}$，求弦 CD 的长.

(2) 若点 C 在 $\overset{\frown}{AD}$ 上时，设 $PA=x$，$CD=y$，求 y 与 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围.

(3) 设 CD 的中点为 E，射线 BE 与射线 OD 交于点 F，当 $DF=1$ 时，请直接写出 $\tan P$ 的值.

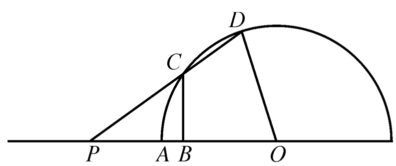


图 1-8

3. ★★★如图 1-9 所示，已知：在等腰直角△ABC 中，$AC=BC$，斜边 AB 的长为 4，过点 C 作射线 $CP\ /\!/\ AB$，点 D 为射线 CP 上一点，点 E 在边 BC 上(不与 B、C 重合)，且 $\angle DAE=45°$，AC 与 DE 交于点 O.

(1) 求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

(2) 设 $CD=x$，$\tan\angle BAE=y$，求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域.

(3) 如果△COD 与△BEA 相似，求 CD 的值.

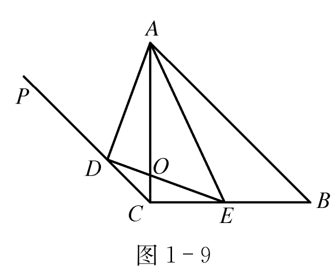


图 1-9

4. ★★★如图 1－10 所示，在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AD // BC$，$AD=2$，$AB=5$，$\sin B=\frac{3}{5}$，点 E 是边 BC 上的一个动点(不与点 B、C 重合)，作 $\angle AEF=\angle AEB$，使边 EF 交边 CD 于点 F(不与点 C、D 重合)，设 $BE=x$，$CF=y$.

(1) 求边 BC 的长.

(2) 当$\triangle ABE$ 与$\triangle CEF$ 相似时，求 BE 的长.

(3) 求 y 关于 x 的函数关系式，并写出定义域.

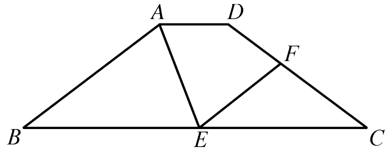


图 1－10

挑战重点高中自主招生

分解因式：$a^3+b^3+c^3-3abc$.

由勾股定理产生的函数关系

要点导航

本专题的主要特征是两个点在运动的过程中，直接或间接地构造了直角三角形，因此可以利用勾股定理去建立函数关系式. 勾股定理是初中数学的重要定理，在运用勾股定理写函数解析式的过程中，主要是找边的等量关系，要善于发现这种内在的关系，用代数式去表示这些边，达到解题的目的. 由于是压轴题，有的先有铺垫，再写解析式；有的写好解析式后，再证明等腰三角形、相似三角形等，还有的再解一些与圆有关的题型. 要认真领会，达到举一反三的目的.

典例精析

【例题】 如图 1－11 所示，已知：在$\triangle ABC$ 中，$AB=15$，$AC=20$，$\cot A=2$，点 P 是边 AB 上的一个动点，$\odot P$ 的半径为定长. 当点 P 与点 B 重合时，$\odot P$ 恰好与边 AC 相切；当点 P 与点 B 不重合，且$\odot P$ 与边 AC 相交于点 M 和点 N 时，设 $AP=x$，$MN=y$.

(1) 求$\odot P$ 的半径.

(2) 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域.

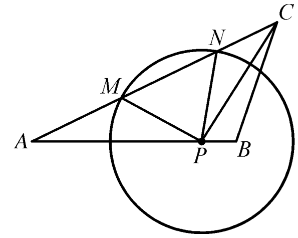


图 1－11

(3) 当 $AP=6\sqrt{5}$ 时，试比较 $\angle CPN$ 与 $\angle A$ 的大小，并说明理由.

思路分析

1. 圆内常添的辅助线为作弦 MN 的弦心距，构造出直角三角形后用勾股定理建立 y 关于 x 的函数解析式.

2. 当 $AP=6\sqrt{5}$ 时，可求出圆内所有线段，可证 $\triangle AMP$ 和 $\triangle PNC$ 相似得 $\angle CPN$ 与 $\angle A$ 相等.

〖**解**〗 (1) 如图 1-12 所示，作 $BD\perp AC$，垂足为点 D.

因为 $\odot P$ 与边 AC 相切，所以 BD 就是 $\odot P$ 的半径.

因为 $\cot A=2$，所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

又因为 $\sin A=\dfrac{BD}{AB}$，$AB=15$，所以 $BD=3\sqrt{5}$.

(2) 如图 1-13 所示，作 $PH\perp MN$，垂足为点 H.

由垂径定理，得 $MN=2MH$. 而 $PH=\dfrac{\sqrt{5}}{5}x$，$PM=BD=3\sqrt{5}$，在 $\text{Rt}\triangle PMH$ 中，$PM^2=MH^2+PH^2$，所以 $y=2\sqrt{45-\dfrac{1}{5}x^2}$，即 $y=\dfrac{2}{5}\sqrt{1\,125-5x^2}$. 定义域为 $3\sqrt{5}\leqslant x<15$.

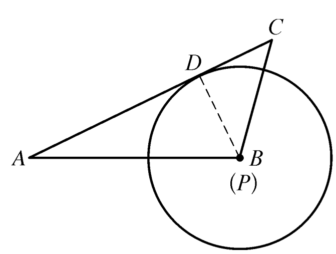


图 1-12

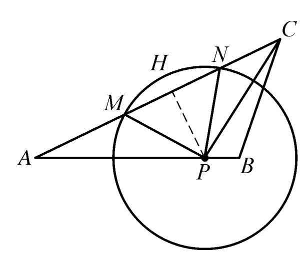


图 1-13

(3) 当 $AP=6\sqrt{5}$ 时，$\angle CPN=\angle A$.

当 $AP=6\sqrt{5}$ 时，$PH=6$，$MH=3$，$AH=12$，所以 $AM=9$. 因为 $AC=20$，$MN=6$，所以 $CN=5$.

因为 $\dfrac{AM}{MP}=\dfrac{9}{3\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，$\dfrac{PN}{CN}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 $\dfrac{AM}{MP}=\dfrac{PN}{CN}$. 又因为 $PM=PN$，所以 $\angle PMN=\angle PNM$.

所以 $\angle AMP=\angle PNC$，所以 $\triangle PNC\backsim\triangle AMP$，$\angle CPN=\angle A$.

方法点睛

圆内常添的辅助线为半径和弦的弦心距，添半径易得等腰三角形，添弦的弦心距易得直角三角形.

星级训练

1. ★★如图 1－14 所示，在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$BC=11$，$\cos B=\frac{3}{5}$，点P是BC边上的一个动点，联结AP，取AP的中点M，将线段MP绕点P顺时针旋转90°得线段PN，联结AN、NC. 设$BP=x$.

(1) 当点N恰好落在BC边上时，求NC的长.

(2) 若点N在$\triangle ABC$内部(不含边界)，设$BP=x$，$CN=y$，求y关于x的函数关系式，并求出函数的定义域.

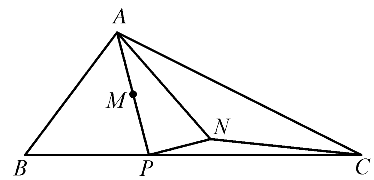


图 1－14

2. ★★在半径为 4 的$\odot O$中，点C是以AB为直径的半圆的中点，$OD\perp AC$，垂足为点D，点E是射线AB上的任意一点，$DF\parallel AB$，DF与CE相交于点F，设$EF=x$，$DF=y$.

(1) 如图 1－15，当点E在射线OB上时，求y关于x的函数解析式，并写出函数定义域.

(2) 当点F在$\odot O$上时，求线段DF的长.

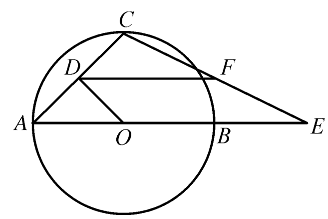


图 1－15

3. ★★如图 1－16 所示，在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$，D是边AC上不与点A、C重合的任意一点，$DE\perp AB$，垂足为点E，M是BD的中点.

(1) 求证：$CM=EM$.

(2) 如果$BC=\sqrt{3}$，设$AD=x$，$CM=y$，求y与x的函数解析式，并写出函数的定义域.

(3) 当点D在线段AC上移动时，$\angle MCE$的大小是否发生变化？如果不变，求出$\angle MCE$的大小；如果发生变化，说明如何变化.

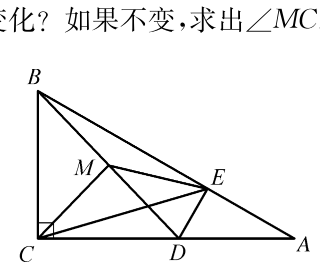


图 1－16

4. ★★★如图 1-17 所示,在正方形 $ABCD$ 中,$AB=2$,点 P 是边 BC 上的任意一点,E 是 BC 延长线上一点,联结 AP 作 $PF\perp AP$ 交 $\angle DCE$ 的平分线 CF 上一点 F,联结 AF 交直线 CD 于点 G.

(1) 求证:$AP=PF$.

(2) 设点 P 到点 B 的距离为 x,线段 DG 的长为 y,试求 y 与 x 的函数关系式,并写出自变量 x 的取值范围.

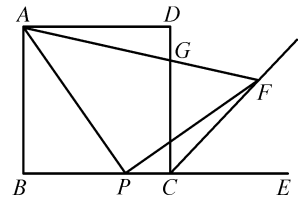


图 1-17

挑战重点高中自主招生

求出分母是 111 的最简真分数的和.

由线段和差产生的函数关系

要点导航

本专题的主要特点是两个变量在变化的过程中,其他某些线段也随之变化,根据图形的特征,找到这些有变化规律的线段,通过线段的相等,线段的和、差来建立函数的解析式. 这部分题目分两类:一类为线段直接相等及和、差关系;另一类是常见的先用代数式表示相关线段,再利用线段相等及和、差关系建立函数解析式. 学生往往习惯一般利用比例线段、面积、勾股定理等写函数解析式的套路,而忽略了这一种方法.

典例精析

【例 1】 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle ACB=90^\circ$,$BC=30$,$AB=50$. 点 P 是 AB 边上任意一点,直线 $PE\perp AB$,与边 AC 或 BC 相交于 E. 点 M 在线段 AP 上,点 N 在线段 BP 上,$EM=EN$,$\sin\angle EMP=\dfrac{12}{13}$.

(1) 如图 1-18(a)所示,当点 E 与点 C 重合时,求 CM 的长.

(2) 如图 1－18(b)所示，当点 E 在边 AC 上时，点 E 不与点 A、C 重合，设 $AP=x$，$BN=y$，求 y 关于 x 的函数关系式，并写出函数的定义域.

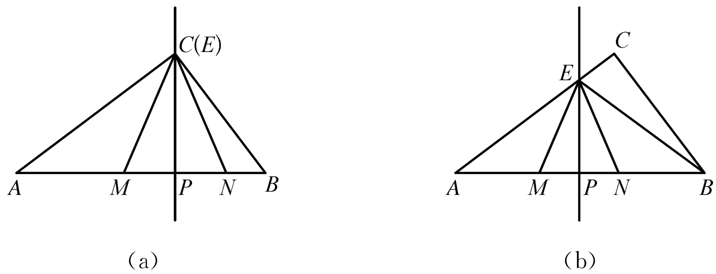


图 1－18

(3) 若 $\triangle AME\backsim\triangle ENB$ ($\triangle AME$ 的顶点 A、M、E 分别与 $\triangle ENB$ 的顶点 E、N、B 对应)，求 AP 的长.

思路分析

1. 反复解直角三角形，把线段 EP、MP、AM、BN 表示成含有 x、y 的代数式.
2. 备用图暗示了第(3)题要分类讨论，点 E 在 BC 上的图形画在备用图中.
3. 第(3)题当 E 在 BC 上时，重新设 $BP=m$ 可以使得运算简便一些.

〖**解**〗 (1) 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=30$，$AB=50$，所以 $AC=40$，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\tan A=\dfrac{3}{4}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACP$ 中，$CP=AC\cdot\sin A=40\times\dfrac{3}{5}=24$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle CMP$ 中，因为 $\sin\angle CMP=\dfrac{CP}{CM}=\dfrac{12}{13}$，所以 $CM=\dfrac{13}{12}CP=\dfrac{13}{12}\times24=26$.

(2) 在 $\mathrm{Rt}\triangle AEP$ 中，$EP=AP\cdot\tan A=\dfrac{3}{4}x$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle EMP$ 中，因为 $\sin\angle EMP=\dfrac{EP}{EM}=\dfrac{12}{13}$，所以 $\tan\angle EMP=\dfrac{EP}{MP}=\dfrac{12}{5}$.

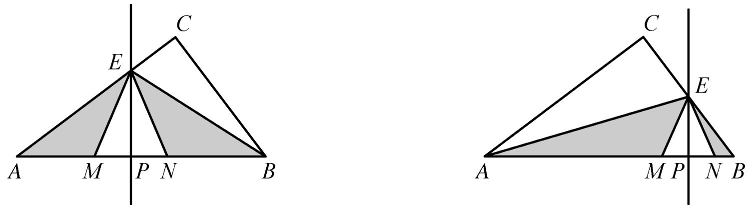
因此 $MP=\dfrac{5}{12}EP=\dfrac{5}{12}\times\dfrac{3}{4}x=\dfrac{5}{16}x$，$EM=\dfrac{13}{12}EP=\dfrac{13}{12}\times\dfrac{3}{4}x=\dfrac{13}{16}x$.

已知 $EM=EN$，$PE\perp AB$，所以 $MP=NP=\dfrac{5}{16}x$.

于是 $y=BN=AB-AP-NP=50-x-\dfrac{5}{16}x=50-\dfrac{21}{16}x$，定义域为 $0<x<32$.

(3) ① 如图 1－19(a)所示，当点 E 在 AC 上时，由 $\dfrac{AM}{ME}=\dfrac{EN}{NB}$，得 $\dfrac{x-\dfrac{5}{16}x}{\dfrac{13}{16}x}=\dfrac{\dfrac{13}{16}x}{50-\dfrac{21}{16}x}$.

解得 $x=AP=22$.



(a)　　　　(b)

图 1-19

② 如图 1-19(b)，当点 E 在 BC 上时，设 $BP=m$，那么 $AP=50-m$.

在 Rt△BEP 中，$EP=\frac{4}{3}m$.

在 Rt△EMP 中，$MP=\frac{5}{12}EP=\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}m=\frac{5}{9}m$，$EM=\frac{13}{12}EP=\frac{13}{12}\times 4m=\frac{13}{3}m$.

所以 $AM=AB-BP-MP=50-m-\frac{5}{9}m=50-\frac{14}{9}m$，$BN=BP-NP=m-\frac{5}{9}m=\frac{4}{9}m$.

这时由 $\frac{AM}{ME}=\frac{EN}{NB}$，得 $\frac{50-\frac{14}{9}m}{\frac{13}{3}m}=\frac{\frac{13}{3}m}{\frac{4}{9}m}$，解得 $m=BP=8$，所以 $AP=50-m=42$.

方法点睛

第(3)小题用原有的 x 的代数式求 AP 计算太过繁琐，所以考虑重新设元的方法.

【例 2】 如图 1-20 所示，在 Rt△ABC 中，$\angle B=90°$，$\angle C=30°$，$AC=4$，D 是 AC 边上的一个动点(不与 A、C 两点重合)，过点 D 作 AC 边的垂线，交线段 BC 于点 E，点 F 是线段 EC 的中点，作 $DH\perp DF$，交射线 AB 于点 H，交射线 CB 于点 G.

(1) 求证：$GD=DC$.

(2) 当点 G 在 BC 上时，设 $AD=x$，$HG=y$. 求 y 关于 x 的函数解析式，并写出它的定义域.

(3) 当 $BH=\frac{1}{2}$ 时，求 CG 的长.

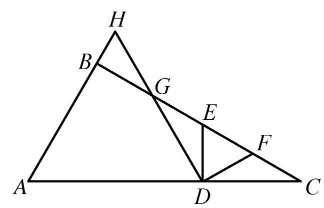


图 1-20

思路分析

(1) 将 AH 或 AC 或 BC 边上的线段表示成含 x、y 的代数式，再利用线段和差可求 y 关于 x 的函数解析式.

(2) 点 H 在射线 AB 上，又因为 $BH=\frac{1}{2}$，所以要考虑点 H 在线段 AB 上和线段 AB 的延长线上两种情况. 先根据题意画出图形，再利用线段和差求出 CG 的长.

证明　(1) 因为 $ED\perp AC$，$\angle C=30^\circ$，F 是 EC 的中点，所以 $DF=FC$，$\angle C=\angle FDC=30^\circ$，所以 $\angle GFD=60^\circ$，又 $GD\perp DF$，所以 $\angle CGD=\angle C=30^\circ$，$GD=DC$.

(2) 因为 $\angle ABC=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$，$AC=4$，所以 $\angle A=60^\circ$，$AB=2$，又 $\angle HDA=\angle C+\angle CGD=60^\circ$，所以 $AH=HD=AD$，因为 $AD=x$，$AC=4$，$HG=y$，所以 $GD=CD=4-x$，又因 $HG+GD=AD$，所以 $y+4-x=x$，所以 $y=2x-4(2\leqslant x<4)$.

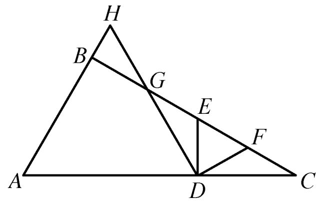


图 1－21

(3) 当 $BH=\dfrac{1}{2}$ 时，有两种情况.

①：当点 H 在 AB 的延长线上时，如图 1－21 所示，$AH=AD=\dfrac{5}{2}$，即 $x=\dfrac{5}{2}$，$y=1$，所以 CG 的长为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

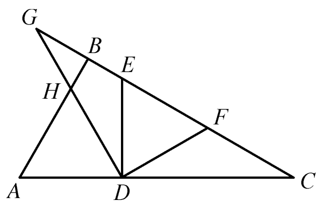


图 1－22

②：当点 H 在 AB 上时，如图 1－22 所示，因为 $BH=\dfrac{1}{2}$，所以 $BG=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，所以 CG 的长为 $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

方法点睛

点 H 在线段 AB 上和线段 AB 的延长线上两种情况下，CG 长的求法相同.

星级训练

1. ★★★已知在△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=BC=4$，在射线 AC、CB 上分别有两动点 M、N，且 $AM=BN$，联结 MN 交 AB 于点 P.

(1) 如图 1－23 所示，当点 M 在边 AC(与点 A、C 不重合)上，线段 PM 与线段 PN 之间有怎样的大小关系？试证明你得到的结论.

(2) 当点 M 在射线 AC 上，若设 $AM=x$，$BP=y$，求 y 与 x 之间的函数关系式，并写出它的定义域.

(3) 过点 M 作直线 AB 的垂线，垂足为点 Q，随着点 M、N 的移动，线段 PQ 的长能确定吗？若能确定，请求出 PQ 的长；若不能确定，请简要说明理由.

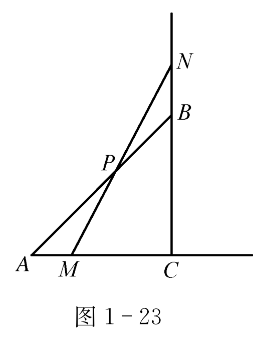


图 1－23