中学理科课程资源

# 漫话数学故事

许海华 编

$$V_{\mathrm{rms}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_m^2 \sin^2(\omega t)\, d(\omega t)} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

追溯数理化的演变历程

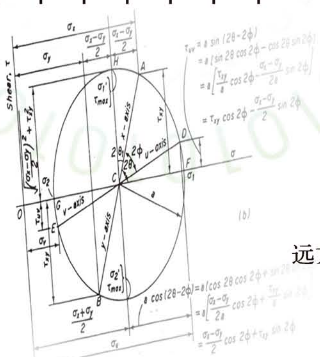
对话最新颖权威的方法

探索最成功的课程教学

感受最前沿的科技动态

理科教育的全程解码

数理化的直面写真



远方出版社

# 漫话数学故事

许海华 编

远方出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

漫话数学故事/许海华编.—2版.—呼和浩特:远方出版社,2007.8
(中学理科课程资源)
ISBN 978-7-80723-068-7

Ⅰ.漫… Ⅱ.许… Ⅲ.数学史—青少年读物 Ⅳ.O11—49

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第116920号

# 中学理科课程资源
# 漫话数学故事

| | |
|---|---|
| 编　　者 | 许海华 |
| 出　　版 | 远方出版社 |
| 社　　址 | 呼和浩特市乌兰察布东路666号 |
| 邮　　编 | 010010 |
| 发　　行 | 新华书店 |
| 印　　刷 | 廊坊市华北石油华星印务有限公司 |
| 版　　次 | 2007年11月第2版 |
| 印　　次 | 2007年11月第1次印刷 |
| 开　　本 | 850×1168　　1/32 |
| 印　　张 | 306 |
| 字　　数 | 3315千 |
| 印　　数 | 3000 |
| 标准书号 | ISBN 978-7-80723-068-7 |
| 总 定 价 | 936.00元(共36册) |

# 前　言

随着人们对新课程观的理解,课程资源的开发和利用越来越受到重视,其开发和利用是保证新课程实施的基本条件。新课程倡导学生主动参与、探究发现、交流合作,而课程资源对学生的发展具有巨大的推动作用,因此开发利用一切课程资源,为实施新课程提供环境成为当务之急。

在执行新课程计划中,应当树立新的课程资源观,教师应该成为学生开发和利用课程资源的引导者。学生应该成为课程资源的主体和学习的主人,应当学会主动地有创造性地利用一切可用资源,为自身的学习、实践、探索性活动服务。

为此,我们开发了《中学理科课程资源》丛书。这套丛书共 36 本,分为数学、物理和化学三个方面。根据新课标的改革方向,每个方面又分为教学、百科和新方位三个方向,是针对中小学教师和学生而编写的精品丛书。

《中学理科课程资源》的开发和利用说到底是为了学生的发展而展开的，让每一位理科教师在进行理科课程资源的开发和利用时能更多地关注学生自身存在的一切资源，激发和唤醒学生的多种潜能，为学生以后能主动学习、主动探索、主动发展奠定坚实的基础。

在本套丛书的编写过程中，我们得到了许多理科方面的专家及学者的指导和帮助，在此表示衷心的感谢。由于编者水平有限，错误、疏漏之处，希望广大读者批评、指正。

编　者

# 目　录

# 千古无同局

围棋是我国人民创造的，至今已有四千余年的历史。围棋爱好者都知道，围棋的棋局千变万化，自古以来，还几乎没有出现过完全相同的棋局，因此古人云："千古无同局。"围棋棋局究竟有多少变化呢？这是一个简单的计算排列总数问题。很早以前，我国有两位天文、数学家就曾进行过研究，计算得出了结果。

## 从和尚到数学家

张遂（僧一行，公元683—727年），是唐代的天文学家和数学家。他的祖父和父辈均在朝做官，得了许多封地。但由于武则天当女皇帝后，为限制唐初功臣、贵族的势力下令收回封地，少年时代的张遂变成了一个穷孩子，连吃饭都要靠别人救济。张遂从小就爱读书，勤奋用功，据《旧唐书》说"一行少聪敏，博览经史，尤精历相"。他很快成为长安城小有名气的青年学者。

在他 21 岁那年，武则天的侄子武三思的家仆找上门来，要他与武三思结交。武三思是一个不学无术，靠阿谀奉承爬上梁王宝座的人；他仗势欺人，残害百姓，无恶不作，现在想借学者装潢门面，欲博取“礼贤下士”的美名，要和张遂做朋友，这对品性耿直、不阿权贵的张遂来说，他是不愿结交权贵而往上爬的。为了躲避武三思，张遂出家当了和尚，法名一行，成了唐代高僧。

一行在佛门下，仍继续研究天文和数学。他的记忆能力惊人。据传，一篇有数千字且字句怪僻的文章，他看过一遍之后，便能一字不漏地背诵出来。他曾“访求贤师，不远数千里”。例如，他听说浙江天台山有一和尚精通数学，就从河南步行上千里去拜师求教。后来，一行在天文、数学上研究出了名，得到了皇帝唐玄宗的礼遇，多次请他当大官，都被他拒绝了。鉴于当时的月蚀预报不准，他受命主持编制新历书《大衍历》，于唐开元十五年(公元 727 年)草成，这是中国历史上优秀的历法之一。在编制《大衍历》中，一行创立的“自变量不等间距二次内插法”是一项重要的数学成就。此外，他在编制《大衍历》中的其他数学成就还有三次差分、等差级数求和、二次方程求根公式等项，他还是世界上第一个实测子午线长度的人。为了纠正古书上记载：南北地隔千里，则 8 尺高竿在日影中影长相差一寸即“寸差千里”的错误说法，他组织了全国 12 个点的大地测量。他测得的子午线数据与

现代数据只相差 11 公里多一点，是实在了不起的杰出成就。

一行为人刚直不阿，奉公守法，不徇私情，有一次他竟敢向皇帝提出批评。又有一次，他幼年时的邻居王老太太找一行，因小时候的一行得到过她大量的周济，老太太要求一行搭救她犯有杀人死罪的儿子，过去，一行曾想方设法要报答王老太太。当时的一行，在皇帝面前说话很有作用，可是一行却对恩人说："如果你老人家需要金钱布匹，我可以十倍报答，但对此事，我不能徇私枉法。"老太太气愤地指着一行大骂说："认识你这样的人有什么用！"一行始终没答应她的要求。

僧一行的一生，是治学刻苦勤奋，品德高尚，学术成就卓越的一生。

有趣的是，他曾对围棋感兴趣，研究过棋局。在《心机算术话》一卷里，计算过围棋的"棋局都数"。围棋棋盘横直方 19 路，共有 $19\times19=3^{61}$ 个交叉点着子位置，每个位置都有布置黑子、白子、留空的三种不同情况，算作不同棋局，那么共有多少棋局呢？一行得出棋局总数一共有 $3^{361}$ 种可能，其值有 769 位之多。一行是怎样算出来的，书中没有记载。他决不是用大数阶乘公式计算出来的，因大数阶乘公式是欧洲数学家斯特灵(J. Stirling，1692—1770 年)于 1730 年首次获得的，晚于一行一千年。

# 棋盘上的数学

约四百年后，博学多才的北宋科学家沈括（1031—1095 年），他在数学的高阶等差级数求和问题（称“隙积术”）、求弧长方法（称“会圆术”）以及测算、对策、物理、天文、气象、工程技术、生物和医学等方面都做出了巨大贡献，写成号称“中国科学史上里程碑”巨著《梦溪笔谈》一书。沈括读到一行的著作，发现“棋局都数”只有结论没有计算过程，引起了他的注意。

一天沈括遇朋友来访，非常高兴，便向朋友讲起一行大师只有结果没有计算过程的“棋局都数”说：“我近来无事，便专心研究这个问题，终于研究出三种计算方法。现在已经算出来了，并找到了一个简单的方法，只是答数太大，如果用文字写，要连写 43 万个字！”

沈括究竟是怎样考虑呢？他在《梦溪笔谈》第十八卷里收录了这个对运筹学、博弈学都有价值的计算棋局问题：

先看最简单的情形，如果围棋盘上只有纵横两路，那么我们称为“方二路”，有 4 个格点，每个格点上都有三种可能，即布置白子、黑子和空位，很明显，可变出 $3\times3\times3\times3=3^4=81$（局）。

同样的道理，“方三路”有 9 个格子，可变出：

$3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3\times3=3^9=19683$(局)；

“方四路”有16个格点，可变出：$3^{16}=43046721$(局)；

“方五路”可变出：$3^{25}=847288609440$(局)；

“方六路”可变出：$3^{36}=150094635282031926$(局)；

最后，“方十九路”，有361个格点，故可变出：$3^{361}=1.74\cdots\times10000^{43}$局不同棋局总数。因此，沈括认为，棋路总数大得很，“非世间名数可能言”(已有的名数都不够用)。

今天，学过对数的人，可以不费吹灰之力验证900多年前大科学家沈括的结论的正确性。令$x=3^{361}$，$\lg x=361\lg3\approx361\times0.4771=172.2331$，查反对数表，$x\approx1.71\times10^{172}=1.71\times(10^4)^{43}$。又因$10^4$是万，故棋局总数是连写43个万的1.71倍，真是大得很。

从理论上讲，上述结果是正确的。只是在实际下棋时，上述有些棋局不合棋理的。但远在11世纪，沈括仅利用笨重且繁琐的筹码工具，居然能计算出如此庞大的数字，这不得不令人赞叹！

张遂、沈括不仅用数学证明了“千古无同局”的真理，而且灵巧地运用了指数运算法则$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$等数学原理，算出了这个巨大的天文数。

当时计算这样的排列总数，张、沈二公的计算方法决不是用传统的普通方法(包括对数运算，对数是17世纪才发现的)，显然，是按某种规律求出的。令人遗憾，先辈

们没有记录下来。如果我们设想这个问题用现代每秒钟运行 1 亿次的电子计算机来算，3 台这样的计算机每年也只能运行 $10^{16}$ 次，这就是说需要 $10^{156}$ 年。9 位数为 1 亿，则 $10^{156}$ 有 157 位数，故约要 17.4 亿年才能运算的次数达到 $3^{361}$。因此对“棋局都数”的计算来说，可以说是我国古代计算技术的巧妙性和先进性的证明。

许多读者也许喜欢下棋，但除了“纹枰对座，从容谈兵”外，又有谁能想到还有上面这些有趣的问题呢？

# 阿凡提巧取银环

阿凡提是新疆维吾尔族民间的传奇人物，智慧的化身。有一个关于阿凡提巧取银环的故事，在新疆几乎家喻户晓。说的是：

一天，财主G对雇工M说："我有一串银链，共有七个环。你给我做一周的工，我每天付给你一个银环，你愿意吗？"

M半信半疑。果然，G接着又说：

"不过，有一个条件，这串银链是一环扣着一环的，你最多只能断开其中的一个环。如果你无法做到每天取走一个环，那么你将得不到这一周的工钱！"

M答应试试，但他立即发现事情有点为难，于是连忙去找阿凡提，请阿凡提替他出主意。果然阿凡提想出了一种巧妙的办法，让财主G眼睁睁看着M把一只只银环取走。贪心的财主终于自食其果，搬起石头砸了自己的脚！

其实，财主的这道题并不难，无需借助于阿凡提的超人智慧，就是在座的各位读者，也完全能够想到以下的办

法：即把这串银链的第三个环断开，使它分离为三个部分，这三个部分的环数分别是：1，2，4。（如图 1）

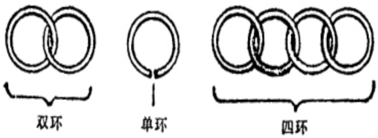



图 1

这样，雇工 M 第一天可以取走单环，第二天退回单环而取走双环，第三天再取走一个单环，第四天退回单环和双环而取走一串四环，第五天再取走一个单环，第六天退回单环而取走双环，第七天再取走那个单环。至此，银链上的所有七个环都已到了 M 手上。

类似上述故事中的问题，也出现在美国数学游戏专家马丁·加德纳的《啊哈，灵机一动》一书，只是把“巧取银环”改成“巧断金链”罢了！

对于上述问题更为深刻的思考是：在允许割断 m 个环的条件下，最多能处理多长的链条（环数为 n），才能做到在 n 天中，每天恰能支付一个环作为工钱？

为了找出 m 与 n 之间的关系，我们先考虑断开两个环，即 m＝2 的情形。显然，此时环链断成了 5 个部分，其中有两部分是单环，可以支付头两天工钱。为了付第三天工钱，必须用一串三环去换回两个单环。以上三部分环可够支付头五天的工钱，因此第四部分应当是 6 环，同理推出第五部分应当是 12 环。即这五个部分的环数